Übungsaufgaben zu Analytische Methoden der Angewandten Theoretischen Physik

2006-02-17

Prüfungsmodus: Bitte lösen Sie insgesamt mindestens 15 Übungsaufgaben, je 2 verschiedenartige aus Kap.12 und 13, je eine aus den anderen. Wenn Sie auf Schwierigkeiten treffen, nehmen Sie Verbindung (telefonisch, mündlich oder per Email) mit mir auf, damit Sie keine Zeit mit Suche oder langen Überlegungen verlieren.
Während der Prüfung werden die vorgelegten Lösungen besprochen. Bei Fragen können Sie immer das Skriptum konsultieren. Sie brauchen keine Formeln auswendig lernen, Sie sollen nur wissen, wo Sie diese finden können. Terminvereinbarung telefonisch, mündlich oder per Email.

1 Beispiele linearer Randwertprobleme

1. Eine homogene Kugel (Radius R, Dichte μ, spezifische Wärme c, Wärmeleitfähigkeit λ) hat die Anfangstemperatur T_0. Sie gibt ihre Wärme an den unendlichen freien Raum ab ($h =$ Koeffizient des äußeren Wärmeleitvermögens). Stellen Sie alle Gleichungen dieses gemischten Randwertproblems auf. Die Lösung dieser Gleichungen ist nicht verlangt.

2. Eine metallische Kugel (Radius R) trägt die Gesamtladung Q. Stellen Sie alle Gleichungen dieses Randwertproblems auf. Die Lösung dieser Gleichungen ist nicht verlangt.

2 Typen von Differentialoperatoren. Charakteristiken.

1. Wo ist die Tricomische Differentialgleichung

$$u_{xx} \ + \ x \ u_{yy} = 0$$

   elliptisch, parabolisch, hyperbolisch. Berechnen Sie die charakteristischen Kurven in allen drei Fällen.

2. Stellen Sie die Maxwellschen Gleichungen mit harmonischer Zeitabhängigkeit in der Matrixform (2.25) dar. Dazu fassen Sie den elektrischen und den magnetischen Feldvektor zu einem sechsdimensionalen Vektor zusammen. Ebenso ergänzen Sie die elektrische Stromdichte mit Nullen zu einem solchen Vektor. Berechnen Sie die charakteristische Form. Zeigen Sie, dass das System elliptisch ist.

3 Allgemeine Formulierung des linearen Randwertproblems

Keine Übungsbeispiele

4 Adjungierter Differentialoperator. Verallgemeinerter Greenscher Satz

1. Berechnen Sie den Faktor ρ, der den Operator $\bar{L}$ des Radialanteils der dreideimensionalen Hehlmholtzgleichung (**??**) in einen selbstadjungierten verwandelt.

2. Berechnen Sie:
   a) den adjungierten Operator und den Strom für den Operator der hypergeometrischen Differentialgleichung (4.28).
   b) den Faktor ρ, der den Operator $\bar{L}$ dieser Differentialgleichung (4.30) in einen selbstadjungierten verwandelt.

3. Betrachten Sie die Rotorgleichungen (= RoGl) der Maxwellschen Gleichungen. Die Permitivität (= Dielekrizitätskonstante) und die Permeabilität sind Funktionen des Ortes. Gewinnen Sie aus den RoGln Vektordifferentialgleichungen zweiter Ordnung, indem Sie entweder das elektrische oder das magnetische Feld eliminieren. Untersuchen Sie, ob die entsprechenden Differentialoperatoren selbstadjungiert sind.

5 Die Greensche Funktion als inverser Operator.

Keine Übungsbeispiele

6 Krummlinige Koordinaten und Vektoranalysis

1. Betrachten Sie die Potentialgleichung in ebenen Polarkoordinaten, Gl.(6.81) im Ringbereich

$$a \leq r \leq b, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi.$$

   (a) Geben Sie alle partikulären Lösungen an, die am Rand $r = a$ verschwinden.
   (b) Geben Sie alle partikulären Lösungen an, die am Rand $r = b$ verschwinden.
   (c) Geben Sie alle partikulären Lösungen an, die an beiden Rändern $r = a$ und $r = b$ verschwinden.

2. Betrachten Sie die Potentialgleichung in ebenen elliptischen Koordinaten, Gl.(6.92). Das Definitionsgebiet ist das Innere und der Rand einer Ellipse mit gegebenen Halbachsen a und b. Gesucht ist die Lösung, die im Inneren überall endlich ist und am Rande den konstanten Wert c annimmt.

7 Die Separierbarkeit der skalaren Hehmholtz- und Potentialgleichung

Keine Übungsbeispiele

8 Reihen

Keine Übungsbeispiele.

9 Vollständige orthogonale Funktionensysteme

1. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten einer der folgenden in $(-\pi, \pi)$ definierter Funktionen mittels der Eulerschen Formeln; diskutieren Sie das Konvergenzverhalten der Fourierreihe und begründen Sie dieses aus dem Verhalten der Funktion $f(x)$:

   (a) $f(x) = |x|$;
   (b) $f(x) = \sin|x|$;
   (c) $f(x) = \cos(ax), \; a \notin \mathbb{Z}$.

2. Berechnen Sie aus den nachfolgenden Potenzreihen Fourierreihen; diskutieren Sie das Konvergenzverhalten der Fourierreihe und begründen Sie dieses aus dem Verhalten der Funktion $f(x)$:

   (a) $\ln(1 + z^2) \;=\; -[z^2 + z^4/2! + ...]$;
   (b) $\frac{1}{1-z} \;=\; 1 + z + z^2 + ... \;, \quad z = a\, e^{i\varphi}, \quad 0 \leq a < 1$;
   (c) $e^z \;=\; 1 + z/1! + z^2/2! + ... \quad z = a\, e^{i\varphi}, a \in \mathbb{R}$.
   Benützen Sie diese Entwicklung um die Werte folgender Integrale zu finden:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \; \cos(\sin x)\cos(n\; x)\; dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \; \sin(\sin x)\sin(n\; x)\; dx.$$

3. Entwickeln Sie die folgende Funktion in ein Fourierintegral:

$$f(t) \;=\; g(t)\;\sin(\omega_0 t), \qquad g(t) = 1 \text{ für } |t| < T, \quad g(t) = 0 \text{ für } |t| > T.$$

Werten Sie das Fourierintegal wieder aus. Dies kann nach der in §13.5.1 dargelegten Methode erfolgen.

4. Überprüfen Sie die Vollständigkeit des Systems der Funktionen $\left\{\sin(nx),\; x \in [0,\pi]\right\}_{n=1}^{\infty}$ mittels der Besselschen Ungleichung, angewendet auf die Funktion $f(x) = x(\pi - x)$, die die gleichen Randbedingungen erfüllt.

10 Die δ-Distribution und die Vollständigkeitsrelation

1. Die Legendrepolynome $P_n(x)$ genügen der folgenden Orthonormierungsrelation:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\; P_k(x)\; dx \;=\; \delta_{n,k}\; 2/(2n+1); \quad n,k \in \mathbb{N}_0.$$

Geben Sie die Vollständigkeitsrelation an (Beweis ist nicht verlangt !)

2. Die Tschebyscheffpolynome $T_n(x)$ genügen der folgenden Orthonormierungsrelation:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x) T_k(x)\; \sqrt{1 \;-\; x^2}\; dx \;=\; \delta_{n,k}\; (1 + \;\delta_{n,0})\; \pi/2; \quad n,k \in \mathbb{N}_0.$$

Geben Sie die Vollständigkeitsrelation an (Beweis ist nicht verlangt !)

3. Eine Funktion $f(x),\; x \in [0,\pi]$ wird symmetrisch fortgesetzt, $f(-x) = f(x)$. Wie lauten das zugehörige vollständige orthogonale Funktionensystem und seine Vollständigkeitsrelation?

4. Eine Funktion $f(x),\; x \in [0,\pi]$ wird antisymmetrisch fortgesetzt, $f(-x) = \;-\; f(x)$. Wie lauten das zugehörige vollständige orthogonale Funktionensystem und seine Vollständigkeitsrelation?

5. Berechnen Sie das Normierungsintegral der Funktionen $J_m(j'_{mn} r/a)\; e^{im\phi},\; J'_m(j'_{mn}) = 0$. Geben Sie dann die Vollständigkeitsrelation an. Beachten Sie, dass auch $j'_{0,0} = 0$ eine Nullstelle von $J'_0(x)$ ist.

11 Symmetrie der Greenschen Funktion

Keine Übungsaufgaben.

12 Verfahren zur Konstruktion der Greenschen Funktion

1. Berechnen Sie die Greensche Funktion des folgenden eindimensionalen Differentialoperators

$$L(u) \;=\; u''$$

zu einer der angegebenen Randbedingungen mittels partikulärer Integrale und - soweit möglich - mittels Eigenfunktionsentwicklungen. Eigenfunktionsentwicklungen können berechnet werden, indem man $L(u) := u'' + k^2 u$ betrachtet und am Ende k gegen Null gehen läßt.

   (a) u(0) = u(a) = 0;
   (b) u(-a) = u(a) = 0;
   (c) u(0) = u'(a) = 0;
   (d) u'(0) = u'(a) = 0.

2. Berechnen Sie die Greensche Funktion des folgenden eindimensionalen Differentialoperators

$$L(u) \;=\; u'' \;+\; k^2 u$$

zu einer der angegebenen Randbedingungen mittels partikulärer Integrale und - soweit möglich - mittels Eigenfunktionsentwicklungen.

   (a) u(-a) = u(a) = 0;
   (b) u(0) = u'(a) = 0;
   (c) u'(0) = u'(a) = 0.
   (d) $u(a) = 0,\; u(\infty)$ erfüllt Ausstrahlungsbedingung.

3. Berechnen Sie die Greensche Funktion des folgenden eindimensionalen Differentialoperators

$$L(u) \;:= xu'' + u', \quad u(a) = 0,\; u(0) = \text{endlich}$$

zu den angegebenen Randbedingungen mittels partikulärer Integrale und - soweit möglich - mittels Eigenfunktionsentwicklungen. Eigenfunktionsentwicklungen können berechent werden, indem man $L(u) := xu'' + u' + k^2 u$ betrachtet und am Ende k gegen Null gehen läßt.

4. Berechnen Sie die Greensche Funktion des folgenden eindimensionalen Differentialoperators

$$L(u) \;=\; u''''$$

zu einer der angegebenen Randbedingungen mittels partikulärer Integrale (Lösung ist zu Kontrollzwecken angegeben):

   (a) u(0) = u'(0) = u"(a) = u"'(a) = 0, $\quad G = x_<^2(x_< - 3x_>)/6$;
   (b) u(0) = u"(0) = u(a) = u"(a) = 0, $\quad G(x, x') \;=\; x_<(a - x_>)(x_<^2 - 2ax_> + x_>^2)/(6a)$.

5. Berechnen Sie die Greensche Funktion der zweidimensionalen Potentialgleichung im Ringbereich $0 < a \le \rho \le b$; diese muß in φ periodisch sein. An den Rändern gilt: $\rho = a, b :\; G = 0$. Verwenden Sie die Vollständigkeitsrelation in φ und die Methode der partikulären Integrale in ρ.

6. Berechnen Sie die Greensche Funktion der Potentialgleichung im dreidimensionalen freien Raum in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ. Verwenden Sie die Vollständigkeitrelation der Kugelflächenfunktionen und die Methode der partikulären Integrale in r. Berechnen Sie das Potential der sphärisch symmetrischen Massendichte

$$\rho(r) = \alpha/\sqrt{r} \quad \text{für} \quad 0 \le r < a, \qquad \rho(r) = 0 \quad \text{für} \quad a \le r < \infty$$

für Aufpunkte mit $r >,\; =,\; <\; a$.

7. Berechnen Sie die Greensche Funktion eines der folgenden zweidimnsionalen Probleme (Polarkoordinaten r, φ) zu einer der angegebenen Randbedingungen in r.

$$\begin{array}{lll}
(a) \quad L(u) := \Delta u - \kappa^2\; u \;: & 1) & u(a) = 0,\; u(0) = \text{endlich}; \\
 & 2) & u'(a) = 0,\; u(0) = \text{endlich}; \\
 & 3) & u(a) = 0,\; u(\infty) = 0; \\
 & 4) & u'(a) = 0,\; u(\infty) = 0. \\
(b) \quad L(u) := \Delta u + k^2\; u \;: & 1) & u(a) = 0,\; u(0) = \text{endlich}; \\
(c) \quad L(u) := \Delta u - c\,\dfrac{\partial u}{\partial t} \;: & & T(a) = 0,\; u(0) = \text{endlich, mittels}
\end{array}$$

1) Fourierintegral bzgl. der Zeit t;
2) der Vollständigkeitsrelation der Funktionen $u_{nm} = J_m(j_{mn} r/a)\; e^{im\varphi}$.

13 Ergänzungen zur Funktionentheorie

1. Untersuchen Sie das Relief, die Werteverteilung und Zugänglichkeit der folgenden wesentlichen Singularität:
$$e^{1/z^2} \quad \text{an} \quad z = 0.$$

2. Werten Sie eines der folgenden Integrale für $a >, < 0$ und $k >, =, < 0$ aus:
$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(k\ x)}{x^4 + a^4}\ dx; \qquad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(k\ x)}{(x^2 + a^2)^2}\ dx.$$

3. Berechnen Sie eines der folgenden Integrale durch komplexe Integration:
$$(a) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 2x}{x^2}\ dx; \qquad (b) \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\ dx; \qquad (c) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2}\ dx; \qquad (d) \int_0^{\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{1 + x^2}\ dx.$$
Für die Auswertung des Integrals (c) wählen Sie als Verzweigungsschnitt den Halbstrahl $0 \le x \le \infty$. Das Integral wird mit Hilfe des Cauchyschen Residuensatzes ausgewertet. Integrieren Sie die Funktion $f(z) = \ln^2 z/(1 + z^2)$ (das Quadrat auf dem Logarithmus ist der entscheidende Trick !) über folgenden Weg: Von $z = \varepsilon + i\varepsilon,\ \varepsilon > 0$ bis zu $z = R + i\varepsilon,\ R > 0$, also oberhalb des Verzweigungsschnitts; dann auf einem Kreis vom Radius R bis zu $z = R - i\varepsilon$; anschließend von $z = R - i\varepsilon$ zu $z = \varepsilon + i\varepsilon$, also unterhalb des Verzweigungsschnitts; schließen Sie den Weg mit einem kleinen Kreis vom Radius ε. Der Beitrag des letzten Integrals geht gegen Null für $\varepsilon \to 0$. Der Beitrag des Integrals über den großen Kreis geht für $R \to \infty$ gegen Null. - Das Integral (d) kann auf (c) zurückgeführt werden.

4. Berechnen Sie die Cauchyschen Hauptwertintegrale:
   (a) $PV \int_0^{\infty} r\ \frac{\cos(a\ x)}{x^2 - r^2}\ dx = -\frac{\pi}{2}\ \sin(a\ r)$;
   (b) $PV \int_0^{\infty} x\ \frac{\sin(a\ x)}{x^2 - r^2}\ dx = \ \frac{\pi}{2}\ \cos(a\ r)$;
   (c) $PV \int_0^{\infty} \frac{\sin(a\ x)}{x\ (x^2 - r^2)}\ dx = ?$

   Wie können (b) und (c) aus (a) abgeleitet werden ?

5. Summieren Sie eine der folgenden Reihen auf (mittels Residuenmethode):
$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\ x)}{a^2 - n^2}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\ x)}{a^4 - n^4}, \quad a \notin \mathbb{Z},\ \ 0 \le x \le 2\pi\ ;$$
$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\ ; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + bn^2}\ ;$$
$$e) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(b + \pi n)^2 + a^2]^k}, \quad k \in \mathbb{N};$$
$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + j_n^2}\ ; \quad g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + j_n'^2}\ .$$
$j_n = j_{m,n}$ ist die n-te Nullstelle der Besselfunktion m-ter Ordnung, $J_m(j_{m,n}) = 0$; die Summe in f) erstreckt sich also über alle Nullstellen dieser Besselfunktion. $j'_n = j'_{m,n}$ ist die n-te Nullstelle der Ableitung der Besselfunktion m-ter Ordnung, $J'_m(j'_{m,n}) = 0$; die Summe in g) erstreckt sich also über alle Nullstellen dieser abgeleiteten Besselfunktion. In Aufgabe e) rechnet man zuerst den Fall k = 1 aus. Höhere natürliche Werte von k erreicht man, indem man beide Seiten des Resultats nach a ableitet und durch geeignete Faktoren dividiert.

6. Summieren Sie folgende Reihen auf (mittels Residuenmethode) und bestimmen Sie das Intervall, in dem das resultierende Polynom mit der Fourierreihe übereinstimmt
$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\ x)}{n}; \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\ x)}{n^2}; \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\ x)}{n^3}.$$

7. Warum kann die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$
nicht mit der angegebenen Residuenmethode aufsummiert werden ? (vgl. Summationsformel von Plana).
Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

8. Berechnen Sie die Werteverteilung von Real- und Imaginärteil der Funktion $f(z) = \sqrt{z^2 - k^2}$, $k \in \mathbb{R}$ in der komplexen $z = x + iy$-Ebene für mindestens zwei der folgenden Festlegungen des Verzweigunsdschnitts:
   (a) Gerade Strecke von $-k$ nach k.
   (b) Halbgerade von k nach $+\infty$ und von $-k$ nach $-\infty$.
   (c) Halbgerade von k nach $k + i\infty$ und von $-k$ nach $-k - i\infty$.
   (d) Halbgerade von k nach $k - i\infty$ und von $-k$ nach $-k + i\infty$.

9. Gegeben ist die Funktion $f(z) = \sqrt{z^2 - k^2}$ mit komplexem $k = |k|e^{i\alpha},\ 0 < \alpha < \pi/2$. Geben Sie den Verlauf der Phase von $f(z)$ an, wenn z längs der reellen Achse von $-\infty$ nach ∞ läuft.

10. Berechnen Sie alle Residuen der Funktion $z^3/((z-1)(z-2)(z-3))$ und deren Summe.

11. Berechnen Sie eines der folgenden Integrale. Die Verzweigungsschnitte erstrecken sich von allen Nullstellen der Wurzel zum Ursprung $z = 0$.
$$(a)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}; \qquad (b)\ \int_0^1 \frac{x\ dx}{1+x^3}\sqrt[3]{1-x^3}; \qquad (c)\ \oint_{|z|=2} dz\,\sqrt[3]{z^3-1}.$$

12. Warum kann das Integral
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)(1-x)}}$$
nicht analog wie die vorhergenden (a), b)) berechnet werden ?

13. Warum kann das Integral
$$\int_0^1 dx\,\sqrt[3]{1-x^3}$$
nicht analog wie die vorvorhergenden (a), b)) berechnet werden ?

14. Berechnen Sie das Integral a). Der Integrationsweg ist der Sektor des Kreises mit Radius Unendlich, $\phi = 0$ und $\phi = \pi/3$; deduzieren sie davon den Wert von b):
$$a)\ \int_O^\infty dt/(1+t^3); \qquad b)\ PV\int_O^\infty dt/(1-t^3).$$
Die Methode kann leicht verallgemeinert werden für Integrale in denen die Hochzahl 3 durch α ersetzt ist. Dann bekommt man im Falle a) das Resultat $\pi/(\alpha\ \sin(\pi/\alpha))$, für b) die Hälfte davon.

14 Die Greensche Funktion der Diffusions- und Potentialgleichung im freien Raum.

1. Rechnerisch ist das folgende Problem der zeitfreien Diffusinsgleichung zweidimensional: Vor einem unendlich langen Zylinder vom Radius a geht eine zur Zylinderarchse parallele unendlich dünne, unendlich lange Linienquelle durch den Punkt ($x' > a, y' = 0$.) Berechnen Sie in ebenen Polarkoordinaten $r,\ \phi$ die Lösung, die auf dem Zylinder $r = a$ und im Unendlichen verschwindet.

15 Die Greensche Funktion der Helmholtzgleichung im freien Raum und in Rohren

1. Wie lautet die Austrahlungsbedingung für Lösungen der Wellengleichung $\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, die keine harmonische, sondern eine beliebige Zeitabhängigkeit aufweisen, im ein-, zwei- und dreidimensionalen Raum. Hinweis: Ersetzen Sie in der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung $k = \omega/c$ durch eine Zeitableitung.

2. (a) Eine Schallwelle wird durch folgende Funktion dargestellt:
$$\psi_e \;=\; e^{(ikx \;-\; \omega t)}$$
Welche Gestalt haben die Phasenflächen dieser Welle und in welche Richtung laufen sie ?

   (b) Rechnerisch ist das folgende Problem der Helmholtzgleichung zweidimensional: Die gerade angegebenen Schallwellen laufen auf einen Zylinder vom Radius a zu, dessen Achse die z-Achse ist. Die einfallende Welle wird also am Zylinder gestreut, es entsteht eine Streuwelle ψ_s. Der Zylinder ist schallhart, d.h. die totale Lösung
$$\psi \;=\; \psi_e \;+\; \psi_s$$
muss dort die Dirichletsche Randbedingung $r = a : \psi = 0$ erfüllen. Die Streuwelle muss im Unendlichen die Ausstrahlungsbedingung erfüllen.
Hinweis: Das Problem löst man in ebenen Polarkoordinaten r, ϕ. Die einlaufende Welle läßt sich folgendermaßen durch Zylinderwellen mit Besselfunktionen darstellen:
$$\psi_e \;=\; e^{ikx}\; e^{-i\omega t} \;=\; e^{ikr\cos\phi}\; e^{-i\omega t} \;=\; \sum_{n-\infty}^{\infty} J_n(kr)e^{in\phi}\; e^{-i\omega t}.$$
ψ_s wird als analoge unendliche Reihe von auslaufenden Zylinderwellen mit imbestimmten Koeffizienten angesetzt; letztere bestimmt man aus der Randbedingung bei $r = a$.

3. Berechnen Sie die Greensche Funktion der Helmholtzgleichung für harmonische Zeitabhängigkeit (Kreisfrequenz ω) in einem unendlich langen Hohlrohr mit rechteckigem Querschnitt (Seitenlängen a, b). Die Differentialgleichung ist die dreidimensionale Helmholtzgleichung mit den Randbedingungen:
a) $u = 0$ auf Mantel (dieser ist schallhart; E-Typ bei elm. Wellen mit elektrischem Hertzschem Vektor).
b) $\partial u/\partial n \;= 0$ auf Mantel (dieser ist schallweich; H-Typ bei elm. Wellen mit magnetischem Hertzschem Vektor).
In beiden Fällen gilt die eindimensionale Ausstrahlungsbedingung an den unenlich fernen Deckflächen des Rohrs. Im Falle b) gibt es auch eine Welle, die nicht von den transversalen Koordinaten abhängt.

4. Gleiche Aufgabe wie zuvor aber für ein kreiszylindrisches Hohlrohr. u = endlich an $r = 0$; a) und b) wie oben. Leiten Sie folgende Darstellungen ab: 1) als Fourierintegral in z-Richtung, 2) als diskrete Doppelsumme.

16 Die charakteristische Singularität der Greenschen Funktion

Welche Singularität besitzt die Greensche Funktion des Operators $\Delta\Delta$ in 1, 2 oder 3 Raumdimensionen ?

17 Erfüllung von Randbedingungen durch Symmetrieoperationen.

1. Rechnerisch ist das folgende Problem der Potentialgleichung zweidimensional: Vor einem unendlich langen Zylinder vom Radius a geht eine zur Zylinderarchse parallele unendlich dünne, unendlich lange Linienladung durch den Punkt $(x' > a, y' = 0.)$ Berechnen Sie in ebenen Polarkoordinaten $r,\ \phi$ die Lösung, die auf dem Zylinder $r = a$ und im Unendlichen verschwindet. Als Lösung kann man sowohl eine Reihenentwicklung als auch einen geshlossenen Ausdruck angeben; letzteren findet man mit Hilfe des Theorems in §17.2.

18 Die Greensche Funktion der zeitabhängigen Diffusionsgleichung

1. Eine Kugel, deren Massendichte, spezifische Wärme, Wärmeleitfähigkeit und Radius a konstant und bekannt sind, ist für Zeiten $t < 0$ durchgehenden kalt, $T = 0$. Ab $t = 0+$ wird die Temperatur auf der Oberfläche $r = a$ auf $T_1 > O$ gehalten. Berechnen Sie die Greensche Funktion und die Temperaturverteilung $T(r, t)$. Hinweis: Für sphärisch symmetrische Lösungen sind die Radialfunktionen die sphärischen Besselfunktionen $\sim\ \sin(\alpha r)/r$ und $\sim\ \cos(\alpha r)/r$.

2. Ein dünner Stab gegebener Länge ℓ und gegebener Wärmediffunsionskonstante a wird an den Enden auf der Temperatur $T = 0$ gehalten. Zur Zeit $t = 0$ ist die Temperatur im Bereich innerhalb der Enden auf der Temperatur $T = T_0 > 0,\ T_0 = \text{const.}$ Berechnen Sie die Entwicklung der Temperatur :

   (a) Mittels Entwicklung nach den partikulären Lösungen der zeitabhängigen Diffusionsgleichung unter Benutzung der Fourierreihe $T = T_0 = \text{const.}$ für die Anfangstemperatur. Zeichnen Sie die Temperaturverteilung für verschiedene Zeiten.

   (b) Berechnen Sie die Greensche Funktion der eindimensionalen zeitabhängigen Diffusionsfgleichung für ein endliches Gebiet $0 \leq x \leq \ell$. Berechen Sie damit das zeitliche Abklingen der Temperaturverteilung.

19 Die Greensche Funktion der Wellengleichung

1. Berechnen Sie die Greensche Funktion der Helmholtzgleichung im dreidimensionalen Raum in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ für folgenden Randbedingungen in r:

$$\begin{aligned} (a)\ u(0) &= \text{endlich},\ u(\infty) \text{ erfüllt Ausstrahlungsbedingung;} \\ (b)\ u(a) &= 0,\ u(\infty) \text{ erfüllt Ausstrahlungsbedingung.} \end{aligned}$$

2. Berechnen Sie die Greensche Funktion der Wellengleichung im dreidimensionalen Raum in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ als Fourierintegral in der Zeit. Benützen Sie für den Raumanteil das Resultat der vorhergehenden Aufgabe.

20 Behandlung inhomogener Randbedingungen mittels Greenscher Funktion

1. Berechnen Sie zu dem Bespiel in diesem Kapitel eine Reihen- oder Integraldarstellung der verwendeten Greenschen Funktion. Berechnen Sie damit die Felddarstellung.

21 Restliche Kapitel

1. Der Hohlraum ist der Raum zwischen zwei konzentrischen metallischen Kugeln: $0 < a \leq r \leq b;\ 0 \leq \theta \leq \pi;\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Berechnen Sie die elektromagnetischen Eigenschwingungen in diesem Hohlraum. Geben Sie die transzendenten Gleichungen für die Eigenwerte an. Wer mit *Mathematica* vertraut ist, könnte auch einige Eigenwerte berechnen.

2. Es soll die Anregung des elektromagnetischen Feldes in einem rechteckigen Wellenleiter ($0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b, -\infty \leq z \leq \infty$), wie diese in Abb.21.3 gezeigt ist, in einer einfachen Rechnung modelliert werden. Dazu wird als Quelle ein elektrischer Hertzscher Dipol $\vec{p}_e = \vec{e}_y\ p_e$ an der Stelle x', y', z' eingeführt. Nach den Ableitungen in §§21.4 und 21.5.7 kann das entsprechende Feld durch einen elektrischen Hertzschen Vektor $\vec{e}_\Pi \vec{e}_y\ p_e\ G(x, y, z; x', y', z')$ dargestellt werden; darin ist $G(x, y, z; x', y', z')$ die skalare Greensche Funktion, die an den Wänden und den (unendlich fernen) Deckflächen die Randbedingungen erfüllt.
   Die Lösung besteht daher aus den folgenden Schritten:

(a) Man berechnet das elektrische Feld mittels eines einkomponentigen Hertzschen Vektors $\vec{\Pi}_e = \vec{e}_y \; \psi_e(x,y,z)$. Damit leitet man aus der Bedingung $\vec{E}_{tang} = 0$ an den metallischen Wänden folgende Randbedingungen ab:

$$x = 0, a: \; \psi_e(x,y,z) \; = \; 0; \qquad y = 0, b: \; \partial\psi_e(x,y,z)/\partial y \; = \; 0;$$
$$z = \pm\infty: \qquad \text{eindim. Ausstrahlungsbedingung.}$$

(b) Zur Berechnung der Greenschen Funktion muss man zunächst Vollständigkeitsrelationen geeigneter Lösungen in x und y aufsuchen. Dazu löst man die eindimensionalen Helmholtzgleichungen in diesen beiden Variablen; man sucht die diskreten Eigenwerte und -funktionen zu den in Punkt (a) abgeleiteten Randbedingungen. Die Eigenlösungen müssen normiert sein und ein vollständiges System bilden. (Vergessen Sie nicht den Eigenwert 0 bei den Lösungen in y mit andeswertigem Normierungsfaktor der Eigenfunktion !)

(c) Entsprechend den gerade abgeleiteten Vollsständigkeitsrelationen setzt man eine Doppelreihe für die Greensche Funktion an; die Entwicklungskoeffizienten sind Funktionen von z und z' : $g_{m,n}(z,z')$. m und n sind die Knotenzahlen in x und y. Alle diese Reihenansätze werden in die inhomogene Helmholtzgleichung, die die skalare Greensche Funktion $G(x,y,z;x',y',z')$ bestimmt, eingesetzt. Dies gibt eine inhomogene Helmholtzgleichung für die $g_{m,n}(z,z')$. Deren Lösung wurde in Kap.15 angegeben.

(d) Damit hat man eine Reihendarstellung der Lösung. Geben Sie noch die von a und b abhängigen Bedingungen für die Kreisfrequenz ω des anregenden Hochfreqenzfeldes an, damit keine höheren Moden als die H_{01}-Welle angeregt werden. Gemäß Abb.21.3 ist $a > b$.