

Kapitel 6

Krummlinige Koordinaten und Vektoranalysis

Krummlinige Koordinaten erweitern unsere Möglichkeiten, die Gestalt von Körpern und Konfiguration zu erfassen und einfachere Formen von Lösungsfunktionen aufzufinden.

6.1 Koordinatentransformationen und Basisvektoren

Einführung krummliniger Koordinaten u_p (z.B. Kugelkoordinaten: $u_1 = r$, $u_2 = \theta$, $u_3 = \phi$) ausgehend von kartesischen Koordinaten x_i .

$$x_i = x_i(u_p) = \psi_i(u_p), \quad i, p = 1, 2, 3. \quad (6.1)$$

$\psi_i(u_p)$ sind gegebene Funktionen mit stetigen Ableitungen. Die inverse Transformation folgt durch Inversion von (6.1):

$$u_p = u_p(x_i) = \chi_p(x_i), \quad i, p = 1, 2, 3. \quad (6.2)$$

x_i geben \mathbb{R}^3 , ebenso geben u_p alle Punkte des \mathbb{R}^3 . Im allg. $\{x_i\} \iff \{u_p\}$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right| x_i &= x_i(u_p) = x_i(u_p(x_j)) \\ \delta_{ij} &= \frac{\partial x_i}{\partial u_p} \frac{\partial u_p}{\partial x_j} = \overset{p}{\tau}_i \overset{p}{\gamma}_j. \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial u_p} \right| u_p &= u_p(x_i) = u_p(x_i(u_q)) \\ \delta_{pq} &= \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_q} = \overset{p}{\gamma}_i \overset{q}{\tau}_i. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Variiert ein u_p während die anderen beiden fix bleiben, erhält man eine Raumkurve mit den im allg. nicht normierten Tangentenvektoren $\overset{p}{\tau}_i$.

$$x_i = x_i(u_a) \Big|_{u_b=\text{fix}, u_c=\text{fix}} : \overset{a}{\tau}_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_a} \cong \overset{a}{\vec{\tau}}. \quad (6.5)$$

Diese drei Tangentenvektoren bilden ein lokales Dreibein, also ein lokales Koordinatensystem. Die Funktion

$$u_a = u_a(x_1, x_2, x_3) = c_a = \text{const.} \quad (6.6)$$

gibt eine Fläche im \mathbb{R}^3 . Variiert c_a erhält man eine Schar ähnlicher Flächen. Mit $a = 1, 2, 3$ erhält man drei Flächenscharen. Drei Flächen

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3) = c_1, \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3) = c_2, \quad u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3) = c_3$$

schneiden sich in einem Punkt P . Die drei Gradientenvektoren

$$\overset{p}{\gamma}_i = \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \cong \overset{p}{\gamma}. \quad (6.7)$$

stehen senkrecht auf ihren jeweiligen Flächen und bilden ebenfalls ein lokales Dreibein, also ein lokales Koordinatensystem.

Das Quadrat des Bogenelements ist:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_i dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_p} du_p \frac{\partial x_i}{\partial u_q} du_q \\ &= g_{pq} du_p du_q; \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$g_{pq} := \overset{p}{\tau}_i \overset{q}{\tau}_i \cong \overset{p}{\tau} \cdot \overset{q}{\tau} = g_{qp}. \quad (6.9)$$

g_{pq} heißt der **kovariante Maßtensor**. Er ist symmetrisch, aber nichtdiagonal, wenn die Koordinaten nicht orthogonal sind. Kugelkoordinaten sind orthogonal, daher stehen die Tangentenvektoren $\overset{r}{\tau}, \overset{\theta}{\tau}, \overset{\phi}{\tau}$ paarweise aufeinander senkrecht; der Maßtensor ist diagonal. Die Diagonalelemente sind:

$$g_{11} = \overset{r}{\tau} \cdot \overset{r}{\tau} = 1; \quad (6.10)$$

$$g_{22} = \overset{\theta}{\tau} \cdot \overset{\theta}{\tau} = r^2; \quad (6.11)$$

$$g_{33} = \overset{\phi}{\tau} \cdot \overset{\phi}{\tau} = r^2 \sin^2 \theta; \quad (6.12)$$

$$g_{pq} = 0, \quad p \neq q. \quad (6.13)$$

Analog definiert man den **kontravarianten Maßtensor** mittels der Gradientenvektoren:

$$g^{pq} := \overset{p}{\gamma}_i \overset{q}{\gamma}_i \cong \overset{p}{\gamma} \cdot \overset{q}{\gamma} = g^{qp} = \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial u_q}{\partial x_i}. \quad (6.14)$$

In Kugelkoordinaten sind die Elemente des kontravarianten Maßtensors:

$$g^{11} = \overset{r}{\gamma} \cdot \overset{r}{\gamma} = 1; \quad (6.15)$$

$$g^{22} = \overset{\theta}{\gamma} \cdot \overset{\theta}{\gamma} = 1/r^2; \quad (6.16)$$

$$g^{33} = \overset{\phi}{\gamma} \cdot \overset{\phi}{\gamma} = 1/(r^2 \sin^2 \theta); \quad (6.17)$$

$$g^{pq} = 0, \quad p \neq q. \quad (6.18)$$

Die Matrizen der beiden Maßtensoren sind zueinander invers:

$$g_{pr} g^{qr} = \frac{\partial x_i}{\partial u_p} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial u_q}{\partial x_j} \frac{\partial u_r}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial u_p} \frac{\partial u_q}{\partial x_j} \delta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_p} \frac{\partial u_q}{\partial x_i} = \delta_p^q. \quad (6.19)$$

6.2 Ko- und kontravariante Koordinaten eines Vektors

Jedes der beiden lokalen Dreibeine kann verwendet werden, um einem Vektor \vec{B} mit kartesischen Komponenten \bar{B}_i Komponenten im krummlinigen System zuzuordnen.

$$\bar{B}_i = B^p \tau_i = B^p \frac{\partial x_i}{\partial u_p}, \quad (6.20)$$

B^p heißen **kontravariante Komponenten** des Vektors \vec{B} .

$$\bar{B}_i = B_p \gamma_i = B_p \frac{\partial u_p}{\partial x_i}. \quad (6.21)$$

B_p heißen **kovariante Komponenten** des Vektors \vec{B} . Diese beiden Systeme von Komponenten stehen miteinander in Beziehung:

$$\bar{B}_i = B^p \frac{\partial x_i}{\partial u_p} = B_p \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \bigg|_{\frac{\partial x_i}{\partial u_q}} \Rightarrow B^p g_{pq} = B_p \delta_q^p = B_q. \quad (6.22)$$

6.3 Krummlinige orthogonale Koordinaten

$$g_{pq} = 0, \quad p \neq q. \quad (6.23)$$

$$ds^2 = g_{11} du_1^2 + g_{22} du_2^2 + g_{33} du_3^2 \quad (6.24)$$

$$= h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 \quad (6.25)$$

$$= ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2. \quad (6.26)$$

$$h_q^2 := \frac{\partial x_i}{\partial u_q} \frac{\partial x_i}{\partial u_q} = \frac{q}{\tau} \cdot \frac{q}{\tau}; \quad \text{keine Summe über } q. \quad (6.27)$$

Die Bogenlänge wird wieder gemäß dem Pythagoräischen Lehrsatz in reine Quadrate zerlegt. $h_q = \sqrt{g_{qq}}$ heißen die **metrischen Koeffizienten**. Damit kann man auch die Flächenelemente und das Volumenelement ausdrücken:

$$ds_q = h_q du_q, \quad q = 1, 2, 3; \quad \text{keine Summe über } q. \quad (6.28)$$

$$dF_1 = ds_2 ds_3 = h_2 h_3 du_2 du_3; \quad (6.29)$$

$$dF_2 = ds_1 ds_3 = h_1 h_3 du_1 du_3; \quad (6.30)$$

$$dF_3 = ds_1 ds_2 = h_1 h_2 du_1 du_2; \quad (6.31)$$

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3. \quad (6.32)$$

Die Basisvektoren

$$\overset{p}{e}_i := \tau_i / h_p = \frac{1}{h_p} \frac{\partial x_i}{\partial u_p}, \quad \overset{p}{e} = \tau / h_p = \frac{1}{h_p} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_p} \quad (6.33)$$

sind normierte Basisvektoren. Aus den kartesischen Komponenten \bar{B}_i des Vektors \vec{B} berechnen wir die **natürlichen** oder **physikalischen Koordinaten** \hat{B}_p gemäß der Definition:

$$\bar{B}_i := \overset{p}{e}_i \hat{B}_p \bigg|_{\overset{q}{e}_i} \quad \hat{B}_q = \bar{B}_i \overset{q}{e}_i = \bar{B}_i \frac{1}{h_q} \frac{\partial x_i}{\partial u_q}; \quad \text{keine Summe über } q. \quad (6.34)$$

Diese Definitionen der Basisvektoren und physikalischen Koordinaten stimmen mit denen im §8.6 des Skriptums Analytische Mechanik überein.

6.4 Die Operatoren der Vektoranalysis in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

Die Vektordifferentialoperatoren grad, div, rot und Laplaceoperator lassen sich mit Hilfe der metrischen Koeffizienten und der partiellen Ableitungen nach den u_p ausdrücken.

6.4.1 Der Gradient

$$\begin{aligned} \text{grad}\Phi &:= (\text{grad}\Phi)_{u_p} \vec{e}^p \Big| \vec{e}^q \\ (\text{grad}\Phi)_{u_q} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \frac{q}{\vec{e}_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial u_s} \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \frac{1}{h_q} \frac{\partial x_i}{\partial u_q} \\ &= \frac{1}{h_q} \frac{\partial\Phi}{\partial u_q}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

$(\text{grad}\Phi)_{u_p}$ ist die u_p -te Komponente des Gradientenvektors.

6.4.2 Die Divergenz

Die Divergenz und der Rotor werden mit Hilfe der Integralsätze berechnet. Zur Berechnung der Divergenz wird der Gaußsche Integralsatz

$$\int \int \int_{\mathcal{V}} \text{div}\vec{A} \, d\mathcal{V} = \int \int_{\mathcal{F}} (\vec{A} \cdot \vec{n}) \, d\mathcal{F}$$

herangezogen. Das Volumen, über das integriert wird, ist ein sehr kleines Parallelepiped, das von den kleinen krummlinigen Rechtecken in den drei Koordinatenebenen $u_1, u_1 + du_1; u_2, u_2 + du_2; u_3, u_3 + du_3$ begrenzt wird; die Seitenlängen dieser Rechtecke sind durch ds_1, ds_2, ds_3 gegeben. Das Volumen ist so klein, dass sich der Gradient darin kaum ändert und daher vor das Integral gezogen werden kann; das verbleibende Integral ist dann das kleine Volumenelement $d\mathcal{V}$. Damit ergibt sich folgender Ausdruck für die Divergenz:

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{d\mathcal{V}} \int \int_{\mathcal{F}} (\vec{A} \cdot \vec{n}) \, d\mathcal{F} := I_1 + I_2 + I_3. \tag{6.36}$$

Das Oberflächenintegral I wird näherungsweise berechnet, indem der Wert von $(\vec{A} \cdot \vec{n})$ mit der Größe der Fläche multipliziert wird. So ergibt sich für die zwei Flächen u_3 und $u_3 + du_3$:

$$\begin{aligned} \text{Fläche } u_3 : & \quad - \left(A_{u_3} h_1 h_2 \right)_{u_3} du_1 du_2 \\ \text{Fläche } u_3 + du_3 : & \quad \left(A_{u_3} h_1 h_2 \right)_{u_3+du_3} du_1 du_2 = \\ & = \left(A_{u_3} h_1 h_2 \right)_{u_3} du_1 du_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(A_{u_3} h_1 h_2 \right)_{u_3} du_3 du_1 du_2. \end{aligned}$$

Die Indices u_3 bzw. $u_3 + du_3$ geben an, dass die Funktion in der Klammer an u_3 bzw. $u_3 + du_3$ zu berechnen ist. Die Summe obiger Terme gibt dann:

$$I_3 = \frac{\partial}{\partial u_3} \left(A_{u_3} h_1 h_2 \right) du_1 du_2 du_3.$$

Analog berechnet man die Integrale I_1 und I_2 :

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial u_1} (A_{u_1} h_2 h_3) du_1 du_2 du_3,$$

$$I_2 = \frac{\partial}{\partial u_2} (A_{u_2} h_2 h_3) du_1 du_2 du_3.$$

Die Summe $I_1 + I_2 + I_3$ wird durch das infinitesimale Volumen $dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$ dividiert. Dabei kürzen sich die Differentiale und man erhält folgenden Ausdruck für die Divergenz:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_{u_1} h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_{u_2} h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (A_{u_3} h_1 h_2) \right] \quad (6.37)$$

6.4.3 Der Rotor

Der Rotor wird mit Hilfe des Stokeschen Integralsatzes

$$\int_{\mathcal{F}} (\operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n}) d\mathcal{F} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}. \quad (6.38)$$

berechnet. Die von der Randkurve umschlossene Fläche $d\mathcal{F}$ ist so klein, dass der Rotor sich im Inneren derselben kaum ändert und vor das Integral gezogen werden kann. Das gibt dann folgenden Näherungsausdruck:

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_{u_p} = \frac{1}{d\mathcal{F}_{u_p}} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}.$$

Für $\vec{n} = \vec{e}$ wird das Kurvenintegral um den Rand eines kleinen Rechtecks ausgeführt. Die Weg-elemente haben die Längen ds_2 bzw. ds_3 ; die Richtung des durchlaufenen Weges muss durch ein Vorzeichen berücksichtigt werden.

$$I_1 = \begin{aligned} & (A_{u_2} h_2)_{u_3} du_2 - (A_{u_3} h_3)_{u_2} du_3 \\ & - (A_{u_2} h_2)_{u_3+du_3} du_2 + (A_{u_3} h_3)_{u_2+du_2} du_3 \end{aligned}$$

Die Indices geben an, dass die Funktion in der Klammer an der dadurch angegebenen Stelle zu berechnen ist. Die Terme der zweiten Zeile werden wieder entwickelt; an ihrer Stelle erhält man dann:

$$- (A_{u_2} h_2)_{u_3} du_2 - \frac{\partial}{\partial u_3} (A_{u_2} h_2)_{u_3} du_2 du_3 + (A_{u_3} h_3)_{u_2} du_3 + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_{u_3} h_3)_{u_2} du_2 du_3$$

Dies wird in den vorhergehenden Block eingesetzt; dann bleibt für I_1 :

$$I_1 = \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (A_{u_3} h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (A_{u_2} h_2) \right] du_2 du_3.$$

Division durch die Größe der Fläche gibt dann das endgültige Resultat für die 1. Komponente des Rotors:

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_{u_1} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (A_{u_3} h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (A_{u_2} h_2) \right], \quad (6.39)$$

Analog berechnet man die anderen beiden Komponenten des Rotors:

$$\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)_{u_2} = \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_3} (A_{u_1} h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (A_{u_3} h_3) \right], \quad (6.40)$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)_{u_3} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_{u_2} h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (A_{u_1} h_1) \right] \quad (6.41)$$

Der Rotor ist das Vektorprodukt des Nablaoperators mit dem Vektor des Feldes. Auch dieses Vektorprodukt kann als Determinante geschrieben werden:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}^1 & h_2 \vec{e}^2 & h_3 \vec{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_{u_1} & h_2 A_{u_2} & h_3 A_{u_3} \end{vmatrix}. \quad (6.42)$$

6.4.4 Der skalare Laplaceoperator

Der skalare Laplaceoperator $\Delta\psi = \operatorname{div} \operatorname{grad}\psi$ ergibt sich aus Gln.(6.35) und (6.37):

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\psi}{\partial u_3} \right) \right] \quad (6.43)$$

6.4.5 Der Vektor-Laplaceoperator

In kartesischen Koordinaten ist die Anwendung des Laplaceoperators auf ein Vektorfeld sehr einfach:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{a}(x, y, z) &:= \Delta(\vec{e}_x a_x(x, y, z) + \vec{e}_y a_y(x, y, z) + \vec{e}_z a_z(x, y, z)) = \\ &= \vec{e}_x \Delta a_x(x, y, z) + \vec{e}_y \Delta a_y(x, y, z) + \vec{e}_z \Delta a_z(x, y, z) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Die Vertauschung des Laplaceoperators Δ mit den Basisvektoren ist zulässig, weil letztere konstante Komponenten besitzen. Dies ist nicht mehr der Fall bei den Basisvektoren krummliniger Systeme. Man kann eine allgemeine Vektordefinition des Vektorlaplaceoperators finden, indem man zunächst folgende Umrechnung der Operation rotrot in kartesischen Koordinaten vornimmt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rotrot} \vec{a} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{a} \\ &= \operatorname{grad} \operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

In obiger Definition des **Vektor-Laplaceoperators** stehen auf der rechten Seite nur klar definierte Vektoroperationen; diese können zu einer allgemeinen Definition dieses Operators dienen, die auch in krummlinigen orthogonalen Koordinaten verwendet werden kann. Den entsprechenden Ausdruck erhält man durch Einsetzen der Definitionen (6.35), (6.37), (6.39) bis (6.41).

6.4.6 Der Nabla-Operator in krummlinigen Koordinaten

Aus der Definition des Gradienten, (6.35), wird folgende Formel für den Nablaoperator gewonnen:

$$\operatorname{grad}\Phi = \nabla\Phi := \left(\vec{e}_{u_1} \frac{1}{h_{u_1}} \frac{\partial}{\partial u_1} + \vec{e}_{u_2} \frac{1}{h_{u_2}} \frac{\partial}{\partial u_2} + \vec{e}_{u_3} \frac{1}{h_{u_3}} \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \Phi. \quad (6.46)$$

Wenn man diese Definition in die der Divergenz ($\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$) und die des Rotors ($\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$) einsetzt, muss man berücksichtigen, dass auch die Basisvektoren von den Koordinaten u_1, u_2, u_3 abhängen.

Zum Beispiel: In kartesischen Koordinaten x, y sind die Basisvektoren konstant und man bekommt für die Divergenz eines zweidimensionalen Vektorfeldes:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}(x, y) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}.$$

Im Gegensatz dazu muss man in ebenen Polarkoordinaten ρ, ϕ die Divergenz auf folgende Weise berechnen ($\vec{e}_\rho(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi)$, $\vec{e}_\phi(\phi) = (-\sin \phi, \cos \phi)$; $\nabla_\rho = \partial/\partial\rho$, $\nabla_\phi = \frac{1}{\rho} \partial/\partial\phi$):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \nabla \cdot \vec{a} = (\vec{e}_\rho \nabla_\rho + \vec{e}_\phi \nabla_\phi) \cdot (\vec{e}_\rho(\phi) a_\rho(\rho, \phi) + \vec{e}_\phi(\phi) a_\phi(\rho, \phi)) \\ &= \nabla_\rho a_\rho(\rho, \phi) + \nabla_\phi a_\phi(\rho, \phi) + a_\rho(\rho, \phi) (\vec{e}_\phi \cdot \nabla_\phi \vec{e}_\rho) + a_\phi(\rho, \phi) (\vec{e}_\phi \cdot \nabla_\phi \vec{e}_\phi) \\ &= \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{a_\phi}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck stimmt mit dem überein, den man aus (6.37) bekommt.

6.5 Konkrete zweidimensionale krummlinige orthogonale Koordinatensysteme

Dazu setzen wir in den obigen Gleichungen:

$$h_3 = 1, \quad \frac{\partial^n}{\partial u_3^n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, . \quad (6.47)$$

6.5.1 Kartesische Koordinaten

$$u_1 = x, \quad u_2 = y; \quad h_1 = h_2 = 1.$$

Potentialgleichung = Laplacegleichung:

$$\Delta \Phi_1 = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0. \quad (6.48)$$

Der Separationsansatz für $\Phi(x, y) = X(x) Y(y)$ zerlegt die zweidimensionale Laplacegleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\Phi(x, y) = X(x) Y(y) \quad (6.49)$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0, \quad \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \alpha^2 = \text{const.} \quad (6.50)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \alpha^2 X(x) = 0, \quad X(x) = A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x); \quad (6.51)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha^2 Y(y) = 0, \quad Y(y) = C \cos(\alpha y) + D \sin(\alpha y). \quad (6.52)$$

Es ist gleich gut möglich ($\alpha^2 \rightarrow -\alpha^2$), für $X(x)$ trigonometrische und für $Y(y)$ hyperbolische Funktionen zu erhalten.

Poissongleichung:

$$\Delta \Phi_1(x, y) = \rho(x, y) \quad (6.53)$$

Es ist meist zweckmäßig mit komplexen Darstellungen der Differentialgleichungen und der Lösungen zu arbeiten.

Komplexe Darstellung von Koordinaten, Potential und Feld

Eine komplexe Variable z statt der beiden reellen Koordinaten x und y :

$$z := x + i y \quad (6.54)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi_1(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^* \partial z} = 0. \quad (6.55)$$

Komplexes Potential:

$$\Phi(z) := \Phi_1(x, y) + i \Phi_2(x, y) \quad (6.56)$$

Auch für die Teile des komplexen Potentials gelten die Cauchy-Riemannsches Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}. \quad (6.57)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für das komplexe Potential findet man wieder nach der Methode von d'Alembert (vgl. §2.1.2):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^* \partial z} = 0: \quad \Phi(z) = w_1(z) + w_2(z^*). \quad (6.58)$$

Darin können z und z^* als voneinander unabhängige Variable betrachtet werden. w_1 und w_2 sind willkürliche Funktionen. Wichtige einfache Lösungen sind die Potenzen z^n .

$$w_1 =: z = x + iy, \quad z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy, \quad z^3 = (x^3 - 3y^2x) + i(3x^2y - y^3) \quad (6.59)$$

Komplexe Felddarstellung für das statische elektrische Feld:

$$\vec{E} = (E_x(x, y), E_y(x, y)) = -\nabla\Phi_1 = -\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right); \quad (6.60)$$

$$E(z) = E_x(x, y) + i E_y(x, y) = -\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^*. \quad (6.61)$$

Zum Beweis dieser Darstellung werden die Cauchy-Riemannschen Gleichungen (6.57) herangezogen:

$$dz = dx : \quad E_x + i E_y = -\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^* = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + i \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - i \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}$$

$$dz = i dy :$$

Komplexe Felddarstellung für das statische magnetische Feld: Diese ist nur korrekt in einfach zusammenhängenden Gebieten, in denen keine Ströme fließen.

$$\vec{B} = (B_x(x, y), B_y(x, y)) = -\nabla\Phi_1 = -\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right); \quad (6.62)$$

$$B(z) = B_y(x, y) + i B_x(x, y) = -i \frac{d\Phi}{dz}. \quad (6.63)$$

Eine wichtige Anwendung ist die Multipol-Entwicklung eines Magnetfeldes in einem kreisförmigen Bereich (Mittelpunkt $(0, 0)$, Radius R) innerhalb der Polschuhe und Spulen. Die Lösung (6.58) wird spezialisiert zu:

$$\Phi = w_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} d_n \left(\frac{z}{R}\right)^n \quad (6.64)$$

Der Term mit $n = 1$ gibt das homogene Feld eines Dipolmagneten:

$$n = 1 : \quad \Phi^{(1)} = d_1 \frac{z}{R}, \quad i B_y - B_x = \frac{d\Phi^{(1)}}{dz} = \frac{d_1}{R} \quad (6.65)$$

Für reelles (rein imaginäres) d_1 liegt das Feld in der x- (y-) Richtung; für komplexes d_1 schief mit dem Winkel $\arg(z)$. $n = 2$ gibt ein Quadrupolfeld, $n = 3$ ein Sextupolfeld:

$$n = 2 : \quad \Phi^{(2)} = \frac{d_2}{2} \frac{z^2}{R^2}, \quad i B_y - B_x = \frac{d\Phi^{(2)}}{dz} = \frac{d_2 z}{R^2} = d_2 \frac{x + iy}{R^2}; \quad (6.66)$$

$$n = 3 : \quad \Phi^{(3)} = \frac{d_3}{3} \frac{z^3}{R^3}, \quad i B_y - B_x = \frac{d\Phi^{(3)}}{dz} = \frac{d_3 z^2}{R^3} = d_3 \frac{(x^2 - y^2) + i2xy}{R^3}. \quad (6.67)$$

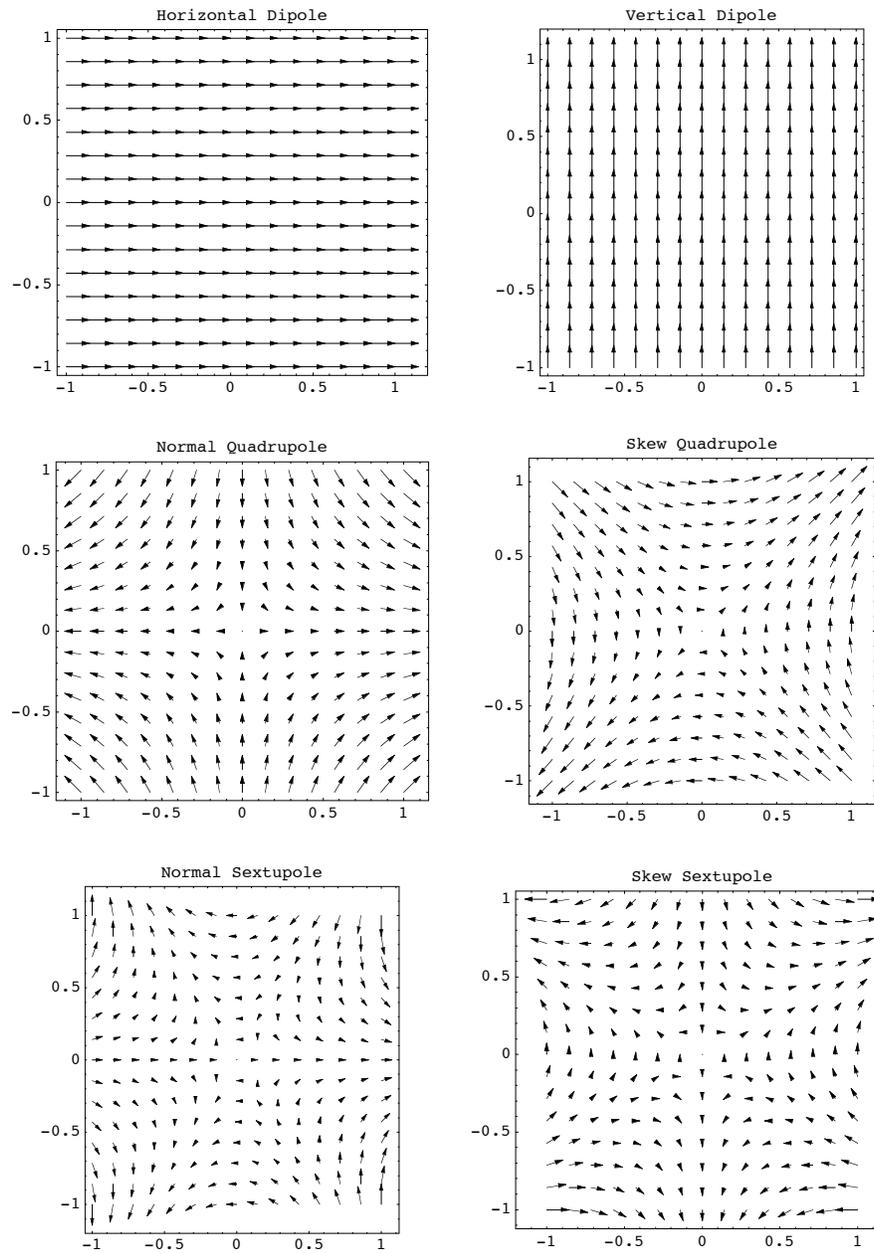


Abbildung 6.1: Horizontaler und vertikaler Dipol; normaler und schiefer Quadrupol; normaler und schiefer Sextupol.

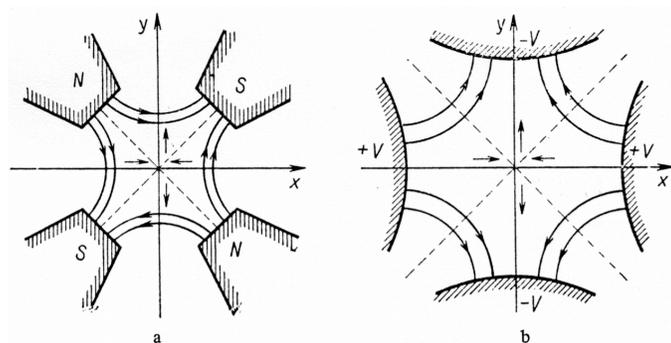


Abbildung 6.2: a) magnetischer Quadrupol; b) elektrischer Quadrupol

6.5.2 Krummlinige orthogonale Koordinaten $u, v(\xi, \eta)$

Durch konforme Abbildung geht man von den zweidimensionalen kartesischen zu den krummlinigen orthogonalen Koordinaten u, v über. Diese Abbildung ist winkeltreu, solange die Ableitung $f'(z) \neq 0$ ist. Ausserdem muss sie ein-eindeutig sein und daher invertierbar sein.

$$w = u + i v = f(z) = f(x + i y), \quad z = f^{-1}(w). \quad (6.68)$$

Das Bogenelement ist dann:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx + i dy)(dx - i dy) = dz dz^* = \\ &= \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 (du^2 + dv^2) = \left| \frac{1}{f'(z)} \right|_{z=f(w)}^2 (du^2 + dv^2) = \frac{1}{D} (du^2 + dv^2) \end{aligned} \quad (6.69)$$

mit

$$D = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2.$$

Die metrischen Koeffizienten sind dann:

$$h_u^2 = h_v^2 = 1/D. \quad (6.70)$$

Oft ist es zweckmässig nachfolgend die Koordinaten u, v zu reskalieren; dies stört nicht die Orthogonalität.

$$\xi = \xi(u), \quad \eta = \eta(v), \quad \text{bzw.} \quad u = \xi(u), \quad v = \eta(v). \quad (6.71)$$

Damit werden das Bogenelement und die metrischen Koeffizienten:

$$ds^2 = \frac{1}{D} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 d\xi^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 d\eta^2 \right]. \quad (6.72)$$

Die zugehörigen metrischen Koeffizienten sind dann:

$$h_\xi^2 = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2, \quad h_\eta^2 = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 \quad (6.73)$$

Das Flächenelement ist:

$$d\mathcal{F} = h_u h_v du dv = h_\xi h_\eta d\xi d\eta. \quad (6.74)$$

6.5.3 Ebene Polarkoordinaten r, ϕ , (MS Fig.1.02)

Die Abbildungsfunktion ist:

$$w = u + i v = \ln z = \ln(x + i y), \quad z = e^w. \quad (6.75)$$

$$\begin{aligned} u &= \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = e^u \cos v, \quad -\infty \leq u \leq \infty, \\ v &= \arctan(y/x), \quad y = e^u \sin v, \quad 0 \leq v \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (6.76)$$

$$D = e^{2u} = \frac{1}{x^2 + y^2} = 1/h_u^2 = 1/h_v^2. \quad (6.77)$$

$$d\mathcal{F} = e^{2u} du dv. \quad (6.78)$$

Die Reskalierung $r = e^u$, $\phi = v$ ergibt dann die üblichen Polarkoordinaten.

$$\frac{\partial}{\partial u} = r \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (6.79)$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & x &= r \cos \phi, & 0 &\leq r < \infty, \\ \phi &= \arctan(y/x), & y &= r \sin \phi, & 0 &\leq \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Das Bogenelement, die metrischen Koeffizienten und das Flächenelement sind;

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2; \quad h_r = 1, \quad h_\phi = r^2; \quad d\mathcal{F} = r dr d\phi. \quad (6.81)$$

Die normierten Basisvektoren sind gemäß Gl.(6.33):

$$\vec{e}_r = \vec{\tau}_r/h_r = (\cos \phi, \sin \phi) = \vec{r}/r, \quad \vec{e}_\phi = \vec{\tau}_\phi/h_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi). \quad (6.82)$$

Damit ergibt sich die Umrechnung der kartesischen auf die natürlichen Komponenten des Vektors \vec{a} :

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{a_x x + a_y y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & a_\phi &= a_r \cos \phi - a_\phi \sin \phi, \\ a_\phi &= \frac{-a_x y + a_y x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. & a_x &= a_r \sin \phi + a_\phi \cos \phi. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Die Ausdrücke für die Operatoren der Vektoranalysis ausser dem Laplaceoperator werden in dem Paragraphen für die Kreiszyylinderkoordinaten angegeben.

Trennt man die Variablen der **Potentialgleichung**

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = 0, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (6.84)$$

durch den Separationsansatz $\psi = R(r) \Phi(\phi)$, ergeben sich folgende gewöhnliche Differentialgleichungen mit den angegebenen Lösungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{\alpha^2}{r^2} R &= 0, & R(r) &= A r^\alpha + B r^{-\alpha}; & \alpha &\neq 0. \\ \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi &= 0, & \Phi(\phi) &= C \cos(\alpha \phi) + D \sin(\alpha \phi). \end{aligned} \quad (6.85)$$

$\alpha = 0$ ergibt eine radialsymmetrische Lösung mit der Radialfunktion

$$R(r) = A + B \ln r. \quad (6.86)$$

Die Separationskonstante α muss ganzzahlig sein, wenn das Definitiongebiet den vollen Winkelbereich umfasst wie in Gl.(6.84) angegeben, weil dann die Lösung periodisch sein muss. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet, das den Ursprung $r = 0$ enthält, bilden die beiden folgenden Sätze von Funktionen

$$r^{|m|} e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \text{oder} \quad 1, r^m \cos(m\phi), r^m \sin(m\phi), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.87)$$

je ein **vollständiges System regulärer Lösungen der Potentialgleichung**.

Umfasst das Definitionsgebiet nur einen Winkelbereich, z.B. $0 \leq \phi \leq \beta$, dann wird der Wert von α eine Funktion von β , der von den Randbedingungen abhängt. Wird längs der beiden radialen Strahlen $\phi = 0, \beta$ die Dirichletsche Randbedingung, $\psi = 0$, vorgeschrieben, dann folgt:

$$\phi = 0, \beta: \quad \psi \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \Phi \stackrel{!}{=} 0. \Rightarrow \Phi(\phi) = C \sin(n\phi/\beta), \quad n = 1.2. \dots \quad (6.88)$$

In den Radialfunktionen hat man dann auch $\alpha = n\pi/\beta$ zu setzen.

Potential und Feld eines homogen geladenen Teilchenstrahls

Die Ladungsdichte ist unabhängig von der longitudinalen Koordinate; das Problem ist also zweidimensional. Sie ist auch achsialsymmetrisch, d.i. unabhängig von ϕ ; so auch das Potential. Dieses wird durch die folgenden beiden Differentialgleichungen bestimmt, die sich aus (6.85) für $\alpha = 0$ ergeben. Im Inneren des Strahles ist dies die Poissongleichung (1.4), im Äußeren die Potentialgleichung. Am Rand des Strahles, also bei $r = R$ müssen das Potential und seine Ableitung (also das radiale elektrische Feld) stetig sein:

$$\frac{d^2 U_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_i}{dr} = -\rho_0/\varepsilon_0, \quad 0 \leq r < R : U_i = \text{endlich}; \quad (6.89)$$

$$\frac{d^2 U_e}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU_e}{dr} = 0, \quad R < r < \infty : \lim_{r \rightarrow \infty} U_e \sim \ln(r/R). \quad (6.90)$$

ρ_0 ist die konstante Ladungsdichte im Querschnitt. Bei einer Ladung oder Ladungsdichte im Zweidimensionalen kann das Potential im Unendlichen nicht Null sein; es muss sich wie $\ln r$ verhalten; damit das Argument dimensionslos ist, wurde es als r/R gewählt. Im Strahl besteht die Lösung von (6.89) aus einer partikulären (U_p) der inhomogenen und der regulären allgemeinen Lösung ($U_a = c_0 = \text{const.}$) der homogenen Gleichung:

$$\begin{aligned} U_i &= U_p + U_a = -\frac{r^2}{4} \rho_0/\varepsilon_0 + c_0. \\ U_e &= d_0 \ln(r/R). \end{aligned} \quad (6.91)$$

Die partikuläre Lösung findet man, indem man den Ansatz $c r^2$ in (6.89) einsetzt. Das gibt dann $4c = -\rho_0/\varepsilon_0$. Am Rand des Strahls, also auf dem Kreis $r = R$, müssen das Potential und das Feld stetig sein. Dies gibt ein System von zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten c_0 und d_0 :

$$\begin{aligned} r = R : \quad U_e = d_0 \ln(R/R) = 0 = c_0 - \frac{1}{4\varepsilon_0} \rho_0 R^2 = U_i &\Rightarrow c_0 = \rho_0 R^2/4\varepsilon_0. \\ U_e' = d_0 \frac{1}{R} = -\rho_0 R/2\varepsilon_0 = U_i' &\Rightarrow d_0 = -\rho_0 R^2/2\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Das Potential und die radiale elektrische Feldstärke im Inneren und Äußeren des runden homogenen Strahls sind also:

$$U_i = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{4} (R^2 - r^2), \quad E_i = -\frac{\partial U_i}{\partial r} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{r}{2}; \quad (6.92)$$

$$U_e = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{2} \ln(r/R), \quad E_e = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{2r}. \quad (6.93)$$

Für die Lösungen der **Helmholtzgleichung**

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0$$

kann der gleiche Separationsansatz wie oben herangezogen werden. Es ergeben sich auch die gleichen Lösungen für den Winkelanteil $\Phi(\phi)$. Für die Radialfunktionen ergibt sich die folgende Differentialgleichung, deren Lösungen durch Besselfunktionen ausgedrückt werden können:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\alpha^2}{r^2}\right) R = 0, \quad R(r) = A J_\alpha(kr) + B Y_\alpha(kr). \quad (6.94)$$

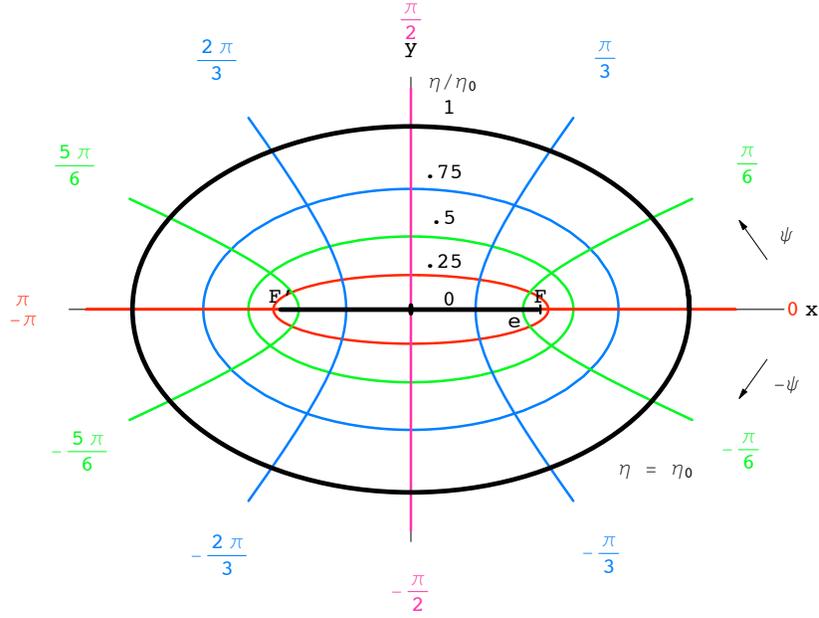


Abbildung 6.3: Ebene elliptische Koordinaten η, ψ . Die Brennpunkte F und F' liegen bei $(\pm e, 0)$

6.5.4 Ebene elliptische Koordinaten η, ψ , (MS Fig.1.03)

Die Abbildungsfunktion:

$$\begin{aligned} w &= \psi + i\eta = f(z) = \operatorname{Arcosh}(z/e) = \operatorname{Arcosh}\left(\frac{x + iy}{e}\right), \\ z &= f^{-1}(w) = e \cosh(w) = e \cosh(\psi + i\eta). \end{aligned} \quad (6.95)$$

gibt folgende Koordinatentransformationen:

$$\begin{aligned} x &= e \cosh \eta \cos \psi, & \eta &= \operatorname{Re} \left[\operatorname{Arcosh} \left(\frac{x + iy}{e} \right) \right], & 0 &\leq \eta \leq \infty, \\ y &= e \sinh \eta \sin \psi, & \eta &= \operatorname{Im} \left[\operatorname{Arcosh} \left(\frac{x + iy}{e} \right) \right], & 0 &\leq \psi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (6.96)$$

e ist eine fest vorgegebener positiver Parameter. Die Punkte $(\pm e, 0)$ sind die gemeinsamen Brennpunkte F und F' aller Koordinatenkurven. Diesen entsprechen die Werte $\eta = 0$, $\psi = 0$ oder $\pm\pi$. Die Koordinatenkurven sind einerseits **Ellipsen**

$$\left(\frac{x}{e \cosh \eta_0} \right)^2 + \left(\frac{y}{e \sinh \eta_0} \right)^2 = 1, \quad (6.97)$$

deren Größe durch den Parameter η_0 bestimmt wird; andererseits **Hyperbeln**:

$$\left(\frac{x}{e \cos \psi_0} \right)^2 - \left(\frac{y}{e \sin \psi_0} \right)^2 = 1, \quad (6.98)$$

deren Größe durch den Parameter ψ_0 bestimmt wird.

Die obige konforme Abbildung (6.95) führt also zu einer unendlichen Schar von Systemen, die durch e , die gemeinsame Exzentrizität e aller Ellipsen und Hyperbeln, parametrisiert sind. Im konkreten Fall ergibt sich ein Wert für e aus den Abmessungen des elliptischen oder hyperbolischen Randes. Dies wird weiter unten am Beispiel eines homogen geladenen Strahls von gegebenen elliptischen Querschnitt gezeigt.

Das Bogenelement, die metrischen Koeffizienten und das Flächenelement sind;

$$\begin{aligned} dz &= dx + i dy = \frac{dz}{dw} dw. \\ ds^2 &= (dx + i dy)(dx - i dy) = dz dz^* = \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 dw dw^* = \\ &= e^2 (\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi)(d\eta^2 + d\psi^2); \quad h_\eta^2 = h_\psi^2 = e^2(\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi); \\ d\mathcal{F} &= e^2 (\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi) d\eta d\psi. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Die metrischen Koeffizienten nehmen in den Brennpunkten den Wert Null an. Die Basisvektoren sind:

$$e_\eta = \vec{\tau}_\eta h_\eta = \quad (6.100)$$

$$e_\psi = \vec{\tau}_\psi h_\psi = \quad (6.101)$$

Die Operatoren der Vektoranalysis werden später bei den elliptischen Zylinderkoordinaten angegeben. Im **Laplaceoperator**

$$\Delta\Phi = \frac{1}{h_\eta h_\psi} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} \right] = \frac{1}{e^2 (\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi)} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} \right] \quad (6.102)$$

stehen die metrischen Koeffizienten im Nenner. Letztere nehmen in den Brennpunkten F und F' , $\eta = 0$, $\psi = 0$ oder $\psi = \pm\pi$, den Wert Null an. Der Laplaceoperator ist also in F und F' singular. Multipliziert man die metrischen Koeffizienten weg, dann kann man in der so modifizierten **Potentialgleichung** die Variablen

$$h_\eta h_\psi \Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} = 0,$$

durch den Separationsansatz $\Phi = H(\eta) \Psi(\psi)$ trennen; es ergeben sich folgende gewöhnliche Differentialgleichungen mit den angegebenen Lösungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H}{d\eta^2} - \alpha^2 H &= 0, \quad H(\eta) = A e^{\alpha \eta} + B e^{-\alpha \eta}; \quad \alpha \neq 0. \\ \frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} + \alpha^2 \Psi &= 0, \quad \Psi(\psi) = C \cos(\alpha \psi) + D \sin(\alpha \psi). \end{aligned} \quad (6.103)$$

Der Wert der Separationskonstante folgt aus den Rand- bzw. Periodizitätsbedingungen. Z.B.: Umfasst der Bereich des Problems den vollen Umfang der Ellipse, d.i. $0 \leq \psi \leq 2\pi$, dann muss wieder $\alpha = m$, $m = 0, 1, 2, \dots$ gelten; dabei vereinfachen sich die Gleichung und Lösung für die "Radialfunktion" $H(\eta)$. Wie in Kap.10 gezeigt werden wird, geben in Bereich, der den Ursprung und die Brennpunkte F und F' einschließt die folgenden Funktionen ein vollständiges System der Potentialgleichung:

$$\begin{aligned} m = 0 : \quad cp_0(\eta, \psi) &\equiv 1/2; \\ m > 0 : \quad cp_m(\eta, \psi) &= \cosh(m\eta) \cos(m\psi), \quad sp_m(\eta, \psi) = \sinh(m\eta) \sin(m\psi). \end{aligned} \quad (6.104)$$

Es werden also keine gemischten Produkte der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen wie $\cosh(m\eta) \sin(m\psi)$ oder $\sinh(m\eta) \cos(m\psi)$ benötigt. Im Unendlichen muss sich die Lösung proportional zu η sein. Denn für große Werte von η gilt:

$$\begin{aligned} 1 \ll \eta &\Rightarrow e^{-\eta} \ll e^\eta, \quad x \approx \frac{e}{2} e^\eta \cos \psi, \quad y \approx \frac{e}{2} e^\eta \sin \psi; \\ r^2 = x^2 + y^2 &\approx \frac{e^2}{4} e^{2\eta}; \quad \eta \approx \ln \frac{2r}{e}. \end{aligned} \quad (6.105)$$

Somit gibt also η im Unendlichen das gleiche Verhalten des zweidimensionalen Potentials wie in Polarkoordinaten, Gl.(6.90)

Potential und Feld eines homogen geladenen elliptischen Teilchenstrahls

Die Halbachsen der Ellipse des Querschnitts sind a , $\cos\psi = 0$, und $b < a$, $\sin\psi = 0$. Diesem Rand entsprechen die Excentrizität $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ und der Wert η_0 der Variablen η gemäß :

$$a = e \cosh \eta_0, \quad b = e \sinh \eta_0; \quad \frac{a-b}{a+b} = e^{-2\eta_0}. \quad (6.106)$$

Die konstante Ladungsdichte im Querschnitt ist ρ_0 . Die Potentiale U_i im Innern und U_e im Äußeren genügen folgenden Differentialgleichungen:

$$\Delta U_i = -\rho_0/\varepsilon_0, \quad 0 \leq \eta < \eta_0; \quad \Delta U_e = 0, \quad \eta_0 < \eta < \infty.$$

Diese beiden Differentialgleichungen werden ausgeschrieben als:

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial \psi^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} e^2 (\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi), \quad \frac{\partial^2 U_e}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U_e}{\partial \psi^2} = 0. \quad (6.107)$$

Eine partikuläre Lösung der ersten ist:

$$U_p = c [\cosh(2\eta) + \cos(2\psi)], \quad \text{mit } c = -\rho_0 e^2 / (8 \varepsilon_0).$$

Beide Differentialgleichungen sind invariant gegenüber den Spiegelungen $\eta \rightarrow -\eta$, $\psi \rightarrow -\psi$. Daher werden Lösungen des Typs sp_m nicht benötigt; von den verbleibenden nur die mit $2n$. Die allgemeinen Lösungen der homogenen Differentialgleichungen sind dann:

$$U_i(\eta, \psi) = U_p + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \cosh(2n\eta) \cos(2n\psi),$$

$$U_e(\eta, \psi) = b_0 \eta + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} e^{-2n\eta} \cos(2n\psi).$$

U_e muss den Term $b_0 \eta$ enthalten, damit es das richtige asymptotische Verhalten bekommt. Am Rand $\eta = \eta_0$ müssen die Potentiale und ihre Ableitungen stetig sein:

$$\eta = \eta_0 : \quad U_i = U_e, \quad \frac{\partial U_i}{\partial \eta} = \frac{\partial U_e}{\partial \eta}.$$

Das gibt gerade soviel Gleichungen wie Unbekannte. Deren Lösung ergibt: $a_{2n} = b_{2n} = 0$, $n > 1$. Die restlichen Koeffizienten geben folgende Lösungen:

$$U_i = c \cosh(2n\eta) + c \cos(2n\psi) - c e^{-2\eta} \cosh(2\eta) \cos(2\psi) + c_1, \quad (6.108)$$

$$c_1 = 2 c \eta_0 \sinh(2\eta_0) - c \cosh(2\eta_0); \quad (6.109)$$

$$U_e = 2 c \eta \sinh(2\eta_0) + c \sinh(2\eta_0) e^{-2\eta} \cos(2\psi). \quad (6.110)$$

$$U_i = -\frac{1}{4\varepsilon_0} \rho_0 \left[x^2 + y^2 - \frac{a-b}{a+b} (x^2 - y^2) \right] + c_2. \quad (6.111)$$

Um den letzten Ausdruck zu erhalten, kehrten wir von den elliptischen Koordinaten zurück zu den kartesischen. Man sieht, dass die Feldstärke, die auf ein geladenes Teilchen im Inneren des Strahles wirkt, linear in x und linear in y ist. - Details der Rechnungen findet man in dem Notebook: AnMe6HomEllBeam.pdf .

[1] I, Kapchinsky: Resonant linear accelerators. Übers. a.d. Russ. v. S.J. Amarety, Harwood, 1985.

Trennt man die Variablen der **Helmholtzgleichung**

$$h_\eta h_\psi \Delta \Phi + h_\eta h_\psi k^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} + h_\eta h_\psi k^2 \Phi = 0, \quad (6.112)$$

durch den Separationsansatz $\Phi = H(\eta) \Psi(\psi)$, ergeben sich folgende gewöhnliche Differentialgleichungen ($\kappa := k e$) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H}{d\eta^2} - \alpha^2 H + \kappa^2 \cosh^2 \eta H &= 0, \\ \frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} + \alpha^2 \Psi - \kappa^2 \cos^2 \psi \Psi &= 0. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen werden nun die Quadrate $\cos^2 \psi$ und $\cosh^2 \eta$ durch Additionstheorem umgerechnet auf Funktionen mit dem doppelten Winkel und folgende neue Konstanten eingeführt $2q := \kappa^2/2$, $a := \alpha^2 - \kappa^2/2$:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} + \left(a - 2 q \cos(2\psi) \right) \Psi = 0. \quad (6.113)$$

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} - \left(a - 2 q \cosh(2\eta) \right) H = 0. \quad (6.114)$$

Gl.(6.113) heißt die Mathieusche Differentialgleichung; Gl.(6.114) die modifizierte Mathieusche Differentialgleichung. Die Theorie dieser Gleichungen und ihrer Lösungen ist komplizierter als die der Besselschen Funktionen. Sie wird in Kap.26 behandelt werden, in dem periodische Differentialgleichungen untersucht werden. Umfasst der Bereich des Problems den vollen Umfang der Ellipse, d.i. $0 \leq \psi \leq 2\pi$, dann muss a aus einer komplizierten transzendenten Gleichung berechnet werden, die aus der ersten der beiden obigen Gleichungen folgt. Das bedeutet, dass in diesen Koordinaten die Separationskonste α nicht so einfach bestimmt werden kann wie bei einem kreisförmigen oder einem sphärischen Problem in ebenen Polarkoordinaten bzw. Kugelkoordinaten.

6.5.5 Ebene Bipolarkoordinaten η, θ

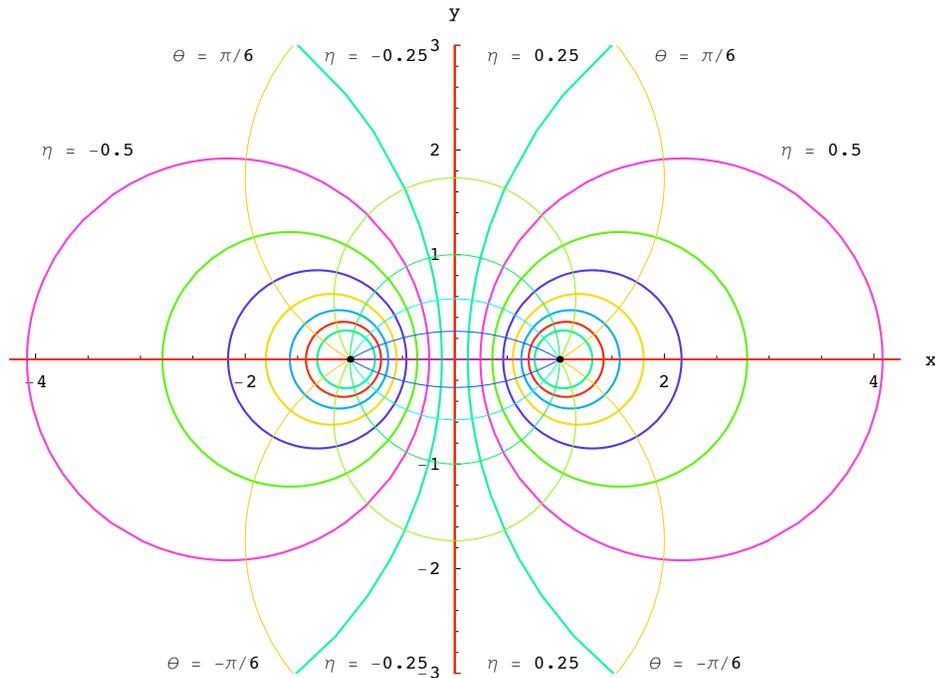


Abbildung 6.4: $\eta = -\infty(+\infty)$ gibt die Pole $-a(+a)$. $\eta = \text{const.}$ gibt Kreise um diese. Hier mit $\eta \in [-2, 2]$ mit Schrittweite $\Delta\eta = 0.25$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. $\theta = \text{const.}$, mit $\eta \in [-\infty, \infty]$ Kreise durch die Pole. Hier $\theta \in [-\pi, \pi]$ mit $\Delta\theta = \pi/6$. $\eta = 0$ gibt die y -Achse. $\theta = \pm\pi \Leftrightarrow y = 0, x \in [-1, 1]$; $\theta = 0 \Leftrightarrow x \in [1, \infty, -\infty, -1]$.

Die Abbildungsfunktion:

$$w = \eta + i\theta = f(z) = 2 \operatorname{Arcoth}(z/a)^* = 2 \operatorname{Arcoth}\left(\frac{x + iy}{a}\right)^*, \quad (6.115)$$

$$z = f^{-1}(w) = a \operatorname{coth}(w/2)^* = a \operatorname{coth}[(\psi + i\theta)/2]^*. \quad (6.116)$$

gibt folgende Koordinatentransformationen:

$$x = a \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \theta}, \quad \eta = 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{Arcoth} \left(\frac{x+iy}{a} \right) \right], \quad -\infty \leq \eta \leq \infty \quad (6.117)$$

$$y = a \frac{\sin \theta}{\cosh \eta - \cos \theta}, \quad \theta = -2 \operatorname{Im} \left[\operatorname{Arcoth} \left(\frac{x+iy}{a} \right) \right], \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (6.118)$$

a ist eine fest vorgegebener positiver Parameter. Die Punkte $(\pm a, 0)$ heißen die Pole des Koordinatensystems. Die Koordinatenkurven sind allesamt Kreise, s. Abb.6.4.

Die Kurven $\eta_0 = \text{const.}$ bilden Kreise um die Pole, deren Mittelpunkte aber nicht mit den Polen zusammenfallen:

$$x^2 + (y - a \operatorname{coth} \eta_0)^2 = \frac{a^2}{\sinh^2 \eta_0}.$$

Die Kurven $\theta_0 = \text{const.}$ sind Kreise durch die Pole,

$$x^2 - 2a x \cot \theta_0 = a^2.$$

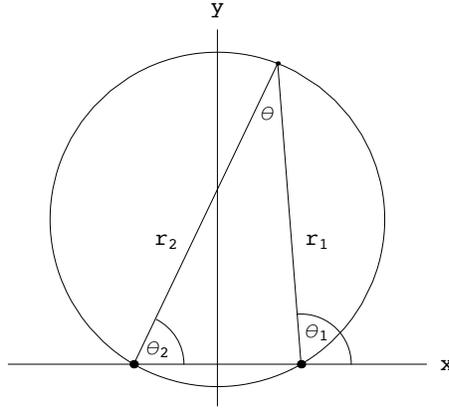


Abbildung 6.5: Die Bipolarkoordinaten $\eta = \ln(r_2/r_1)$ und θ

Der Parameter η bestimmt das Verhältnis der beiden Strecken $r_1 = |z_1|$ und $r_2 = |z_2|$ von den Polen zum Aufpunkt $z = x + iy$. Die Strecke der Länge $2a$ erscheint vom Aufpunkt aus gesehen unter dem Winkel θ , s. Abb.6.5. Denn die obige konforme Abbildung (6.115) gibt:

$$\begin{aligned}
 w^* &= \eta - i\theta = 2 \operatorname{Arcosh}(z/a) = \ln \left[\frac{z/a + 1}{z/a - 1} \right] = \\
 &= \ln \left| \frac{z + a}{z - a} \right| + i \arg \left(\frac{z + a}{z - a} \right); \\
 e^\eta &= |z_2|/|z_1|, \quad z_1 = z - a, \quad z_2 = z + a, \\
 -\arg \left(\frac{z + a}{z - a} \right) &= \arg(z_2) - \arg(z_1) = \theta_2 - \theta_1 = \theta.
 \end{aligned}$$

Die freie Wahl von a gibt eine unendliche Schar von Systemen. Ein bestimmtes wird durch den Wert von a ausgewählt. Im konkreten Fall bestimmt man a so, dass eine der Koordinatenkurven (für einen vorgewählten Wert η_0 oder θ_0) mit dem Rand des gegebenen Bereichs zusammenfällt. Das Bogenelement, die metrischen Koeffizienten und das Flächenelement sind;

$$\begin{aligned}
 dz &= dx + i dy = \frac{dz}{dw} dw. \\
 ds^2 &= (dx + i dy)(dx - i dy) = dz dz^* = \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 dw dw^* = \\
 &= \frac{a^2}{(\cosh \eta - \cos \theta)^2} (d\eta^2 + d\theta^2); \quad h_\eta^2 = h_\theta^2 = \frac{a^2}{(\cosh \eta - \cos \theta)^2}; \\
 d\mathcal{F} &= \frac{a^2}{(\cosh \eta - \cos \theta)^2} d\eta d\theta.
 \end{aligned} \tag{6.119}$$

Die Basisvektoren sind:

$$e_\eta = \vec{\tau}_\eta h_\eta = \tag{6.120}$$

$$e_\theta = \vec{\tau}_\theta h_\theta = \tag{6.121}$$

Die Operatoren der Vektoranalysis werden später bei den bisphärischen Koordinaten angegeben. Die **Potentialgleichung**

$$\Delta\Phi = \frac{(\cosh \eta - \cos \theta)^3}{a^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\cosh \eta - \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{\cosh \eta - \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \tag{6.122}$$

ist nicht separabel, aber R-separabel; d.h. man kann folgenden Ansatz machen:

$$\Phi(\eta, \theta) = (\cosh \eta - \cos \theta)^{1/2} H(\eta) \Theta(\theta) \quad (6.123)$$

Setzt man diesen ein und formt noch weiter um, erhält man folgenden Ausdruck, indem die Variablen separiert sind:

$$\frac{\coth(\eta)H'(\eta)}{H(\eta)} + \frac{H''(\eta)}{H(\eta)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{1}{4} = 0.$$

Mit der Separationskonstanten $\alpha = m^2$ lauten die gewöhnlichen Differentialgleichungen für die oben eingeführten Funktionen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H}{d\eta^2} + \coth \eta \frac{dH}{d\eta} + \left(\frac{1}{4} - \alpha \right) H &= 0, \\ \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \alpha \Theta &= 0. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von $\Theta(\theta)$ für den vollen Bereich $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ist dann (mit $\alpha = m^2$):

$$\Theta(\theta) = C \cos(m \theta) + D \sin(m \theta), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (6.124)$$

. Die Substitution $\xi := \cosh \eta$ führt zu folgender Form des "Radialanteils":

$$(\xi^2 - 1) \frac{d^2 H}{d\xi^2} + 2 \xi \frac{dH}{d\xi} - \left(m^2 - \frac{1}{4} \right) H = 0 \quad (6.125)$$

$$H = A \mathcal{P}_{m-1/2}(\cosh \eta) + B \mathcal{Q}_{m-1/2}(\cosh \eta). \quad (6.126)$$

$\mathcal{P}_{m-1/2}(\cosh \eta)$ und $\mathcal{Q}_{m-1/2}(\cosh \eta)$ sind verallgemeinerte Legendrefunktionen. Für diese kursieren zahlreiche verschiedene Definitionen.

6.5.6 Ebene parabolische Koordinaten μ, ν , (MS Fig.1.04)

Die Abbildungsfunktion ist:

$$w = \mu + i \nu = \sqrt{2z} = \sqrt{2(x + i y)}, \quad z = x + i y = \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2). \quad (6.127)$$

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt{\rho + x}, & x &= \mu^2 - \nu^2, & 0 &\leq \mu \leq \infty; \\ \nu &= \sqrt{\rho - x}, & y &= \mu \nu, & -\infty &\leq \nu \leq \infty; \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (6.128)$$

Koordinatenkurven sind nach links offene Parabeln ($-\infty \leq x \leq \mu_0^2/2$):

$$y^2 = \mu_0^2 (\mu_0^2 - 2x), \quad \mu_0 = \text{const.};$$

und nach rechts offene Parabeln ($\infty \geq y \geq -\nu_0^2/2$):

$$y^2 = \nu_0^2 (\nu_0^2 + 2x), \quad \nu_0 = \text{const.};$$

Das Bogenelement, die metrischen Koeffizienten und das Flächenelement sind;

$$ds^2 = (\mu^2 + \nu^2) (d\mu^2 + d\nu^2); \quad h_\mu = h_\nu = \mu^2 + \nu^2; \quad d\mathcal{F} = (\mu^2 + \nu^2) d\mu d\nu. \quad (6.129)$$

Die normierten Basisvektoren sind gemäß Gl.(6.33):

$$\vec{e}_\mu = \vec{\mu}_r / h_\mu = \quad (6.130)$$

$$\vec{e}_\nu = \vec{\nu}_r / h_\nu = \quad (6.131)$$

Die Ausdrücke für die Operatoren der Vektoranalysis werden in dem Paragraphen für die parabolischen Zylinderkoordinaten angegeben.

Trennt man die Variablen der **Potentialgleichung**

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2} \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2} \right] = 0, \quad (6.132)$$

durch den Separationsansatz $\Phi = M(\mu) N(\nu)$, ergeben sich folgende gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2M}{d\mu^2} - \alpha M = 0, \quad (6.133)$$

$$\frac{d^2N}{d\nu^2} + \alpha N = 0. \quad (6.134)$$

Mit der Separationskonstante $\alpha = p^2$ gibt das die Lösungen

$$M = A e^{p\mu} + B e^{-p\mu}, \quad N = C \sin(p\nu) + D \cos(p\nu); \quad (6.135)$$

mit der Separationskonstante $\alpha = -p^2$ die Lösungen

$$M = A \sin(p\mu) + B \cos(p\mu), \quad N = C e^{p\nu} + D e^{-p\nu}. \quad (6.136)$$

Für die Lösungen der **Helmholtzgleichung**

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0$$

kann der gleiche Separationsansatz wie oben herangezogen werden. Dies gibt folgende gewöhnlichen Differentialgleichungen mit der Separationskonstante α

$$\frac{d^2M}{d\mu^2} - (\alpha - k^2\mu^2)M = 0, \quad (6.137)$$

$$\frac{d^2N}{d\nu^2} + (\alpha + k^2\nu^2)N = 0. \quad (6.138)$$

Deren Lösungen sind aber kompliziertere spezielle Funktionen.

6.5.7 Exzentrische ebene Polarkoordinaten ρ, θ

$$x = R - \rho \cos\theta := R h, \quad 0 \leq \rho \leq a < R; \quad (6.139)$$

$$y = \rho \sin\theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (6.140)$$

R ist eine Konstante; $M = (R, 0)$ ist der Mittelpunkt dieses Systems. ρ heißt der Quasiradius, θ die poloidale Koordinate. Dieses System ist nur sinnvoll, solange $h = 1 - \rho/R \cos\theta > 0$ ist. Deswegen wird der Gültigkeitsbereich auf die volle Kreisscheibe vom Radius $a < R$ mit dem Mittelpunkt M eingeschränkt. Die Koordinatenlinien sind konzentrische Kreise vom Radius $R - \rho$ um M , bzw. radiale Strahlen der Länge $2a$ durch M . Die räumliche Version dieser Koordinaten liefert die "lokalen Toruskoordinaten", 6.7.7. Diese orthogonalen Koordinaten findet man nicht in den üblichen Werken für krummlinige orthogonale Koordinatensysteme, sondern nur in Spezialwerken, die sich mit der Wellenleitung in gekrümmten Röhren befassen.

Das Bogenelement, die metrischen Koeffizienten und das Flächenelement sind:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2; \quad h_\rho = 1, \quad h_\theta = \rho; \quad d\mathcal{F} = \rho d\rho d\theta. \quad (6.141)$$

Die Operatoren der Vektoranalysis werden bei den lokalen Toruskoordinaten angegeben. In diesen Koordinaten ist weder die Laplace- noch die Helmholtzgleichung separabel. Doch eignet sich das System für Näherungsrechnungen oft besser als die Toruskoordinaten.

6.6 Zylindrische dreidimensionale orthogonale Koordinatensysteme

Jedes ebene (also zweidimensionale) Koordinatensystem läßt sich durch Hinzufügen einer weiteren kartesischen Koordinate zu einem dreidimensionalen zylindrischen Koordinatensystem erweitern. Diese Koordinate wird hier auch mit dem Buchstaben z bezeichnet; sollte aber nicht mit der komplexen Koordinate $z = x + iy$, die wir bei der Behandlung der ebene Systeme, insbesondere bei der konformen Abbildung, verwendet haben, verwechselt werden.

6.6.1 Dreidimensionale kartesische Koordinaten x, y, z , (MS Fig.1.01)

Die Koordinaten und ihre Bereiche sind:

$$\begin{aligned} u^1 &= x, & -\infty < x < \infty, \\ u^2 &= y, & -\infty < y < \infty, \\ u^3 &= z, & -\infty < z < \infty. \end{aligned} \quad (6.142)$$

Die Koordinatenlinien sind Gerade; die Koordinatenflächen drei Scharen paralleler Ebenen. Das Bogenelement und die metrischen Koeffizienten sind:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2; \quad h_x = h_y = h_z = 1. \quad (6.143)$$

Die Operatoren der Vektoranalysis sind:

$$\text{grad}\Psi = \vec{e}_x \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial\Psi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad (6.144)$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (6.145)$$

$$\text{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \quad (6.146)$$

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}. \quad (6.147)$$

Der Separationsansatz $\Psi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$ führt bei der Potentialgleichung $\Delta\Psi = 0$ zu dem folgenden System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - (\alpha + \beta)X = 0, \quad (6.148)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha Y = 0, \quad (6.149)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \beta Z = 0; \quad (6.150)$$

bei der Helmholtzgleichung $\Delta\Psi + k^2 = 0$ zu dem folgenden System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - (\alpha + \beta)X = 0, \quad (6.151)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \alpha Y = 0, \quad (6.152)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + (k^2 + \beta)Z = 0; \quad (6.153)$$

6.6.2 Kreiszyklrische Koordinaten r, ϕ, z , (MS Fig.1.02)

$$u^1 = r, \quad 0 \leq r < \infty, \quad x = r \cos \phi, \quad (6.154)$$

$$u^2 = \phi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad y = r \sin \phi, \quad (6.155)$$

$$u^3 = z, \quad -\infty < z < \infty, \quad z = z. \quad (6.156)$$

Koordinatenlinien sind Kreise, radiale Halbstrahlen und Gerade in Richtung der z -Achse. Koordinatenflächen sind Kreiszyklinder, Halbebenen durch und Ebenen senkrecht zur z -Achse. Das Bogenelement und die metrischen Koeffizienten sind:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r d\phi)^2 + (dz)^2; \quad h_r = h_z = 1, \quad h_\phi = r. \quad (6.157)$$

Die Operatoren der Vektoranalysis sind:

$$\text{grad}\Psi = \vec{e}_r \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi} + \vec{e}_z \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad (6.158)$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (6.159)$$

$$\text{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & A_\phi & A_z \end{vmatrix}, \quad (6.160)$$

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}. \quad (6.161)$$

Der Separationsansatz $\Psi(r, \phi, z) = R(r) \Phi(\phi) Z(z)$ führt bei der Potentialgleichung $\Delta\Psi = 0$ zu dem folgenden System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left(\frac{\alpha}{r^2} + \beta \right) R = 0, \quad (6.162)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \alpha \Phi = 0, \quad (6.163)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \beta Z = 0; \quad (6.164)$$

bei der Helmholtzgleichung $\Delta\Psi + k^2 = 0$ zu dem folgenden System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left(\frac{\alpha}{r^2} + \beta \right) R = 0, \quad (6.165)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \alpha \Phi = 0, \quad (6.166)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + (k^2 + \beta) Z = 0; \quad (6.167)$$

6.6.3 Elliptische Zylinderkoordinaten η, ψ, z , (MS Fig.1.03)

$$u^1 = \eta, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad x = e \cosh \eta \cos \phi, \quad (6.168)$$

$$u^2 = \psi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad y = e \sinh \eta \sin \phi, \quad (6.169)$$

$$u^3 = z, \quad -\infty < z < \infty, \quad z = z. \quad (6.170)$$

Die Koordinatenflächen sind elliptische Zylinder, hyperbolische Zylinder, deren Erzeugende parallel zur z -Achse sind; und parallele Ebenen senkrecht zur z -Achse. Die metrischen Koeffizienten sind:

$$h_\eta^2 = h_\psi^2 = e^2 (\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi), \quad h_z = 1. \quad (6.171)$$

Das Bogenelement ist:

$$(ds)^2 = e^2 (\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi) [(d\eta)^2 + (d\psi)^2] + (dz)^2. \quad (6.172)$$

Die Operatoren der Vektoranalysis sind:

$$\text{grad}\Psi = \frac{1}{e [(\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi)]^{1/2}} \left[\vec{e}_\eta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \vec{e}_\psi \frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \right] + \vec{e}_z \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (6.173)$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{e [(\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi)]^{1/2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} [(\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi)]^{1/2} A_\eta \right. \quad (6.174)$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \psi} [(\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi)]^{1/2} A_\psi \right\} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (6.175)$$

$$\text{rot}\vec{A} = \frac{1}{(\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi)^{1/2}} \times \begin{vmatrix} [(\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi)]^{1/2} \vec{e}_\eta & [(\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi)]^{1/2} \vec{e}_\psi & \vec{e}_z/e \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \psi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ [(\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi)]^{1/2} A_\eta & [(\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi)]^{1/2} A_\psi & A_z/e \end{vmatrix}, \quad (6.176)$$

$$\Delta\Psi = \frac{1}{e^2 (\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi)} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} \right] + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \quad (6.177)$$

6.6.4 Parabolische Zylinderkoordinaten μ, ν, z , (MS Fig.1.04)

$$\begin{aligned} u^1 &= \mu, & x &= \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2), & 0 &\leq \mu < \infty, \\ u^2 &= \nu, & y &= \mu \nu, & -\infty &< \nu < \infty, \\ u^3 &= z; & z &= z; & -\infty &< z < \infty, \end{aligned} \quad (6.178)$$

Metric coefficients:

$$h_\mu^2 = h_\nu^2 = \mu^2 + \nu^2, \quad h_z = 1. \quad (6.179)$$

6.6.5 Zylindrische Bipolarkoordinaten η, θ, z

Dieses System erhält man aus den ebenen Bipolarkoordinaten (s.Abb. 6.4), indem man die kartesische Koordinate z als dritte Koordinate hinzufügt.

$$\begin{aligned} u^1 &= \eta, & x &= \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \theta}, & -\infty &< \eta < \infty, \\ u^2 &= \theta, & y &= \frac{\sin \theta}{\cosh \eta - \cos \theta}, & -\pi &\leq \theta \leq \pi, \\ u^3 &= z; & z &= z; & -\infty &< z < \infty, \end{aligned} \quad (6.180)$$

Die metrischen Koeffizienten sind:

$$h_\eta^2 = h_\theta^2 = \frac{a^2}{(\cosh \eta - \cos \theta)^2}, \quad h_z = 1. \quad (6.181)$$

6.7 Achsialsymmetrische dreidimensionale orthogonale Koordinatensysteme

6.7.1 Kugelkoordinaten r, θ, ϕ , (MS Fig. 1.05)

Kugelkoordinaten entstehen aus den ebenen Polarkoordinaten r, ϕ , indem man dieses System um die y -Achse rotieren läßt. Dabei wird diese Achse zur z -Achse des dreidimensionalen Systems. Der ebene Polarwinkel ϕ wird zum Polarwinkel θ . Der Azimuthwinkel des dreidimensionalen Systems wird nun mit ϕ bezeichnet.

6.7.2 Verlängerte rotationselliptische Koordinaten η, θ, ϕ , (MS Fig. 1.06)

Die verlängerten rotationselliptischen Koordinaten gehen aus den ebenen elliptischen Koordinaten (mit $a > b$) hervor, indem man das ebene System um die x -Achse rotieren läßt; diese wird damit zur neuen z -Achse. In der dazu senkrechten Ebene liegt das Azimuth ϕ .

6.7.3 Abgeplattete rotationselliptische Koordinaten η, θ, ϕ , (MS Fig. 1.07)

Die abgeplatteten rotationselliptischen Koordinaten gehen aus den ebenen elliptischen Koordinaten (mit $a > b$) hervor, indem man das ebene System um die y -Achse rotieren läßt; diese wird damit zur neuen z -Achse. In der dazu senkrechten Ebene liegt das Azimuth ϕ .

6.7.4 Rotationsparabolische Koordinaten μ, ν, ϕ , (MS Fig. 1.08)

Die rotationsparabolischen Koordinaten gehen aus den ebenen parabolischen Koordinaten hervor, indem man das ebene System um die y -Achse rotieren läßt; diese wird damit zur neuen z -Achse. In der dazu senkrechten Ebene liegt das Azimuth ϕ .

6.7.5 Bispärische Koordinaten η, θ, ϕ , (MS Fig. 4.03)

Die bispärischen Koordinaten gehen aus den ebenen Bipolarkoordinaten hervor, indem man das ebene System um die x -Achse rotieren läßt; diese wird damit zur neuen z -Achse. In der dazu senkrechten Ebene liegt das Azimuth ϕ .

6.7.6 Toruskoordinaten η, θ, ϕ , (MS Fig. 4.04)

Die Toruskoordinaten gehen aus den ebenen Bipolarkoordinaten hervor, indem man das ebene System um die y -Achse rotieren läßt; diese wird damit zur neuen z -Achse. In der dazu senkrechten Ebene liegt das Azimuth ϕ .

6.7.7 Lokale Toruskoordinaten ρ, θ, ϕ

Die lokalen Toruskoordinaten gehen aus den exzentrischen ebenen Polarkoordinaten hervor, indem man das ebene System um die y -Achse rotieren läßt; diese wird damit zur neuen z -Achse. In der dazu senkrechten Ebene liegt das Azimuth ϕ . Die Mittellinie des Torus, $\rho = 0$, ist ein Kreis vom Radius R in der x, y -Ebene, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt.

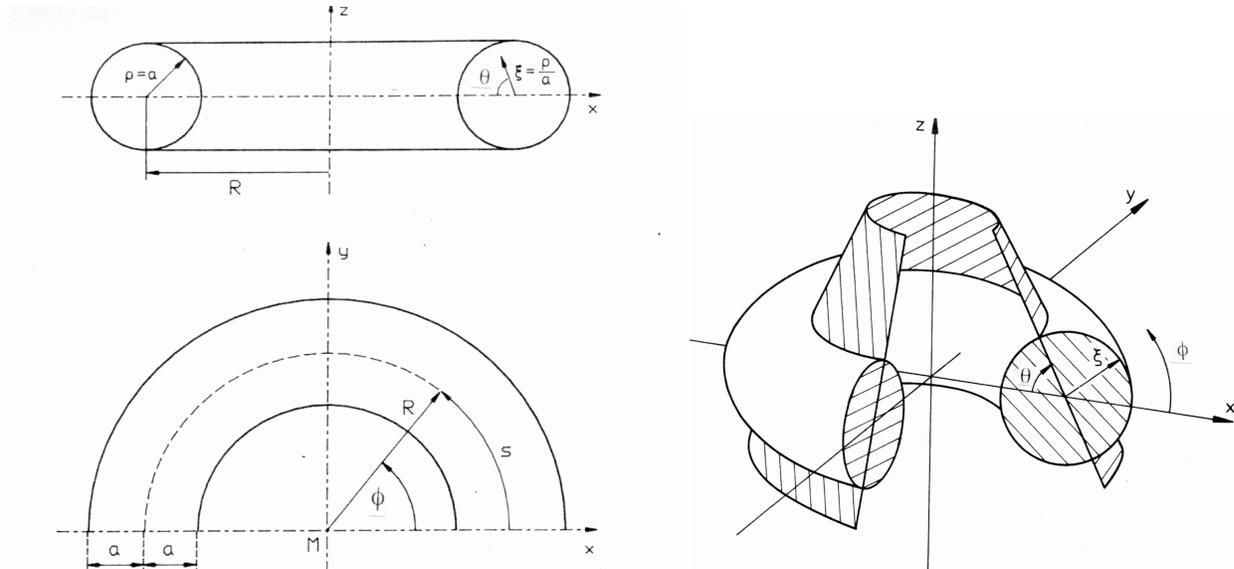


Abbildung 6.6: Lokale Toruskoordinaten ρ, θ, ϕ . Abbildung aus [Kark]

Die Beziehungen zwischen den kartesischen Koordinaten und den Toruskoordinaten sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} u^1 &= \rho = a \xi, & x &= h_\phi \cos \phi, & 0 &\leq \rho \leq a < R; \\ u^2 &= \theta, & y &= h_\phi \sin \phi, & -\pi &\leq \theta \leq \pi, \\ u^3 &= \phi; & z &= \rho \sin \theta; & 0 &\leq \phi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (6.182)$$

Statt des Azimuths ϕ verwendet man auch die Bogenlänge s längs der Mittellinie und den zugehörigen metrischen Koeffizienten h_s :

$$s := R \phi, \quad h_s = h_\phi \frac{d\phi}{ds} = h. \quad (6.183)$$

Man beachte, dass die hier verwendete Bogenlänge s längs der Mittenlinie von der allgemeinen Bogenlänge $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, die meist als ds bezeichnet wird, unterscheidet.

Die **metrischen Koeffizienten** sind:

$$h_\rho = 1, \quad h_\theta = \rho, \quad h_\phi = R - \rho \cos \theta := R h = R (1 - \delta \xi \cos \theta). \quad (6.184)$$

Daraus ergeben sich das Volumenelement gemäß Gl.(6.32) und das Flächenelement dA in der vertikalen (ρ, θ -Ebene):

$$\begin{aligned} dV &= h_\rho h_\theta h_\phi d\rho d\theta d\phi = \rho(R - \rho \cos \theta) d\rho d\theta d\phi = Ra^2 (1 - \delta \xi \cos \theta) \xi d\xi d\theta d\phi \\ &= dA \cdot ds_\phi = \rho d\rho d\theta \cdot (R - \rho \cos \theta) d\phi = a^2 \xi d\xi d\theta \cdot R h d\phi. \end{aligned} \quad (6.185)$$

Hier wurden drei dimensionslose Größen eingeführt, der dimensionslose metrische Koeffizient h , der relative Quasiradius ξ und das inverse Aspektverhältnis $\delta = \text{kleiner/großer Torusradius}$:

$$h := 1 - \delta \xi \cos \theta, \quad \xi := \rho/a \leq 1, \quad \delta := a/R < 1. \quad (6.186)$$

In den meisten Anwendungen ist δ klein gegen 1; dies ermöglicht Näherungen durch Reihenentwicklungen in δ , s.z.B. [LCK, Kark]. Für $\delta \rightarrow 0$ geht der Torus über in einen Zylinder. In Zylinderkoordinaten sind die Potential- und die Helmholtzgleichung separabel. Deswegen werden die lokalen Toruskoordinaten verwendet, obwohl in den lokalen Toruskoordinaten diese beiden Gleichungen nicht separabel sind.

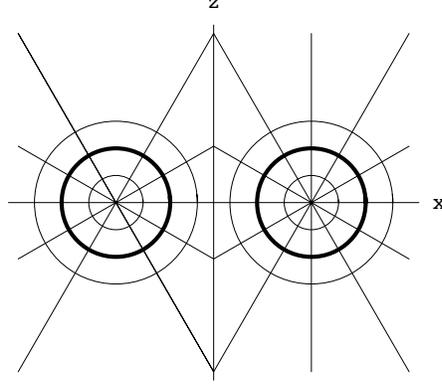


Abbildung 6.7: Lokale Toruskoordinaten sind singulär auf der z -Achse

Die lokalen Toruskoordinaten sind nur brauchbar im Inneren eines Torus mit $a < R$. Im Äußeren werden auf der z -Achse die obigen Transformationsgleichungen singulär, der metrische Koeffizient $h = 0$, daher auch die Operatoren der Vektoranalysis singulär. S. Abb.6.7. In der Plasmaphysik werden die lokalen Toruskoordinaten etwas anders definiert, nämlich mit $h = (1 + \delta \xi \cos \theta)$ s. [Plasmabook].

Es folgen die Operatoren der Vektoranalysis für die Variablen ρ, θ, s . Diese können aus den allgemeinen Formeln des §6.4 durch Einsetzen der oben angegebenen metrischen Koeffizienten berechnet werden. Der **Nablaoperator** ist:

$$\nabla := \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_s \frac{1}{1 - (\rho/R) \cos \theta} \frac{\partial}{\partial s}. \quad (6.187)$$

Der **Laplaceoperator** ist:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{R h} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \sin \theta \frac{\partial}{\rho \partial \theta} \right). \quad (6.188)$$

Die ersten drei Terme geben den Laplaceoperator der zweidimensionalen Polarkoordinaten ρ, θ . Im vierten Term kann s mit dem z der Zylinderkoordinaten in Verbindung gebracht werden. Doch der darin vorkommende metrische Koeffizient h^2 führt hier einen Unterschied herbei; der ist aber von der Größenordnung δ^2 . Der letzte Term ist von der Ordnung δ , ist also der niedrigste Term, der die Krümmung berücksichtigt. Der **Rotor** des Vektorfeldes

$$\vec{E} = \vec{e}_\rho E_\rho + \vec{e}_\theta E_\theta + \vec{e}_s E_s \quad (6.189)$$

ist:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \vec{e}_\rho \frac{1}{h} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (h E_s) - \frac{\partial}{\partial s} E_\theta \right] \\ &+ \vec{e}_\theta \frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial s} E_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} (h E_s) \right] \\ &+ \vec{e}_s \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} E_\rho \right]. \end{aligned} \quad (6.190)$$

Die **Divergenz** des gleichen Vektorfeldes ist:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{Rh} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho h E_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} (h E_\theta) + \frac{\partial}{\partial s} (\rho E_s) \right]. \quad (6.191)$$

6.8 Allgemeinere dreidimensionale orthogonale Koordinatensysteme

6.8.1 Elliptische Kegelkoordinaten r, θ, λ , (MS Fig. 1.09)

6.8.2 Paraboloidale Koordinaten μ, ν, λ , (MS Fig. 1.11)

6.8.3 Allgemeine elliptische Koordinaten μ, ν, λ , (MS Fig. 1.10)

6.9 n-dimensionale Kugelkoordinaten $r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \phi$

$$x_1 = r \cos \theta_1, \quad (6.192)$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad (6.193)$$

$$x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \quad (6.194)$$

$$\dots \quad (6.195)$$

$$x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \phi, \quad (6.196)$$

$$x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \phi. \quad (6.197)$$

Die Variablen haben folgende Bereiche:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi, \quad (6.198)$$

Die metrischen Koeffizienten sind:

$$h_r = 1, \quad h_{\theta_1} = r, \quad h_{\theta_2} = r \sin \theta_1, \quad h_{\theta_3} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad \dots, \quad h_{\theta_n} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}. \quad (6.199)$$

Der Laplaceoperator wird dann:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d\Phi}{dr} \right) + \dots \quad (6.200)$$

Hier wird nur der Radialanteil angegeben. Die Winkelanteile werden hier nicht angegeben, weil hier nur Fälle behandelt werden werden, in denen die Funktion Φ nur vom Radius r abhängt.

6.10 Spezielle Literatur

- [Pa] W. Papousek: Vektor-, Tensorrechnung II. Vorlesungsskriptum.
- [DHII] A. Duschek, A. Hochrainer: Tensorrechnung in analytischer Darstellung II, Springer 1961, §33.
- [Jo] G. Joos: Lehrbuch der Theoretischen Physik. Gest & Portig (1954). 1. Kapitel, §13.
- [Ma] E. Madelung: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Springer 1964; 7. u. 8. Abschnitt .
- [MS] P.E. Moon, D.E. Spencer: Field Theory Handbook. Springer 1988. .
- [AS] M. Abramowitz, I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions. Pb. Dover 1974. .
_ " _: Pocketbook of Mathematical Functions, Harry Deutsch, 1984, 468 Seiten, kartoniert, 24,80 Euro) .
- [GR] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Alan Jeffrey, Daniel Zwillinger: Table of Integrals, Series, and Products. Academic Press; 6 edition (2000). Hardcover: 1216 pages.
- [LCK] L. Lewin, D.C. Chang, E.F. Kuester: Electromagnetic Waves and Curved Structures. Peter Peregrinus LTD, Stevenage 1977.
- [Kark] K. W. Kark: Modenanalyse in toroidalen Taperhohlleitern. ntz Archiv **10** (1988) 3 - 11. - <http://www.hs-weingarten.de/~Kark/>
– : Theoretische Untersuchungen zur Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in schwach inhomogenen Hohlleitern. DFVLR-FB 87-23. Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt. Köln, 1987,
- [PlasmaPhysicsBook] W.D. D’haeseleer, W.N.G. Hitchon, J.D. Callen, J.L. Shohet, Flux coordinates and magnetic field structure. Springer, 1990. p.69f.