Kapitel 23

Greensche Tensoren für die Vektorhelmholtzgleichung

23.1 Greensche Tensoren für die Vektorhelmholtzgleichung im dreidimensionalen freien Raum

Die Vektorhelmholtzgleichung für ein Vektorfeld $\vec{A}$ lautet:

$$\vec{\Delta}\vec{A} \; + \; k^2 \; \vec{A} \; = \; \text{grad div}\vec{A} \; - \; \text{rot rot}\vec{A} \; + \; k^2 \; \vec{A} \; = \; \vec{j}. \tag{23.1}$$

Darin steht $\vec{j}$ für eine Quellverteilung. Die Lösung soll der Austrahlungsbedingung genügen. Die Gleichung für den zugehörigen Greenschen Tensor $\Gamma_H(\vec{r},\vec{r}')$

$$\vec{\Delta}\Gamma_H(\vec{r},\vec{r}') \; + \; \kappa^2 \; \Gamma_H(\vec{r},\vec{r}') \; = \; - \; I \; \delta(\vec{r} \; - \; \vec{r}'). \tag{23.2}$$

In Indexschreibweise lautet die obige Gleichung (der Index H wird hier weggelassen):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_s} \Gamma_{sj} \; - \; \varepsilon_{imn} \; \varepsilon_{nrs} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_r} \Gamma_{sj} \; + \; k^2 \; \Gamma_{ij} \; = \; - \; \delta_{ij} \; \delta(\vec{r} \; - \; \vec{r}').$$

Diese enthält auf der rechten Seite den Einheitstensor (auch die Einheitsdyade genannt) I:

$$I \; := \; \left(\delta_{i,j}\right) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23.3}$$

Die quellenmäßige Darstellung der Lösung der inhomogenen Gleichung (23.1) ist dann:

$$\vec{A}(\vec{r}) \; = \; \int \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int d\vec{r} \; \Gamma_H(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}'). \tag{23.4}$$

23.1.1 Operatordarstellung des Greenschen Tensors

Wir gehen mit dem Ansatz:

$$\Gamma_H(\vec{r}, \vec{r}') \; = \; I \; G(\vec{r}, \vec{r}'), \tag{23.5}$$

G eine skalare Funktion, in Gl.(23.2) ein und finden:

$$I \; \left[\Delta G \; + \; \kappa^2 \; G(\vec{r}, \vec{r}') \right] \; = \; - \; I \; \delta(\vec{r} \; - \; \vec{r}'). \tag{23.6}$$

Also: Der Greensche Tensor ist die Einheitstensor multipliziert mit der Greenschen Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ der skalaren Helmhotzgleichung. G muss die Ausstrahlungsbedingung erfüllen. Hiefür könnenwir eine beliebige Darstellung dieser Greenschen Funktion heranziehen, z.B. den geschlossenen Ausdruck:

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}') \; = \; \frac{1}{4\pi} \; \frac{1}{R} \; e^{i\kappa R}, \qquad R \; = \; |\vec{r} \; - \; \vec{r}')| \tag{23.7}$$

oder eine der Integralreihendarstellenungen, die in §15.2.1 abgeleitet worden sind; nur muss dort überall k durch κ ersetzt werden.

23.1.2 Eigenfunktionsentwicklung des Greenschen Tensors

In §21.2.3 wurde ein System von normierten Basisvektorfeldern berechnet (zur Erinnerung: das Dach ˆ auf den Symbolen kennzeichnet diese als normierte Vektoren):

$$\hat{L}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; := \; \vec{L}_{\vec{k}}(\vec{r})/k, \qquad \hat{M}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; := \; \vec{M}_{\vec{k}}(\vec{r})/k_\perp, \qquad \hat{N}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; := \; \vec{N}_{\vec{k}}(\vec{r})/kk_\perp. \tag{23.8}$$

Damit bilden wir eine vektorielle Vollständigkeitsrelation:

$$I \; \delta(\vec{r} \; - \; \vec{r}') \; = \; \int \int_{-\infty}^{\infty} \int d\vec{k} \left[\hat{L}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; \hat{L}_{\vec{k}}(\vec{r}') \; + \; \hat{M}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; \hat{M}_{\vec{k}}(\vec{r}') \; + \; \hat{N}_{\vec{k}}(\vec{r}) \hat{L}_{\vec{k}}(\vec{r}') \right]. \tag{23.9}$$

Dementsprechend ist der Ansatz für den Greenschen Tensor:

$$\Gamma_H(\vec{r}, \vec{r}') \; = \; \int \int_{-\infty}^{\infty} \int d\vec{k} \left[g_{\vec{k}}^{(L)} \; \hat{L}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; \hat{L}_{\vec{k}}(\vec{r}') \; + \; g_{\vec{k}}^{(M)} \; \hat{M}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; \hat{M}_{\vec{k}}(\vec{r}') \; + \; g_{\vec{k}}^{(N)} \; \hat{N}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; \hat{L}_{\vec{k}}(\vec{r}') \right]. \tag{23.10}$$

Mit diesen beiden Ansätzen gehen wir in die Gleichung (23.2) für den Greenschen Tensor ein. Für alle drei Felder gilt die gleiche Eigenwertgleichung :

$$\vec{\Delta} \hat{L}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; = \; - \; k^2 \; \hat{L}_{\vec{k}}(\vec{r}), \quad \vec{\Delta} \hat{M}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; = \; - \; k^2 \; \hat{M}_{\vec{k}}(\vec{r}), \quad \vec{\Delta} \hat{N}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; = \; - \; k^2 \; \hat{N}_{\vec{k}}(\vec{r}). \tag{23.11}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit aller Basisfunktion bekommen wir folgende Gleichungen für die Entwicklungskoeffizienten g:

$$(\kappa^2 \; - \; k^2) \; g_{\vec{k}}^{(\alpha)} \; = \; -1; \qquad \alpha \; \in \; L, M, N. \tag{23.12}$$

Die Eigenfunktionsentwicklung des Greenschen Tensors ist also:

$$\Gamma_H(\vec{r}, \vec{r}') \; = \; \int \int_{-\infty}^{\infty} \int d\vec{k} \; \frac{1}{\kappa^2 \; - \; k^2} \left[\hat{L}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; \hat{L}_{\vec{k}}(\vec{r}') \; + \; \hat{M}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; \hat{M}_{\vec{k}}(\vec{r}') \; + \; \hat{N}_{\vec{k}}(\vec{r}) \; \hat{L}_{\vec{k}}(\vec{r}') \right]. \tag{23.13}$$

Rein formal entspricht diese Darstellung der Integraldarstellung (= Eigenfunktionsentwicklung) der Greenschen Funktion der Helmholtzgleichung in Gl.(15.13). Nur ist hier der Integrand wesentlich singulärer. Wie die Integrationswege im dreidimensionalen $\vec{k}$-Raum zu legen sind, wird hier nicht weiter diskutiert, da wir mit dieser Greenschen Funktion nicht rechnen werden.