22.6.1 Elektromagnetische Eigenschwingungen im Inneren einer metallischen Kugel

Das Feld muss an r = 0 endlich sein. Am Rand r = a muss die tangentielle elektrische Feldstaerke Null sein. Die Feldkomponenten der beiden Typen (E- und H-Typ) werden mittels einkomponentiger radialer elektrischer oder magnetischer Hertzscher Vektoren berechnet.

$\vec{\Pi} = \vec{r}\ \psi(\mathrm{r},\theta,\phi)$, mit $\psi(\mathrm{r},\theta,\phi)$ Loesung der skalren Helmholtzgleichung:

$$\psi(\mathrm{r},\theta,\phi) = \mathrm{R}[\mathrm{r}]\ \Theta[\theta]\ \Phi[\phi] = j_l(k\,r)\ Y_{\mathrm{lm}}(\theta,\phi) \tag{1}$$

mit $j_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\ J_{l+1/2}(\rho)$ sphaerische Besselfunktion der Ordnng l (2)

und $Y_{\mathrm{lm}}(\theta,\phi) = P_l^m(\cos\theta)\, e^{\mathrm{im}\phi}$ Kugelflaechenfunktion.

```
$Version
```

```
7.0 for Mac OS X x86 (64-bit) (February 19, 2009)
```

Laden des Packages und Einstellen des Koordinatensystems

```
<< "VectorAnalysis`"
```

```
SetCoordinates[Spherical[r, θ, ϕ]];
```

```
<< NumericalMath`BesselZeros`
```

- **Radialer Vektor**

```
vr = {r, 0, 0};
```

- **Magnetischer Typ H_{mln} = TE $_{\mathrm{mln}}$**

- **Elektrisches Feld ~ M**

```
mv = Curl[vr ψ[r, θ, ϕ]]
```

$\{0, \mathrm{Csc}[\theta]\ \psi^{(0,0,1)}[r,\theta,\phi], -\psi^{(0,1,0)}[r,\theta,\phi]\}$

Separationsansatz

```
sups = ψ[r, θ, ϕ] → R[r] Θ[θ] Φ[ϕ]
```

```
ψ[r, θ, ϕ] → R[r] Θ[θ] Φ[ϕ]
```

```
mvs = Curl[vr ψ[r, θ, ϕ] /. sups]
```

```
{0, Csc[θ] R[r] Θ[θ] Φ′[ϕ], -R[r] Φ[ϕ] Θ′[θ]}
```

Randbedingung an r = a: mvs = 0 ⇒

r = a: R[a] = 0 = $j_l(k\,a)$ (3)

(3) impliziert die Eigenwerte:

$$\boldsymbol{H}_{\mathbf{mln}}: \; k_{\mathrm{mln}} \; = \; j_{l+1/2,n}/a \, ,$$

mit $\qquad J_{l+1/2,n}(j_{l+1/2,n}) = 0, \quad j_{l+1/2,n} =$ n-te Nullstelle.

Fuer l = 0 (das impliziert auch m = 0) gibt es kein elektrisches Feld. Dieses ist proportional zu

$$\vec{E} \sim \vec{N} = \mathrm{rotrot}\,(\vec{r}\;\psi)$$

```
nvs = Curl[Curl[vr R[r] SphericalHarmonicY[l, m, θ, ϕ]]];
```

```
Limit[nvs /. m → 0, l → 0]
```

```
{0, 0, 0}
```

Felder gibt es also nur zu den Eigenwerten (diese haengen nicht von m ab; m = 0 ist bequem):

$$\mathrm{a}\, k_{\mathrm{mln}} = \; j_{l+1/2,n}, \quad \mathrm{l,n} \; \epsilon \, \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} \qquad (4)$$

- **Berechnung der Eigenwerte**

```
nn = 6;
ln = 5;
zeh = Table[{ll, BesselJZeros[ll + 1 / 2, nn]}, {ll, ln}];
```

Tabelle der Eigenwerten $j_{l+1/2,n} = \mathrm{a}\, k_{\mathrm{mln}}$

```
Prepend[Prepend[Transpose[zeh][[2]], Range[nn]] // Transpose,
  Flatten[{"n/l", Range[ln]}]] // TableForm
```

n/l	1	2	3	4	5
1	4.49341	5.76346	6.98793	8.18256	9.35581
2	7.72525	9.09501	10.4171	11.7049	12.9665
3	10.9041	12.3229	13.698	15.0397	16.3547
4	14.0662	15.5146	16.9236	18.3013	19.6532
5	17.2208	18.689	20.1218	21.5254	22.9046
6	20.3713	21.8539	23.3042	24.7276	26.1278

- **Die magnetische Grundschwingung $\boldsymbol{H}_{011}$**

Der niedrigste Eigenwert a $k_{011} = j_{3/2,1} =$ 4.49341 gibt die Grundschwingung:
H_{011}: $\lambda/\mathrm{a} = 2\pi/j_{3/2,1} =$ 1.39831...

```
2 π / zeh[[1, 2, 1]]
```

```
1.39831
```

■ Elektrischer Typ E_{mln} = TH $_{\text{mln}}$

■ Elektrisches Feld ~ N

```
mev = Curl[Curl[vr R[r] Θ[θ] Φ[ϕ]]] // Expand // Factor
```

$$\left\{-\frac{R[r]\left(\mathrm{Cot}[\theta]\,\Phi[\phi]\,\Theta'[\theta]+\Phi[\phi]\,\Theta''[\theta]+\mathrm{Csc}[\theta]^2\,\Theta[\theta]\,\Phi''[\phi]\right)}{r},\ \frac{\Phi[\phi]\,(R[r]+r\,R'[r])\,\Theta'[\theta]}{r},\ \frac{\mathrm{Csc}[\theta]\,\Theta[\theta]\,(R[r]+r\,R'[r])\,\Phi'[\phi]}{r}\right\}$$

Die tangentiellen elektrischen Feldkomponenten sind $E_\theta$und E_ϕ, das 2. und 3. Element von **mev.**

Randbedingung an r = a: mev = 0 ⇒

r = a: $R[a] + a\,R'[a] = 0 = j_l(k\,a) + a\,k\ \ j_l'(k\,a)$ (5)

Aus (5) ergibt sich folgende Bedingung fuer die Eigenwerte ξ_{mln} :

$$j_l(\xi) + \xi\ j_l'(\xi) \ = \ \partial(\xi\ j_l(\xi))/\partial\xi \ = \ \partial\left(\sqrt{\xi}\ J_{l+1/2}(\xi))\right)/\partial\xi \ = 0,$$

Die Eigenwerte sind dann die Nullstellen der folgenden Funktion:

$$f(\xi) := J_{l+1/2}(\xi) \,/\, J_{l-1/2}(\xi) - \xi/l \qquad (6)$$

■ Aufsuchen der Nullstellen ξ_{ln}

```
f[xi_, ll_] = BesselJ[ll + 0.5, xi] / BesselJ[ll - 0.5, xi] -
  xi / ll
```

$$-\frac{xi}{ll}+\frac{\mathrm{BesselJ}[0.5+ll,\ xi]}{\mathrm{BesselJ}[-0.5+ll,\ xi]}$$

Berechnen der Startwerte fuer ξ_{11}

```
nn = 6;
ln = 5;

xs = xi /. Table[FindRoot[f[xi, ll], {xi, 2 + ll}], {ll, ln}] // Flatten ;
```

Berechnen der Startwerte fuer all ξ_{ln}

```
xst =
  Table[Table[Evaluate[xs[[ll]]] + Evaluate[{n - 1}] π, {n, nn}] // Flatten, {ll, ln}];
```

Berechen aller Wurzeln ξ_{ln} fuer $1 \le l \le \text{ln} = 5$, $1 \le n \le \text{nn} = 6$.

```
xlt = Table[
   {ll, xi /. Table[xln = {FindRoot[f[xi, ll], {xi, xst[[ll, n]]}]}, {n, nn}] // Flatten},
   {ll, ln}];
```


Tabelle der Eigenwerten $\xi_{l+1/2,n}$ = a k_{mln}

```
Prepend[Prepend[Transpose[xlt][[2]], Range[nn]] // Transpose,
  Flatten[{"n/l", Range[ln]}]] // TableForm
```

n/l	1	2	3	4	5
1	2.74371	3.87024	4.97342	6.06195	7.14023
2	6.11676	7.44309	8.72175	9.96755	11.189
3	9.31662	10.713	12.0636	13.3801	14.6701
4	12.4859	13.9205	15.3136	16.6742	21.2815
5	15.6439	17.1027	18.5242	19.9154	24.5178
6	18.7963	20.272	21.7139	23.1278	24.5178

Die Wellenzahlen k_{ln} der Eigenschwingungen der Kugel vom Radius a sind dann:

$$k_{\mathrm{ln}} = \xi_{\mathrm{ln}}/\mathrm{a}$$

- **Die elektrische Grundschwingung E_{011}**

Der niedrigste Eigenwert a $k_{011} = \xi_{1,1} =$ 2.74371 gibt die Grundschwingung:

E_{011}: $\lambda/\mathrm{a} = 2\pi/\xi_{1,1} = 2.29003...$

```
2 π / xlt[[1, 2, 1]]
```

```
2.29003
```

```
2 π / zeh[[1, 2, 1]]
```

```
1.39831
```

Die magnetische Grundschwingung hat die niedrigeste Eigenfrequenz.