22.5.5 E- und H-Moden in kreiszylindrischen Wellenleitern und Hohlraeumen

B. Schnizer

schnizer@itp.tu-graz.ac.at

2013-02-06

```
$Version
```

```
7.0 for Mac OS X x86 (64-bit) (February 19, 2009)
```

Vorbereitungen

- **Das Package laden:**

```
<< "VectorAnalysis`"
```

- **Zylinderkoordinaten auswaehlen**

```
SetCoordinates[Cylindrical[r, ϕ, z]]
```

```
Cylindrical[r, ϕ, z]
```

```
ez = {0, 0, 1};
```

- **Randbedingung: am Mantel r = a:** $\vec{E}_{\mathrm{tang}} = 0$

```
sura = r -> a;
```

Kreiszylindrischer Wellenleiter

Elm Felder aus dem Elektrischen Hertzschen Vektor, E-Moden

- **Einkomponentiger Hertzscher Vektor**
  vΠe = Πe[r, ϕ, z] ez = ez R(r) Φ(ϕ) Exp[i hp z]

```
vΠe = ez R[r] Φ[ϕ] Exp[i hp z]
```

$\{0, 0, e^{hp\, i\, z} R[r]\, \Phi[\phi]\}$

- **Elektrisches Feld**

```
vE = {Er[r, ϕ, z], Eϕ[r, ϕ, z], Ez[r, ϕ, z]};
```

```
k^2 vΠe + Grad[Div[vΠe]]
```

$$\left\{e^{hp\, i\, z}\, hp\, i\, \Phi[\phi]\, R'[r],\ \frac{e^{hp\, i\, z}\, hp\, i\, R[r]\, \Phi'[\phi]}{r},\ e^{hp\, i\, z}\, hp^2\, i^2\, R[r]\, \Phi[\phi] + e^{hp\, i\, z}\, k^2\, R[r]\, \Phi[\phi]\right\}$$

```
vE = %
```

$$\left\{e^{hp\, i\, z}\, hp\, i\, \Phi[\phi]\, R'[r],\ \frac{e^{hp\, i\, z}\, hp\, i\, R[r]\, \Phi'[\phi]}{r},\ e^{hp\, i\, z}\, hp^2\, i^2\, R[r]\, \Phi[\phi] + e^{hp\, i\, z}\, k^2\, R[r]\, \Phi[\phi]\right\}$$

- **Randbedingungen am Mantel**

Am Mantel (r = a) muessen die tangentiellen Komponenten des elektrischen Feldes Null sein;
dies sind Eϕ[r,ϕ,z] und Ez[r,ϕ,z] :

```
(vE[[2]] /. sura ) == 0
```

$$\frac{e^{hp\, i\, z}\, hp\, i\, R[a]\, \Phi'[\phi]}{a} == 0$$

```
Factor[(vE[[3]] /. sura )] == 0
```

$$e^{hp\, i\, z}\left(hp^2\, i^2 + k^2\right) R[a]\, \Phi[\phi] == 0$$

Die Randbedingung ist erfuellt, wenn R(a) = 0 ist.

- **Magnetisches Feld**

```
vH = {Hr[r, ϕ, z], Hϕ[r, ϕ, z], Hz[r, ϕ, z]};
```

```
- I ω ε Curl[vΠe ]
```

$$\left\{-\frac{i\, e^{hp\, i\, z}\, \varepsilon\, \omega\, R[r]\, \Phi'[\phi]}{r},\ i\, e^{hp\, i\, z}\, \varepsilon\, \omega\, \Phi[\phi]\, R'[r],\ 0\right\}$$

```
vH = %
```

$$\left\{-\frac{i\, e^{hp\, i\, z}\, \varepsilon\, \omega\, R[r]\, \Phi'[\phi]}{r},\ i\, e^{hp\, i\, z}\, \varepsilon\, \omega\, \Phi[\phi]\, R'[r],\ 0\right\}$$

Elm Felder aus dem Magnetischen Hertzschen Vektor, H-Moden

- **Einkomponentiger Hertzscher Vektor**
  vΠm = Πm[r, ϕ, z] ez = ez R(r) Φ(ϕ) Exp[i hpp z]

```
vΠm = ez R[r] Φ[ϕ] Exp[i hpp z]
```

$$\{0,\ 0,\ e^{\text{hpp i z}}\ R[r]\ \Phi[\phi]\}$$

- **Magnetisches Feld**

```
vH = {Hr[r, ϕ, z], Hϕ[r, ϕ, z], Hz[r, ϕ, z]};
```

```
k^2 vΠm + Grad[Div[vΠm]]
```

$$\left\{e^{\text{hpp i z}}\ \text{hpp i}\ \Phi[\phi]\ R'[r],\ \frac{e^{\text{hpp i z}}\ \text{hpp i}\ R[r]\ \Phi'[\phi]}{r},\ e^{\text{hpp i z}}\ \text{hpp}^2\ i^2\ R[r]\ \Phi[\phi] + e^{\text{hpp i z}}\ k^2\ R[r]\ \Phi[\phi]\right\}$$

```
vH = %
```

$$\left\{e^{\text{hpp i z}}\ \text{hpp i}\ \Phi[\phi]\ R'[r],\ \frac{e^{\text{hpp i z}}\ \text{hpp i}\ R[r]\ \Phi'[\phi]}{r},\ e^{\text{hpp i z}}\ \text{hpp}^2\ i^2\ R[r]\ \Phi[\phi] + e^{\text{hpp i z}}\ k^2\ R[r]\ \Phi[\phi]\right\}$$

- **Elektrisches Feld**

```
vE = {Er[r, ϕ, z], Eϕ[r, ϕ, z], Ez[r, ϕ, z]};
```

```
I ω μ Curl[vΠm ]
```

$$\left\{\frac{i\ e^{\text{hpp i z}}\ \mu\ \omega\ R[r]\ \Phi'[\phi]}{r},\ -i\ e^{\text{hpp i z}}\ \mu\ \omega\ \Phi[\phi]\ R'[r],\ 0\right\}$$

```
vE = %
```

$$\left\{\frac{i\ e^{\text{hpp i z}}\ \mu\ \omega\ R[r]\ \Phi'[\phi]}{r},\ -i\ e^{\text{hpp i z}}\ \mu\ \omega\ \Phi[\phi]\ R'[r],\ 0\right\}$$

- **Randbedingung am Mantel**

Am Mantel (r = a) muessen die tangentiellen Komponenten des elektrischen Feldes Null sein;
dies ist allein $E\phi[r,\phi,z]$, da $Ez[r,\phi,z] \equiv 0$ ist.

```
(vE[[2]] /. sura ) == 0
```

$$-i\ e^{\text{hpp i z}}\ \mu\ \omega\ \Phi[\phi]\ R'[a] == 0$$

Die Randbedingung ist erfuellt, wenn R'(a) = 0 ist.

Kreiszylindrischer Hohlraum (Pillbox cavity)

Der Hohlraum erstreckt sich von $z = z1$ bis $z = z2$. Auf diesen Deckflaechen muss das tangentielle elektrische Feld ebenfalls Null sein. Es kommen also noch zusaetzliche Randbedingungen:

```
suzi = z → zi;
```

Elm Felder aus dem Elektrischen Hertzschen Vektor

Einkomponentiger Hertzscher Vektor

vΠe = Πe[r, ϕ, z] ez = ez R(r) Φ(ϕ) Z[z]

```
vΠe = ez R[r] Φ[ϕ] Z[z]
```

$\{0, 0, R[r]\, Z[z]\, \Phi[\phi]\}$

Elektrisches Feld

```
vE = {Er[r, ϕ, z], Eϕ[r, ϕ, z], Ez[r, ϕ, z]};
```

```
k^2 vΠe + Grad[Div[vΠe]]
```

$$\left\{\Phi[\phi]\, R'[r]\, Z'[z],\ \frac{R[r]\, Z'[z]\, \Phi'[\phi]}{r},\ k^2 R[r]\, Z[z]\, \Phi[\phi] + R[r]\, \Phi[\phi]\, Z''[z]\right\}$$

```
vE = %
```

$$\left\{\Phi[\phi]\, R'[r]\, Z'[z],\ \frac{R[r]\, Z'[z]\, \Phi'[\phi]}{r},\ k^2 R[r]\, Z[z]\, \Phi[\phi] + R[r]\, \Phi[\phi]\, Z''[z]\right\}$$

Randbedingung am Mantel

Am **Mantel** $(r = a)$ muessen die tangentiellen Komponenten des elektrischen Feldes Null sein; dies sind $E\phi[r,\phi,z]$ und $Ez[r,\phi,z]$:

```
(vE[[2]] /. sura) == 0
```

$$\frac{R[a]\, Z'[z]\, \Phi'[\phi]}{a} == 0$$

```
Factor[(vE[[3]] /. sura)] == 0
```

$$R[a]\, \Phi[\phi]\, \left(k^2 Z[z] + Z''[z]\right) == 0$$

Diese Randbedingung ist erfuellt, wenn R(a) = 0 ist.

Randbedingung an den Deckflaechen

An den **Deckflaechen** $(z = zi)$ muessen die tangentiellen Komponenten des elektrischen Feldes Null sein; dies sind $E\phi[r,\phi,z]$ und $Er[r,\phi,z]$:

```
(vE[[2]] /. suzi) == 0
```

$$\frac{R[r]\, Z'[zi]\, \Phi'[\phi]}{r} == 0$$

```
Factor[(vE[[1]] /. suzi)] == 0
```

$$\Phi[\phi]\, R'[r]\, Z'[zi] == 0$$

Diese Randbedingung ist erfuellt, wenn Z'(zi) = 0 ist. 24 ↓

- **Magnetisches Feld**

```
vH = {Hr[r, ϕ, z], Hϕ[r, ϕ, z], Hz[r, ϕ, z]};
```

```
- I ω ε Curl[vΠe ]
```

$$\left\{-\frac{i\,\varepsilon\,\omega\,R[r]\,Z[z]\,\Phi'[\phi]}{r},\ i\,\varepsilon\,\omega\,Z[z]\,\Phi[\phi]\,R'[r],\ 0\right\}$$

```
vH = %
```

$$\left\{-\frac{i\,\varepsilon\,\omega\,R[r]\,Z[z]\,\Phi'[\phi]}{r},\ i\,\varepsilon\,\omega\,Z[z]\,\Phi[\phi]\,R'[r],\ 0\right\}$$

Elm Felder aus dem Magnetischen Hertzschen Vektor, H-Moden

- **Einkomponentiger Hertzscher Vektor**
  vΠm = Πm[r, ϕ, z] ez = ez R(r) Φ(ϕ) Z[z]

```
vΠm = ez R[r] Φ[ϕ] Z[z]
```

$$\{0,\ 0,\ R[r]\,Z[z]\,\Phi[\phi]\}$$

- **Magnetisches Feld**

```
vH = {Hr[r, ϕ, z], Hϕ[r, ϕ, z], Hz[r, ϕ, z]};
```

```
k^2 vΠm + Grad[Div[vΠm]]
```

$$\left\{\Phi[\phi]\,R'[r]\,Z'[z],\ \frac{R[r]\,Z'[z]\,\Phi'[\phi]}{r},\ k^2\,R[r]\,Z[z]\,\Phi[\phi]+R[r]\,\Phi[\phi]\,Z''[z]\right\}$$

```
vH = %
```

$$\left\{\Phi[\phi]\,R'[r]\,Z'[z],\ \frac{R[r]\,Z'[z]\,\Phi'[\phi]}{r},\ k^2\,R[r]\,Z[z]\,\Phi[\phi]+R[r]\,\Phi[\phi]\,Z''[z]\right\}$$

- **Elektrisches Feld**

```
vE = {Er[r, ϕ, z], Eϕ[r, ϕ, z], Ez[r, ϕ, z]};
```

```
I ω μ Curl[vΠm ]
```

$$\left\{\frac{i\,\mu\,\omega\,R[r]\,Z[z]\,\Phi'[\phi]}{r},\ -i\,\mu\,\omega\,Z[z]\,\Phi[\phi]\,R'[r],\ 0\right\}$$

```
vE = %
```

$$\left\{\frac{i\,\mu\,\omega\,R[r]\,Z[z]\,\Phi'[\phi]}{r},\ -i\,\mu\,\omega\,Z[z]\,\Phi[\phi]\,R'[r],\ 0\right\}$$

Randbedingung am Mantel

Am Mantel (r = a) muessen die tangentiellen Komponenten des elektrischen Feldes Null sein;
dies ist allein Eϕ[r,ϕ,z], da Ez[r,ϕ,z] $\equiv$ 0 ist.

```
(vE[[2]] /. sura ) == 0
```

$-i\,\mu\,\omega\,Z[z]\,\Phi[\phi]\,R'[a] == 0$

Die Randbedingung ist erfuellt, wenn **R'(a) = 0** ist.

Randbedingung an den Deckflaechen

An den **Deckflaechen** (z = zi) muessen die tangentiellen Komponenten des elektrischen Feldes Null sein; dies sind Eϕ[r,ϕ,z] und Er[r,ϕ,z] :

```
(vE[[2]] /. suzi ) == 0
```

$-i\,\mu\,\omega\,Z[zi]\,\Phi[\phi]\,R'[r] == 0$

```
Factor[(vE[[1]] /. suzi )] == 0
```

$$\frac{i\,\mu\,\omega\,R[r]\,Z[zi]\,\Phi'[\phi]}{r} == 0$$

Diese Randbedingung ist erfuellt, wenn Z(zi) = 0 ist.