22.1.1 Operationen der Vektoranalysis in Zylinderkoordinaten r, ϕ, z

2013-02-06

```
$Version
```

```
7.0 for Mac OS X x86 (64-bit) (February 19, 2009)
```

- **Das Package laden:**

```
<< "VectorAnalysis`"
```

- **Zylinderkoordinaten auswaehlen**

```
SetCoordinates[Cylindrical[r, ϕ, z]]
```

```
Cylindrical[r, ϕ, z]
```

- **Skalare Funktion:**

```
Ph = Φ[r, ϕ, z]
```

```
Φ[r, ϕ, z]
```

- **Vektorfunktion**

```
va = {ar[r, ϕ, z], aϕ[r, ϕ, z], az[r, ϕ, z]}
```

```
{ar[r, ϕ, z], aϕ[r, ϕ, z], az[r, ϕ, z]}
```

- **Gradient**

```
Grad[Ph]
```

$$\left\{\Phi^{(1,0,0)}[r,\phi,z],\ \frac{\Phi^{(0,1,0)}[r,\phi,z]}{r},\ \Phi^{(0,0,1)}[r,\phi,z]\right\}$$

- **Divergenz**

```
Div[va] // Apart
```

$$\frac{ar[r,\phi,z]+r\,az^{(0,0,1)}[r,\phi,z]+a\phi^{(0,1,0)}[r,\phi,z]}{r}+ar^{(1,0,0)}[r,\phi,z]$$

```
Grad[Div[va]] // Expand
```

$$\left\{-\frac{ar[r,\phi,z]}{r^2}-\frac{a\phi^{(0,1,0)}[r,\phi,z]}{r^2}+\frac{ar^{(1,0,0)}[r,\phi,z]}{r}+az^{(1,0,1)}[r,\phi,z]+\frac{a\phi^{(1,1,0)}[r,\phi,z]}{r}+ar^{(2,0,0)}[r,\phi,z],\ \frac{ar^{(0,1,0)}[r,\phi,z]}{r^2}+\frac{az^{(0,1,1)}[r,\phi,z]}{r}+\frac{a\phi^{(0,2,0)}[r,\phi,z]}{r^2}+\frac{ar^{(1,1,0)}[r,\phi,z]}{r},\ \frac{ar^{(0,0,1)}[r,\phi,z]}{r}+az^{(0,0,2)}[r,\phi,z]+\frac{a\phi^{(0,1,1)}[r,\phi,z]}{r}+ar^{(1,0,1)}[r,\phi,z]\right\}$$

- **Rotor**

```
Curl[va] // Apart
```

$$\left\{-a\phi^{(0,0,1)}[r,\phi,z]+\frac{az^{(0,1,0)}[r,\phi,z]}{r},\ ar^{(0,0,1)}[r,\phi,z]-az^{(1,0,0)}[r,\phi,z],\ \frac{a\phi[r,\phi,z]-ar^{(0,1,0)}[r,\phi,z]}{r}+a\phi^{(1,0,0)}[r,\phi,z]\right\}$$

```
Curl[Curl[va]] // Expand
```

$$\left\{-ar^{(0,0,2)}[r,\phi,z]+\frac{a\phi^{(0,1,0)}[r,\phi,z]}{r^2}-\frac{ar^{(0,2,0)}[r,\phi,z]}{r^2}+az^{(1,0,1)}[r,\phi,z]+\frac{a\phi^{(1,1,0)}[r,\phi,z]}{r},\right.$$
$$\frac{a\phi[r,\phi,z]}{r^2}-a\phi^{(0,0,2)}[r,\phi,z]-\frac{ar^{(0,1,0)}[r,\phi,z]}{r^2}+\frac{az^{(0,1,1)}[r,\phi,z]}{r}-\frac{a\phi^{(1,0,0)}[r,\phi,z]}{r}+$$
$$\frac{ar^{(1,1,0)}[r,\phi,z]}{r}-a\phi^{(2,0,0)}[r,\phi,z],\ \frac{ar^{(0,0,1)}[r,\phi,z]}{r}+\frac{a\phi^{(0,1,1)}[r,\phi,z]}{r}-$$
$$\left.\frac{az^{(0,2,0)}[r,\phi,z]}{r^2}-\frac{az^{(1,0,0)}[r,\phi,z]}{r}+ar^{(1,0,1)}[r,\phi,z]-az^{(2,0,0)}[r,\phi,z]\right\}$$

Laplace Operator

Der skalare Laplaceoperator wird auf eine skalare Funktion angewendet und erzeugt dabei wieder eine skalare Funktion.

- **Skalarer Laplace Operator**

```
Laplacian[Ph] // Expand
```

$$\Phi^{(0,0,2)}[r,\phi,z]+\frac{\Phi^{(0,2,0)}[r,\phi,z]}{r^2}+\frac{\Phi^{(1,0,0)}[r,\phi,z]}{r}+\Phi^{(2,0,0)}[r,\phi,z]$$

- **Vektor Laplace Operator**

Der Vektor Laplace Operator $\quad \vec{\Delta}\,\vec{a} :=$ grad div $\vec{a}$ - rot rot $\vec{a}$

wird auf ein Vektorfeld angewendet und erzeugt dabei ein neues Vektorfeld..

```
Laplacian[va] // Expand
```

$$\left\{-\frac{ar[r,\phi,z]}{r^2}+ar^{(0,0,2)}[r,\phi,z]-\frac{2\,a\phi^{(0,1,0)}[r,\phi,z]}{r^2}+\frac{ar^{(0,2,0)}[r,\phi,z]}{r^2}+\right.$$
$$\frac{ar^{(1,0,0)}[r,\phi,z]}{r}+ar^{(2,0,0)}[r,\phi,z],\ -\frac{a\phi[r,\phi,z]}{r^2}+a\phi^{(0,0,2)}[r,\phi,z]+$$
$$\frac{2\,ar^{(0,1,0)}[r,\phi,z]}{r^2}+\frac{a\phi^{(0,2,0)}[r,\phi,z]}{r^2}+\frac{a\phi^{(1,0,0)}[r,\phi,z]}{r}+a\phi^{(2,0,0)}[r,\phi,z],$$
$$\left.az^{(0,0,2)}[r,\phi,z]+\frac{az^{(0,2,0)}[r,\phi,z]}{r^2}+\frac{az^{(1,0,0)}[r,\phi,z]}{r}+az^{(2,0,0)}[r,\phi,z]\right\}$$

Die z-Komponente dieses Vektors ist gleich $\Delta\, a_z(r,\phi,z)$, worin Δ der skalare Laplaceoperator ist. Aber die beiden anderen Komponenten haben nicht diese einfachen Form; sie bestehen sogar aus Mischungen von a_r und a_ϕ. *Mathematica* berechnet den VektorLaplaceoperator gemaess der richtigen Definition:

```
Laplacian[va] == Grad[Div[va]] - Curl[Curl[va]] // Simplify
```

```
True
```