

Kapitel 10

Die δ -Distribution

Die δ -Distribution dient zur mathematischen Darstellung von punktförmigen Quellen in dem Formalismus, der für kontinuierlichen Quellenverteilung entwickelt worden ist. Nach der mathematischen Darstellung von Distributionen werden im zweiten Teil dieses Kapitels die Vollständigkeitsrelationen mehrerer orthonormalen Funktionensysteme mittels der δ -Distribution angeschrieben und bewiesen.

10.1 Heuristische Betrachtungen

In der Elektrostatik gilt für eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ im dreidimensionalen Raum

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}. \quad (10.1)$$

Für die Gesamtladung Q in einem Volumen V gilt:

$$\int \int \int_V \rho(\vec{r}) dV = Q. \quad (10.2)$$

Damit der Grenzübergang in Gl. (10.1) durchführbar ist, muss ΔQ gegen Null gehen, wenn ΔV gegen Null strebt. Dies ist aber nicht erfüllt für eine punktförmige Ladung. Es sei Q in \vec{r}_0 die einzige Ladung im Raum. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &\longrightarrow Q \cdot \infty && \text{wenn } \vec{r}_0 \in \Delta V \text{ für } \Delta V \rightarrow 0, \\ \rho(\vec{r}) &\longrightarrow 0 && \text{wenn } \vec{r}_0 \notin \Delta V \text{ für } \Delta V \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Ausgangspunkt für unsere Erweiterung des Formalismus für punktförmige Ladungsverteilung ist die Forderung, dass Gl.(10.2) auch weiterhin gelten soll. In einer Raumdimension gilt für eine kontinuierliche Ladungsverteilung

$$\lambda(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x}. \quad (10.4)$$

Die Gesamtladung Q in einem Intervall der Länge L ist

$$\int_L \lambda(x) dx = Q. \quad (10.5)$$

Sitzt eine punktförmige (Ladungs-) Quelle der Stärke Q in x_0 , dann schreibt man statt Gl.(10.3)

$$\lambda(x) = Q \delta(x - x_0). \quad (10.6)$$

Dabei wird das Symbol δ so definiert, dass

$$\begin{aligned}\delta(x - x_0) &= 0 & \text{für } x \neq x_0 \\ \delta(x - x_0) &= \infty & \text{für } x = x_0.\end{aligned}\tag{10.7}$$

Der "unendliche Wert" des Symbol δ soll so beschaffen sein, dass

$$\int_L \delta(x - x_0) dx = 1 \quad \text{für } x_0 \in L,\tag{10.8}$$

damit Gl.(10.2) erfüllt ist. Die " δ -Funktion" ist also überall Null, bis auf einen unendlich hohen Zacken an der Stelle $x = x_0$, der so beschaffen ist, dass die Fläche unter dem Zacken die Größe 1 hat (vgl.Abb.7.1).

Analog wird statt Gl.(10.3) geschrieben:

$$\rho(\vec{r}) = Q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0).\tag{10.9}$$

Die dreidimensionale " δ -Funktion" ist definiert als das Produkt von drei eindimensionalen " δ -Funktionen."

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0).\tag{10.10}$$

Aus den drei vorhergehenden Gleichungen folgt dann mit $dV = dx dy dz$

$$\int \int \int_{\mathcal{V}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = 1 \quad \text{für } \vec{r}_0 \in \mathcal{V}.\tag{10.11}$$

Damit ist Gl.(10.2) auch für eine punktförmige Ladungsverteilung befriedigt.

In einem n -dimensionalen Raum x_1, x_2, \dots, x_n mit dem Volumenelement $dV = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ist die im Punkt $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ befindliche Quelle der Stärke 1 durch

$$\delta(x_1 - x_{10}) \delta(x_2 - x_{20}) \dots \delta(x_n - x_{n0}) .\tag{10.12}$$

gegeben. Die Koordination x_i müssen dabei nicht notwendigerweise alle kartesisch sein. Z.B. kann auch für den Winkel ϕ gelten:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \delta(\phi - \phi') d\phi = 1 \quad \text{für } \phi \in (\phi_1, \phi_2).$$

Entscheidend für die Definition der Punktquelle ist immer die Form der Volumenelements (bzw. Bogen- oder Flächenelements).

Diese Gleichungen werden nun für krummlinige orthogonale Koordinationssysteme verallgemeinert. Die wesentlichen Gesichtspunkte sind einerseits, dass Gl.(10.11) weiterhin ihre Gültigkeit behalten soll; andererseits, dass Gl.(10.8) gelten soll, unabhängig davon, wie die Variable bezeichnet wird oder welche geometrische Bedeutung sie hat. Z.B. ist in Zylinderkoordination ρ, ϕ, z das Volumenelement $dV = \rho d\rho d\phi dz$. Wegen Gl.(10.8) schreiben wir daher an Stelle von Gl.(10.9):

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) := \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\rho} \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_0) .\tag{10.13}$$

In Kugelkoordination r, θ, ϕ ist das Volumenelement $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$. Daher folgt für das Analogon zu Gl.(10.11):

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) := \frac{\delta(r - r_0)}{r^2} \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{\sin \theta} \delta(\phi - \phi_0).\tag{10.14}$$

Allgemein kann man krummlinige orthogonale Koordinaten u_1, u_2, \dots, u_n durch das Linienelement

$$ds^2 = g_1^2 du_1^2 + g_2^2 du_2^2 + \dots + g_n^2 du_n^2 \quad (10.15)$$

definieren; die g_i sind Funktionen der u_1, u_2, \dots, u_n . Das Volumenelement ist:

$$dV = g_1 g_2 \dots g_n du_1 du_2 \dots du_n. \quad (10.16)$$

Wegen Gl.(10.8) ist die Darstellung der in $u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0}$ befindlichen Punktquelle der Stärke 1:

$$\frac{\delta(u_1 - u_{10}) \delta(u_2 - u_{20}) \dots \delta(u_n - u_{n0})}{g_1 g_2 \dots g_n}. \quad (10.17)$$

$g_1 g_2 \dots g_n$ bezeichnet man als Gewichts- oder Belegungsfunktion. Diese geht auch in die Vollständigkeitsrelation ein.

10.2 Strengere Begründung der δ -Distribution

Alle Überlegungen im vorhergehenden Paragraphen sind heuristischer Natur. Insbesondere sind die in Gl.(10.7) und (10.8) an die " δ -Funktion" gestellten Forderungen mit dem gewöhnlichen Funktionsbegriff unverträglich. Die " δ -Funktion" ist keine Funktion, sondern eine **Distribution** (oder **verallgemeinerte Funktion**): Der Grenzwert einer Funktionenfolge. Da jede Funktion der Folge von x abhängt, wird auch der Grenzwert von x abhängen, entspricht also mehr dem Begriff einer " Grenzfunktion". Aber der Limes der Funktionenfolge ist keine Funktion, sondern eben eine Distribution. Eine ähnliche Situation kennt man auch in der Theorie der Zahlen: Eine unendliche Folge von rationalen Zahlen muss nicht immer gegen eine rationale Zahl konvergieren, sie kann auch gegen eine irrationale (z.B. $\sqrt{2}$) konvergieren. Ähnliches auch in der Theorie der Fourierreihen: Die zweite Reihe in Bs.2 auf S 6.3 besteht aus lauter stetigen Funktionen, daher ist auch jede der (endlichen) Teilsummen eine stetige Funktion. Die Grenzfunktion ist aber unstetig und daher ausserhalb der Menge der (stetigen) Teilsummen. Eine Distribution ist also der Grenzwert einer Funktionenfolge. Da jede Funktion der Folge von x abhängt, wird auch der Grenzwert von x abhängen.

Doch ist diese " Grenzfunktion", der Limes der Funktionenfolge, keine Funktion mehr sondern eine Distribution. Doch die strenge Theorie der Distribution kann Gl.(10.7) und (10.8) nicht verkräften, sondern nur die folgende:

$$\int_L \delta(x - x') F(x) dx = \begin{cases} F(x') & \text{für } x' \in L, \\ 0 & \text{für } x' \notin L. \end{cases} \quad (10.18)$$

Diese kann graphisch ungefähr so veranschaulicht werden (s.Abb.10.1): Die δ -Distribution hat bei $x = x'$ eine scharfe Zacke, die gerade den Funktionswert $F(x')$ herausblendet, sonst ist sie überall Null. Es ist offensichtlich, dass diese Vorgangsweise nur dann funktioniert, wenn $F(x)$ an der Stelle x' stetig ist; genaueres über die geforderten Eigenschaften von $F(x)$ folgt später.

Die obige Relation heißt ein lineares Funktional und reicht vollständig für eine strenge Begründung der Resultate, die die Physiker mit dem unexakten und vagen Begriff der " δ -Funktion" ableiten. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir in der obigen Definition $x' = 0$:

$$\int_L \delta(x) F(x) dx = \begin{cases} F(0) & \text{für } 0 \in L, \\ 0 & \text{für } 0 \notin L. \end{cases} \quad (10.19)$$

Diese Gleichung wird nun streng begründet. Dabei folgen wird Lighthill, (Kap.2 und Teile von 1). Dazu müssen wir zunächst einige Definitionen bringen:

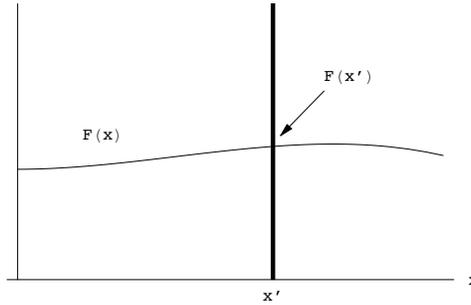


Abbildung 10.1: Die δ -Funktion blendet aus der Funktion $F(x)$ den Wert $F(x')$ aus.

Def.7.1: $f(x)$ heißt **Grundfunktion**, wenn sie in $-\infty \leq x \leq \infty$ überall beliebig oft differenzierbar ist und zusammen mit ihren Ableitungen im Unendlichen stärker gegen Null geht als jede Potenz, also die folgende Limesbeziehung erfüllt:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = O(|x|^{-N}) \quad (10.20)$$

mit beliebigen N .

Das Zeichen $O(g)$ bedeutet: Ein Ausdruck von der Ordnung höchstens g , also

$$f = O(g) \Leftrightarrow |f| < A|g|$$

für ein geeignetes, endliches A . Ein Beispiel einer Grundfunktion ist e^{-x^2} .

Def.7.2: $F(x)$ heißt **schwach wachsend**, wenn $F(x)$ beliebig oft differenzierbar ist und wenn $F(x)$ zusammen mit seinen Ableitungen im Unendlichen nicht stärker divergiert als eine Potenz, also die folgende Limesrelation erfüllt:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x) = O(|x|^N) \quad (10.21)$$

für ein geeignetes N . Beispiel einer schwach wachsenden Funktion ist jedes Polynom.

Die Ableitung einer Grundfunktion ist eine Grundfunktion. Die Summe und die Differenz zweier Grundfunktionen ist eine Grundfunktion. Das Produkt zweier Grundfunktionen, oder das einer Grundfunktion mit einer schwach wachsenden Funktion sind Grundfunktionen.

Die δ -Distribution wird definiert mittels der Funktionenfolge: (s.Abb.10.2)

$$\delta_n(x) := \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}, \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1. \quad (10.22)$$

Jedes $\delta_n(x)$ ist eine Gaußsche Glockenkurve. Die Fläche unter jeder dieser Kurven hat den Wert 1. Je größer n , desto schmaler und höher ist die Glockenkurve, in der Grenze $n \rightarrow \infty$ gibt dies einen Zacken. Jedoch ist es in strengen Sinne **unzulässig** zu schreiben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \delta(x).$$

Sondern es gilt nur für eine beliebige Grundfunktion $F(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) F(x) dx = F(0). \quad (10.23)$$

und das ist zu (10.19) äquivalent.

In Abb.10.2 werden rechts die Ableitungen der Funktionenfolgen $\delta'_n(x)$ gezeigt. Sie könnten einen Dipol representieren.

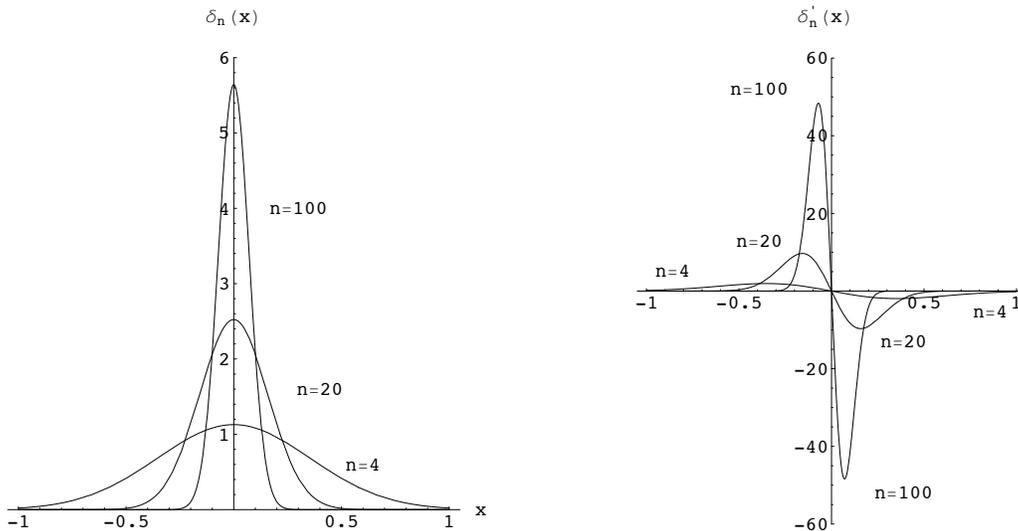


Abbildung 10.2: Links: Die Funktionenfolge $\delta_n(x)$ für $n = 4, 20, 100$. Diese konvergieren gegen eine Punktquelle am Punkt $x = 0$. Rechts: Die Ableitungen dieser Funktionen. Diese konvergieren gegen eine Dipolquelle am Punkt $x = 0$.

Zum Beweis der Gl.(10.23) betrachten wir:

$$\mathcal{I} = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} \sqrt{\frac{n}{\pi}} F(x) dx - F(0) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} \sqrt{\frac{n}{\pi}} [F(x) - F(0)] dx \right|.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt:

$$F(x) - F(0) = x F'(\theta x) \quad \text{mit} \quad 0 \leq \theta \leq 1;$$

setzen wir dies in die vorhergehende Gleichung ein, ergibt sich:

$$\mathcal{I} \leq \max |F'(x)| \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} |x| dx = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \max |F'(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

Es gibt nicht nur die in Gl. (10.22) definierte Funktionenfolge, sondern eine Klasse von Funktionenfolgen, deren Grenzwerte äquivalente Darstellungen der δ -Distribution sind. Z.B. folgt aus

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^\nu x^{2\nu}} dx = \Gamma(1/2\nu) / \nu \sqrt{n},$$

dass für jedes reelle ν die Folgen

$$\delta_n(x) = \frac{\sqrt{n} \nu}{\Gamma(1/2\nu)} e^{-n^\nu x^{2\nu}}$$

die δ -Distribution darstellen.

10.2.1 Die Heavisidesche Stufenfunktion

Das bestimmte Integral der δ -Distribution stellt die Heavisidesche Stufenfunktion dar:

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(\bar{x}) d\bar{x} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad x = 0, \\ 1 & \text{für} \quad 0 < x < \infty \end{cases}$$

Für $\theta_n(x)$ (s.Abb.10.3) ergibt sich durch Integration von Gl.(10.22):

$$\theta_n(x) = \int_{-\infty}^x \delta_n(\bar{x}) d\bar{x} = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}(\sqrt{n} x) \right].$$

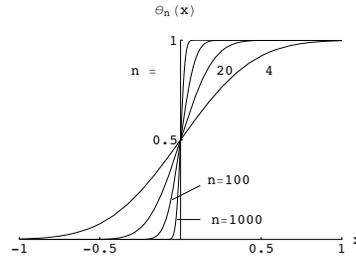


Abbildung 10.3: Die Funktionenfolge $\theta_n(x)$ für $n = 4, 20, 100, 1000$.

10.3 Die Vollständigkeitsrelation

Die Funktionen $\phi_n(x)$ eines **vollständigen orthonormierten Funktionensystems** $\{\phi_n(x)\}_{n=n_1}^{n_2}$ erfüllen die folgende Relation, genannt die **Vollständigkeitsrelation**:

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \phi_n^*(x') \phi_n(x) = \delta(x - x'); \quad x, x' \in [a, b]. \quad (10.24)$$

Im allgemeinen wird der obere Index n_2 Unendlich sein. Der untere, n_1 , kann je nach Wahl der Zählung der Eigenwerte und Eigenfunktionen $0, 1, -\infty$ oder auch eine andere Zahl sein. Ist das Spektrum kontinuierlich, dann hat man statt der diskreten Summe ein Integral über den Eigenwertparameter wie z.B. beim Fourierintegral. Beide Seiten der obigen Relation stellen keine gewöhnlichen Funktionen dar: Sie sind Distributionen und dürfen nur unter einem Integral verwendet werden. Dann ist auch die fehlende Konvergenz der unendlichen Summe auf der linken Seite kein Problem mehr. Die zu $\phi_n(x)$ **adjungierte** Funktion $\phi_n^*(x)$ kann mit $\phi_n(x)$ zusammenfallen, deren komplex Konjugierte oder auch eine andere Funktion sein; wesentlich ist, dass sie die folgende Orthonormierungsrelation erfüllt:

$$\int_a^b \phi_n^*(x) \phi_{n'}(x) dx = \delta_{n,n'}. \quad (10.25)$$

Dabei hat die Variable x den Charakter einer kartesischen Koordinate, insofern im obigen Integral keine Belegungsfunktion vorkommt.

10.3.1 Fourierreihendarstellung der δ -Distribution

Das System der imaginären e -Potenzen $e^{in\varphi}/\sqrt{2\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt die obigen Bedingungen der Vollständigkeit und Orthonormierung. Deshalb gilt die folgende Fourierreihendarstellung der δ -Distribution:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi')} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n(\varphi-\varphi')] = \delta(\varphi-\varphi'). \quad (10.26)$$

Diese wird unten noch bewiesen werden. Ebenso auch die Fourierintegraldarstellung der δ -Distribution:

10.3.2 Fourierintegraldarstellung der δ -Distribution

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[k(x-x')] dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos[k(x-x')] dk = \delta(x-x'). \quad (10.27)$$

10.3.3 Die Vollständigkeitsrelation in mehrdimensionalen krummlinigen orthogonalen Systemen

Ist das Problem mehrdimensional, dann wird für jede Dimension ein Eigenwertparameter benötigt; dementsprechend hat man mehrfache Summen und mehrfache Integrale. Wir betrachten wieder n -dimensionale krummlinigie orthogonale Koordinaten mit dem Bogenelement (10.15). Die Eigenfunktionen

$$\phi_{n_1, n_2, \dots, n_n}(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

werden durch die n (diskreten oder kontinuierlichen Indices) n_1, n_2, \dots, n_n numeriert; wir nehmen an, dass sie alle eine orthonormiertes Funktionensystem bilden:

$$\begin{aligned} & \int du_1 \int du_2 \dots \int du_n g_1 g_2 \dots g_n \phi_{n_1, n_2, \dots, n_n}^*(u_1, u_2, \dots, u_n) \phi_{\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \\ & = \delta_{n_1, \bar{n}_1} \delta_{n_2, \bar{n}_2} \dots \delta_{n_n, \bar{n}_n}. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Bilden diese Funktionen ein vollständiges System, so erfüllen sie die nachfolgende Vollständigkeitsrelation:

$$\sum_{n_1, n_2, \dots, n_n} \phi_{n_1, n_2, \dots, n_n}^*(u'_1, u'_2, \dots, u'_n) \phi_{n_1, n_2, \dots, n_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\delta(u_1 - u'_1) \delta(u_2 - u'_2) \dots \delta(u_n - u'_n)}{g_1 g_2 \dots g_n}. \quad (10.29)$$

n_1, n_2, \dots, n_n muss dabei die gesamte unendliche Indexmenge durchlaufen. Sind Indices kontinuierlich, dann hat man statt der Summe ein Integral. Ebenso tritt dann auch in der vorhergehenden Formel im Normierungsintegral eine Deltadistribution an die Stelle des Kroneckersymbols. $\phi_{n_1, n_2, \dots, n_n}^*(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ist die zu $\phi_{n_1, n_2, \dots, n_n}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ adjungierte Funktion.

10.3.4 Die Vollständigkeitsrelation der Kugelflächenfunktionen

Z.B. gilt für die Kugelflächenfunktionen:

$$Y_{\ell, m}(\vartheta, \varphi) = N_{\ell, m} P_{\ell}^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots; \quad -\ell \leq m \leq \ell$$

die Normierung:

$$\int \int_{\mathcal{O}} d\Omega Y_{\ell, m}^* Y_{\bar{\ell}, \bar{m}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta Y_{\ell, m}^*(\vartheta, \varphi) Y_{\bar{\ell}, \bar{m}}(\vartheta, \varphi) = \delta_{\ell, \bar{\ell}} \delta_{m, \bar{m}}.$$

\mathcal{O} ist die Oberfläche der Einheitskugel; der Raumwinkel $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ deren Flächenelement. Die Vollständigkeitsrelation lautet:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell, m}^*(\vartheta, \varphi) Y_{\ell, m}(\vartheta, \varphi) = \frac{\delta(\vartheta - \vartheta')}{\sin \vartheta} \delta(\varphi - \varphi') = \delta(\sin \vartheta - \sin \vartheta') \delta(\varphi - \varphi').$$

10.3.5 Die Vollständigkeitsrelation der Besselfunktionen $J_m(j_{mn} \frac{\rho}{a})$ in $0 \leq \rho \leq a$

Analoge Beispiele bildet man in Polarkoordinaten ρ, φ mit Besselfunktionen: Lösungen der Helmholtz-Gleichung im Inneren eines Kreises vom Radius a mit der Dirichletschen Randbedingung:

$$\Delta u + k^2 u(\rho, \varphi) = 0, \quad \rho = a : u = 0$$

führen zu folgenden Eigenwerten und -funktionen:

$$k = k_{m,n} = j_{mn}/a, \quad u_{mn}(\rho, \varphi) = J_m(j_{mn} \rho/a) e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 1, 2, 3, \dots$$

j_{mn} ist die n -te Nullstelle der Besselfunktion m -ter Ordnung, $J_m(x)$, d.h. $J_m(j_{mn}) = 0$. Wenn das Definitionsgebiet der obigen Differentialgleichung ein Sektor ist, dann können auch reelle Werte μ an Stelle der ganzzahligen m treten. Aus dem Integral

$$\int_0^a \rho d\rho J_\mu(j_{\mu,n}\rho/a) J_\mu(j_{\mu,n'}\rho/a) = \frac{a^2}{2} J_\mu'^2(j_{\mu,n}\rho/a) \delta_{\nu,\nu'}$$

ergibt sich folgende Vollständigkeitsrelation:

$$\frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\mu(j_{\mu,n}\rho'/a) J_\mu(j_{\mu,n}\rho/a)}{\frac{a^2}{2} J_\mu'^2(j_{\mu,n})}$$

Aus dem Doppelintegral über die obigen Eigenfunktionen

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho J_{m'}(j_{m',n}\rho/a) e^{-im'\varphi} J_m(j_{m,n}\rho/a) e^{im\varphi} = \pi a^2 J_m'^2(j_{m,n}) \delta_{m,m'} \delta_{n,n'}$$

ergibt sich folgende Vollständigkeitsrelation:

$$\frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \delta(\varphi - \varphi') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(j_{m,n}\rho/a) J_m(j_{m,n}\rho'/a)}{\pi a^2 J_m'^2(j_{m,n})} e^{im(\varphi - \varphi')}. \quad (10.30)$$

10.3.6 Die Vollständigkeitsrelation der Besselfunktionen $J_m(j'_{mn} r/a)$ in $0 \leq r \leq a$

s. Übungsaufgaben

10.4 Beweis einiger Vollständigkeitsrelationen

Wir versuchen eine strengere Begründung der den Gln.(10.28) und (10.29) entsprechenden ein-dimensionalen Gleichung, der **Vollständigkeitsrelation**:

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \phi_m^*(u') \phi_m(u) = \delta(u - u')/g(u). \quad (10.31)$$

$\phi_m(u)$ sind ein vollständiges orthonormiertes Funktionensystem, mit der Normierung gemäß:

$$\int_a^b \phi_m^*(u) \phi_k(u) g(u) du = \delta_{mk}. \quad (10.32)$$

$m_0 = -\infty, 0, 1$, je nach Numerierung des Funktionensystems. Dabei ist immer vorausgesetzt, dass Gl.(10.31) unter einem Integral über eine stetige Funktion verwendet wird.

Eine in $[a, b]$ quadratisch integrable Funktion $F(u)$ wird durch ihre Fourierentwicklung nach dem Funktionensystem $\phi_m(u)$ dargestellt:

$$F(u) = \sum_{m=m_0}^{\infty} c_m \phi_m(u) \quad (10.33)$$

$$c_m = \int_a^b \phi_m^*(u) F(u) g(u) du. \quad (10.34)$$

Wir bilden nun die Funktionenfolge:

$$\delta_n(u - u') g(u) = \sum_{m=m_0}^n \phi_m^*(u') \phi_m(u) \quad \text{bzw.} \quad (10.35)$$

$$= \sum_{m=-n}^n \phi_m^*(u') \phi_m(u) \quad \text{wenn } m_0 = -\infty. \quad (10.36)$$

Andererseits bilden wir aus den Gln.(10.33) und (10.34) folgende Definition:

$$F_n(u) := \sum_{m=m_0}^n \phi_m^*(u') \phi_m(u) g(u') du'.$$

In dieser endlichen Summe können Summation und Integration vertauscht werden. Danach bilden wir den Grenzwert:

$$\begin{aligned} F(u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F(u') \sum_{m=m_0}^n \phi_m^*(u') \phi_m(u) g(u') du' \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F(u') \frac{\delta_n(u - u')}{g(u')} g(u') du'. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Wenn also für ein vollständiges Funktionensystem die obige Identität in $F(u)$ bewiesen ist, dann kann man unter einem Integral über eine stetige Funktion auch die Vollständigkeitsrelation (10.31) bekommen.

10.4.1 Beweis der Vollständigkeitsrelation der trigonometrischen Funktionen

Dies wird nun für die Vollständigkeitsrelation (10.26) der orthonormierten imaginären e-Potenzen $\{e^{im\varphi}/\sqrt{2\pi}\}_{m=-\infty}^{\infty}$ etwas weiter ausgeführt. Wir bilden die endliche Teilsumme:

$$\delta_n(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-n}^n e^{im(\varphi - \varphi')} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[\frac{1}{2}(2n+1)(\varphi - \varphi')]}{\sin[\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')]}$$

und damit aus dem Integral (10.37) das folgende:

$$F(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' F(\varphi') \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[\frac{1}{2}(2n+1)(\varphi - \varphi')]}{\sin[\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')]}$$

Die unterstrichenen Teile des obigen Ausdrucks sollten die Deltadistribution, $\delta(\varphi - \varphi')$, ergeben. Mittels der Substitution

$$\varphi - \varphi' = 2t, \quad d\varphi' = -2 dt$$

wird daraus:

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int F(\varphi - 2t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt \\ &= \frac{1}{2} [F(\varphi + 0) + F(\varphi - 0)] = F(\varphi) \end{aligned}$$

für eine Funktion $F(\varphi)$, die den Dirichletschen Bedingungen genügt und stetig ist. Der Grenzwert des obigen Integrals wird z.B. bewiesen in Carslaw, §95, oder K. Knopp: Theorie der unendlichen Reihen, §49.

Analog folgt die Vollständigkeitsrelation (10.27):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[k(x-x')] dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos[k(x-x')] dk = \delta(x-x').$$

aus dem Fourierschen Integraltheorem:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} F(x') \cos[k(x-x')] dx'.$$

Beweise des letzteren finden sich in: Carslaw, §119 oder CH I, Kap.II, §6.

10.4.2 Beweis der Vollständigkeit der Besselfunktionen $J_m(\lambda r)$ in $0 \leq r \leq \infty$

Die Vollständigkeitsrelationen, deren Beweise im vorhergehenden Paragraph angedeutet worden sind, können nun benutzt werden, um weitere Vollständigkeitsrelationen anderer Funktionensysteme zu beweisen. Wir zeigen nun:

$$\int_0^{\infty} J_m(\lambda \rho) J_m(\lambda \rho') \lambda d\lambda = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho}. \quad (10.38)$$

Der Ausgangspunkt ist die Fourierintegraldarstellung der δ -Distribution:

$$\delta(x-x') \delta(y-y') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x(x-x')} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y(y-y')}.$$

Hier werden nun in allen Ebenen Polarkoordinaten eingeführt:

$$\begin{aligned} k_x &:= \lambda \cos \psi, & k_y &:= \lambda \sin \psi, & dk_x dk_y &= \lambda d\lambda d\psi; \\ x &:= \rho \cos \varphi, & y &:= \rho \sin \varphi, & dx dy &= \rho d\rho d\varphi; \\ x' &:= \rho' \cos \varphi', & y' &:= \rho' \sin \varphi', & dx' dy' &= \rho' d\rho' d\varphi'. \end{aligned}$$

Diese Transformationen werden in die obigen Integrale eingesetzt und geben:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \lambda d\lambda \int_0^{2\pi} d\psi e^{i\lambda \cos \psi (\rho \cos \varphi - \rho' \cos \varphi')} e^{i\lambda \sin \psi (\rho \sin \varphi - \rho' \sin \varphi')} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \lambda d\lambda \int_0^{2\pi} d\psi e^{i\lambda R \cos(\psi - \alpha)}. \end{aligned}$$

Die Umformungen in obiger Gleichung kommen folgendermaßen zustande:

$$\begin{aligned} R \cos(\psi - \alpha) &= R (\cos \psi \cos \alpha - \sin \psi \sin \alpha); \\ R \cos \alpha &= \rho \cos \varphi - \rho' \cos \varphi', \\ R \sin \alpha &= \rho \sin \varphi - \rho' \sin \varphi'; \\ R^2 &= \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' [\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi'] \\ &= \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi'); \\ \tan \alpha &= \frac{\rho \sin \varphi - \rho' \sin \varphi'}{\rho \cos \varphi - \rho' \cos \varphi'}. \end{aligned}$$

Damit wird aus obigem Doppelintegral:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \lambda d\lambda \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi e^{i\lambda \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')} \cos(\psi - \alpha)}_{J_0(\lambda \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')})}.$$

Dabei wurde die Sommerfeldsche Integraldarstellung der Besselfunktion nullter Ordnung benutzt (G. N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, S. 22). Diese Funktion wird nun mittels des Additionstheorems (Watson, S. 358) weiter zerlegt:

$$J_0(\lambda \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda\rho) J_m(\lambda\rho') e^{im(\varphi - \varphi')}.$$

Aus der zweiten Gleichung dieses Paragraphen und aus den beiden vorletzten ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \delta(x - x') \delta(y - y') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi')} \int_0^\infty \lambda d\lambda J_m(\lambda\rho) J_m(\lambda\rho') = \\ &= \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \delta(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi')} \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho}. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun die am Anfang angegebene Vollständigkeitsrelation.

Führt man in diese die sphärischen Besselfunktionen

$$j_\ell(z) := \sqrt{\frac{2}{\pi z}} J_{\ell+1/2}(z)$$

ein und schreibt r statt ρ , dann nimmt die obige Vollständigkeitsrelation die folgende Form an, die bei Verwendung von Kugelkoordinaten r, ϑ, φ herangezogen wird:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty j_\ell(\lambda r) j_\ell(\lambda r') \lambda^2 d\lambda = \frac{\delta(r - r')}{r^2}. \quad (10.39)$$

10.4.3 Die Vollständigkeitsrelation der Hermitefunktionen

In der Quantenmechanik wird der eindimensionale harmonische Oszillator durch den folgenden Hamiltonoperator beschrieben:

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

$H\psi = E\psi$ gibt mit der Darstellung $p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ die Schrödingergleichung. Geht man von x über auf eine dimensionslose Koordinate $\xi := x/(\hbar/m\omega)^{1/2}$, dann ist die neue Form der Schrödingergleichung:

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + \frac{E}{\hbar\omega} \right] u(\xi) = 0.$$

Die an $\xi = \pm \infty$ verschwindenden normierten Eigenfunktionen $u_n(\xi)$ lassen sich durch die Hermitepolynome $H_n(\xi)$ ausdrücken:

$$u_n(\xi) = [2^n n! \sqrt{\pi}]^{-1/2} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sie liefern die Eigenwerte $E_n = \hbar\omega (n + 1/2)$. Im weiteren setzen wir statt ξ wieder x . Die Hermitepolynome $H_n(x)$ lassen sich allesamt durch folgende erzeugende Funktion

$$\mathcal{E}(x, t) = e^{-t^2 + 2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (10.40)$$

definieren. Die reellen Funktionen $u_n(x) = u_n^*(x)$ bilden im Intervall $(-\infty, \infty)$ ein vollständiges orthomormiertes Funktionensystem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x) u_k(x) dx = \delta_{n,k}.$$

Die entsprechende Vollständigkeitsrelation

$$\mathcal{V} := \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) u_n(x') = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x^2+x'^2)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} H_n(x) H_n(x') = \delta(x-x') \quad (10.41)$$

kann mit Hilfe der zuvor abgeleiteten Darstellung der δ -distribution bewiesen werden. Dazu benötigen wir einige Hilfsätze.

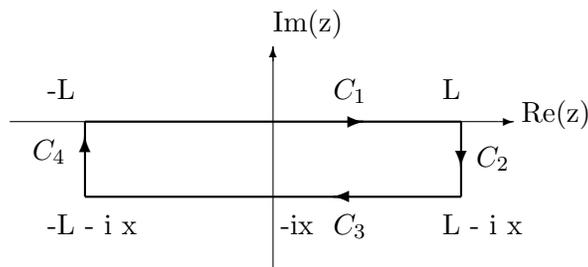


Abbildung 10.4: Der Integrationsweg C in der komplexen z -Ebene ist ein Rechteck, dessen Seiten mit C_1, \dots, C_4 bezeichnet werden. Am Ende geht $L \rightarrow \infty$.

Hilfssatz 1

$$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2+2itx} dt. \quad (10.42)$$

Beweis: Das Integral über den Integrationsweg C (s. Abb.10.4)

$$\int_C e^{-z^2} dz = 0, \quad C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4,$$

hat gemäß dem Cauchyschen Integralsatz den Wert Null, da der Integrand in dem Rechteck mit den Ecken $-L, L, L + ix, -L - ix$ regulär ist. Die Integrale über die vier Kanten sind:

$$C_1: \quad z = t, \quad dz = dt, \quad \int_{C_1} e^{-z^2} dz = \int_{-L}^L e^{-t^2} dt \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt;$$

$$C_3: \quad z = t - ix, \quad dz = dt, \quad \int_{C_3} e^{-z^2} dz = \int_{-L}^L e^{-(t-ix)^2} dt = -e^{x^2} \int_{-L}^L e^{-t^2} e^{2ixt} dt \\ \xrightarrow{L \rightarrow \infty} -e^{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{2ixt} dt;$$

$$C_2: \quad z = L - is, \quad dz = -ids \quad \int_{C_2} e^{-z^2} dz = e^{-L^2} \int_{s=0}^{s=x} e^{2iLs} e^{-s^2} ds \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0;$$

$$C_4: \quad z = -L - is, \quad dz = -ids \quad \int_{C_4} e^{-z^2} dz = e^{-L^2} \int_{s=x}^{s=0} e^{-2iLs} e^{-s^2} ds \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

Die Summe obiger vier Integrale gibt die obige Integraldarstellung (10.42),

Hilfssatz 2

Die Hermitpolynome haben folgende Integraldarstellung:

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-2i)^n e^{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-t^2+2itx} dt. \quad (10.43)$$

Beweis: Aus der erzeugenden Funktion (10.40) ergibt sich einerseits:

$$H_n(x) = \left. \frac{\partial^n \mathcal{E}}{\partial t^n} \right|_{t=0}.$$

und andererseits

$$\frac{\partial^n \mathcal{E}}{\partial t^n} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-t^2+2tx} \underset{u:=x-t}{=} \left(\frac{du}{dt} \right)^n \frac{\partial^n}{\partial u^n} e^{-u^2} e^{x^2} = e^{x^2} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial u^n} e^{-u^2}.$$

Dieses Resultat wird für $t = 0$ in die vorhergehende Formel eingesetzt:

$$H_n(x) = \left. \frac{\partial^n \mathcal{E}}{\partial t^n} \right|_{t=0} = e^{x^2} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}.$$

Wenn man die Integraldarstellung der Gaussfunktion, Gl.(10.42), in die eben gefundene Formel einsetzt, erhält man die obige Integraldarstellung der Hermitpolynome.

Beweis der Vollständigkeitsrelation (10.41):

Die Integraldarstellung wird in die linke Seite der Vollständigkeitsrelation eingesetzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} e^{(x^2+x'^2)/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{2i(xt+x's)-(t^2+s^2)} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-2ts)^n}_{= e^{-2st}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} e^{(x^2+x'^2)/2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d(2t) e^{2it(x-x')}}_{= 2\pi \delta(x-x')} \underbrace{e^{2ix'(s+t)} e^{-(s+t)^2}}_{e^{-(t^2+s^2)+2ix'(s+t)-(ix')^2-x'^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x^2-x'^2)/2} \delta(x-x') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-[(s+t)-ix']^2}}_{\sqrt{\pi}} = \delta(x-x'). \end{aligned}$$