

# Analytische Methoden der Theoretischen Physik

Vorlesung 4st. Bis zum WS 2011/12

Stand: 2013-02-06

## Literatur

### 1. Beispiele linearer Randwertprobleme.

- 1.1 Elektrostatik.
- 1.2 Die schwingende Saite als Beispiel eines Eigenwertproblems.
- 1.3 Schallschwingungen im dreidimensionalen Raum.
- 1.4 Wärmeleitung.
  - 1.4.1 Die Wärmeleitungsgleichung
  - 1.4.2 Anfangsbedingung
  - 1.4.3 Randbedingungen und Randwertproblem
- 1.5 Elektromagnetische Feldberechnung
  - 1.5.1 Elektromagnetische Feldberechnung mit harmonischer Zeitabhängigkeit
    - 1.5.1.1 Feldgleichungen
    - 1.5.1.2 Randbedingungen
    - 1.5.1.3 Streuung
  - 1.5.2 Zeitabhängige elektromagnetische Feldberechnungen
    - 1.5.2.1 Feldgleichungen
    - 1.5.2.2 Anfangsbedingungen

### 2. Typen von Differentialoperatoren. Charakteristiken.

- 2.1 Lineare Differentialoperatoren 2. Ordnung in 2 Variablen.
  - 2.1.1 Die Charakteristikengleichung. Die 3 Typen von Differentialoperatoren.
  - 2.1.2 Diskussion von Anfangs- und Randwertproblemen bei den verschiedenen Typen von Differentialoperatoren.
    - 2.1.2.1 Hyperbolischer Typ.
    - 2.1.2.2 Elliptischer Typ.
    - 2.1.2.3 Parabolischer Typ.
- 2.2 Differentialoperatoren 2. Ordnung in mehr als 2 Variablen.
- 2.3 Differentialoperatoren höherer als 2. Ordnung..
- 2.4 n lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung in zwei Variablen.
  - 2.4.1 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen
  - 2.4.2 Hyperbolisches System
  - 2.4.3 Parabolisches System
  - 2.4.4 Maxwellsche Gln., DiracGl. mit allg. Zeitabhängigkeit, hyperbolisches System
  - 2.4.5 Maxwellsche Gln., DiracGl. mit period. Zeitabhängigkeit, elliptisches System

### 3. Allgemeine Formulierung des linearen Randwertproblems.

#### **4. Adjungierter Differentialoperator. Verallgemeinerter Greenscher Satz.**

- 4.1 Greenscher Satz für eine Variable.
- 4.2 Greenscher Satz für n Variable.
  - 4.2.1 Selbstadjungiertheit der Radialgleichung in Kugelkoordinaten
  - 4.2.2 Selbstadjungiertheit der hypergeometrischen Differentialgleichung
  - 4.2.3 Eigenschaften von Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialoperatoren
- 4.3 Die Greenschen Sätze in Vektorform
  - 4.3.1 1. Greenscher Satz
  - 4.3.2 2. Greenscher Satz

#### **5. Die Greensche Funktion als inverser Operator.**

#### **6. Krummlinige Koordinaten und Vektoranalysis**

- 6.1 Koordinatentransformationen und Basisvektoren
- 6.2 Ko- und kontravariante Koordinaten eines Vektors
- 6.3 Krummlinige orthogonale Koordinaten
- 6.4 Die Operatoren der Vektoranalysis in krummlinigen orthogonalen Koordinaten
  - 6.4.1 Der Gradient
  - 6.4.2 Die Divergenz
  - 6.4.3 Der Rotor
  - 6.4.4 Der skalare Laplaceoperator
- 6.5 Konkrete zweidimensionale krummlinige orthogonale Koordinatensysteme
  - 6.5.1 Kartesische Koordinaten
    - 6.5.1.1 Komplexe Darstellung von Koordinaten, Potential und Feld
    - 6.5.1.2 Komplexe Felddarstellung für das statische elektrische Feld
    - 6.5.1.3 Komplexe Felddarstellung für das statische magnetische Feld
  - 6.5.2 Krummlinige orthogonale Koordinaten  $u, v$  ( $\xi, \eta$ )
  - 6.5.3 Ebene Polarkoordinaten  $r, \phi$
  - 6.5.4 Ebene elliptische Koordinaten  $\eta, \psi$
  - 6.5.5 Ebene Bipolarkoordinaten  $\eta, \theta$
  - 6.5.6 Ebene parabolische Koordinaten  $\mu, \nu$
  - 6.5.7 Exzentrische ebene Polarkoordinaten  $\rho, \theta$
- 6.6 Zylindrische dreidimensionale krummlinige orthogonale Koordinatensysteme
- 6.7 Sphärische dreidimensionale krummlinige orthogonale Koordinatensysteme
- 6.8 Allgemeinere dreidimensionale krummlinige orthogonale Koordinatensysteme  
6.6 bis 6.8 sind nur teilweise ausgearbeitet
- 6.9 n-dimensionale Kugelkoordinaten
- 6.10 Spezielle Literatur

#### **7. Die Separierbarkeit der skalaren Helmholtz- und Potentialgleichung**

- 7.1 Die Separierbarkeit der zweidimensionalen Helmholtzgleichung
- 7.2 Die Separierbarkeit der zweidimensionalen Potentialgleichung
- 7.3 Die Separierbarkeit der dreidimensionalen Helmholtzgleichung
- 7.4 Die Separierbarkeit der dreidimensionalen Potentialgleichung
- 7.5 Die R-Separation der dreidimensionalen Potentialgleichung
- 7.6 Tafel der separablen Systeme
- 7.7 Table: Curvilinear systems implemented in the Mathematica Package „Calculus`Vectoranalysis“

## **8. Series and their sums**

- 8.1 Convergence of series
- 8.2 Linear series transformations for accelerating or inducing convergence
  - 8.2.1 Hölder means
  - 8.2.2 Borel summation (in preparation)
- 8.3** Non-linear series transformations for accelerating or inducing convergence. The Shanks transform
- 8.4 Asymptotic series (in preparation)

## **9. Vollständige orthogonale Funktionensysteme. Orthogonalreihen**

- 9.1 Fourierreihen.
  - 9.1.1 Klassische Theorie der Fourierreihen.
    - 9.1.1.1 Notebook: Comparison of Fourier sum, Fejer sum with exact curve
    - 9.1.1.2 Notebook: Anwendung der Shanks-Transformation zu Konvergenzbeschleunigung und -erzeugung
  - 9.1.2 Moderne Theorie der Fourierreihen.
- 9.2 Allgemeine Theorie der vollständigen orthogonalen Funktionensysteme.
  - 9.2.1 Notebook: Beispiele zum Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren
  - 9.2.2 Notebook: Examples to show Bessel's inequality and the completeness relation

## **10. Die Delta-Distribution und die Vollständigkeitsrelation**

- 10.1 Heuristische Betrachtungen.
- 10.2 Strengere Begründung der  $\delta$ -Distribution.
- 10.3 Die Vollständigkeitsrelation
  - 10.3.1 Fourierreihendarstellung der  $\delta$ -Distribution
  - 10.3.2 Fourierintegraldarstellung der  $\delta$ -Distribution
  - 10.3.3 Die Vollständigkeitsrelation in mehrdimensionalen krummlinigen orthogonalen Systemen
  - 10.3.4 Die Vollständigkeitsrelation der Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$
  - 10.3.5 Die Vollständigkeitsrelation der Besselfunktionen  $J_m(j_{mn} r/a)$  in  $0 \leq r \leq a$
  - 10.3.6 Die Vollständigkeitsrelation der Besselfunktionen  $J_m(j'_{mn} r/a)$  in  $0 \leq r \leq a$
- 10.4 Beweis einiger Vollständigkeitsrelationen
  - 10.4.1 Vollständigkeitsrelation der trigonometrischen Funktionen
  - 10.4.2 Beweis der Vollständigkeit der Besselfunktionen  $J_m(\lambda r)$  in  $0 \leq r \leq \infty$

## **11. Die Symmetrie der Greenschen Funktion.**

- 11.1.1 Skalare, selbstadjungierte Operatoren

## **12. Verfahren zur Berechnung der Greenschen Funktion.**

- 12.1 Die Methode der partikulären Integrale.
  - 12.1.1 Die Greensche Funktion eines Differentialoperators 2. Ordnung
    - 12.1.1.1 Die Greensche Funktion der schwingenden Saite
    - 12.1.1.2 Die Greensche Funktion der zeitunabhängigen Diffusionsgleichung im endlichen Intervall
    - 12.1.1.3 Die Greensche Funktion der zeitunabh. Diffusionsgl. im unendlichen Intervall
  - 12.2 Entwicklung der Greenschen Funktion nach Eigenfunktionen unter Verwendung der Vollständigkeitsrelation.
    - 12.2.1 Eindimensionaler Fall
      - 12.2.1.1 Eine Reihendarstellung der Greenschen Funktion der schwingenden Saite

- 12.2.1.2 Eine Reihenentwicklung der Greenschen Funktion der zeitunabhängigen Diffusionsgleichung im endlichen Intervall
- 12.2.2 Mehrdimensionaler Fall in krummlinigen Koordinaten
  - 12.2.2.1 Schwingungen einer dünnen, am Rande eingespannten rechteckigen Platte
- 12.3 Die Methode der schrittweisen Reduktion.
  - 12.3.1 Schwingungen einer dünnen, am Rande eingespannten rechteckigen Platte (Fts.)
- 12.4 Anpassung einer Greenschen Funktion an neue Randbedingungen
  - 12.4.1 Die Greensche Funktion der eindimensionalen, zeitunabhängigen Diffusionsgleichung für ein endliches Intervall
    - 12.4.1.1 Notebook: Anpassung einer GF an neue RB
  - 12.4.2 Die Greensche Funktion der zweidimensionalen, zeitunabhängigen Diffusionsgleichung in der unendlichen Ebene und für einen Kreis
- 12.5 Summation der Eigenfunktionsentwicklung der schwingenden Saite

### 13. Ergänzungen zur Funktionentheorie

- 13.1 Singularitäten komplexer Funktionen
  - 13.1.1 Pol n-ter Ordnung an  $z_0$
  - 13.1.2 Wesentliche Singularität der Wachstumsklasse 1 an  $z = 0$
  - 13.1.3 Notebook: Graphische Darstellung der Singularitäten komplexer Funktionen
- 13.2 Das Residuum
  - 13.2.1 Formeln zur Berechnung des Residuums an Polstellen
    - 13.2.1.1 Pol 1. Ordnung
    - 13.2.1.2 Pol n-ter Ordnung
    - 13.2.1.3 Das Residuum an der Stelle  $\infty$
- 13.3 Der Cauchysche Residuensatz
  - 13.3.1 Auswertung eines reellen Integrals mittels des Residuensatzes
- 13.4 Das Lemma von Jordan
- 13.5 Der Monodromiesatz
  - 13.5.1 Anwendungen des Monodromiesatzes
    - 13.5.1.1 Das Fourierintegral eines Pulses und seine Auswertung
- 13.6 Summation von Reihen durch Residuen
  - 13.6.1 Notebook: Summation der Fourierreihe durch *Mathematica*. Vergleich der Zeiten für das Zeichnen von Kurven
- 13.7 Der Cauchysche Hauptwert
  - 13.7.1 Notebook: Berechnung des Cauchyschen Hauptwerts in *Mathematica*
  - 13.7.2 Berechnung des Cauchyschen Hauptwerts mittels komplexer Integration
- 13.8 Verzweigungspunkte und -schnitte
  - 13.8.1 Die Methode der multiplen Polarkoordinaten
    - 13.8.1.1 Die Werteverteilung des Logarithmus
    - 13.8.1.2 Die Werteverteilung der Potenz mit rationalem Exponenten
    - 13.8.1.3 Die Werteverteilung der Potenz mit irrationalem Exponenten
    - 13.8.1.4 Die Werteverteilung der Wurzel  $\sqrt{z^2 - 1}$
  - 13.8.2 Die Benutzung des Spiegelungscharakters des Real- und Imaginärteiles von Quadratwurzeln
    - 13.8.2.1 Die Benutzung des Spiegelungscharakters des Real- und Imaginärteiles von  $f(z) = \sqrt{1 - z^2}$
- 13.9 Das Schwarze Spiegelungsprinzip
  - 13.9.1 Das Prinzip der Stetigkeit
  - 13.9.2 Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip und Folgerungen

- 13.10 Berechnen und Zeichnen zweidimensionaler Felder mittels konformer Abbildung
  - 13.10.1 Problemstellung
  - 13.10.2 Berechnung der Abbildungsfunktion
    - 13.10.2.1 Abbildung eines ebenen Kondensators auf die  $t'$ -Halbebene
    - 13.10.2.2 Abbildung der realen Konfiguration auf die  $t$ -Halbebene
      - 13.10.2.2.1 Die Abbildungsfunktion für den Spalt und die Kante eines Polschuhs
    - 13.10.2.3 Abbildung der  $t$ -Halbebene auf die  $t'$ -Halbebene durch eine Möbiustransformation
  - 13.10.3 Komplexes Potential und komplexe Felddarstellung
  - 13.10.4 Das Transformationsverhalten des zweidimensionalen Laplaceoperators, der Potentialgleichung und der Poissongleichung
  - 13.10.5 Transformation der Greenschen Funktion
  - 13.10.6 Die komplexe Greensche Funktion der Potentialgleichung
  - 13.10.7 Lösung eines Randwertproblems
    - 13.10.7.1 Bild und Mathematicaprogramm zu dessen Erzeugung für einen Plattenkondensator mit streifenförmiger Anregung
- 13.11 Literatur zu konformer Abbildung und Theorie der Teilchendetektoren

#### **14. Die Greensche Funktion der Diffusions- und Potentialgleichung im freien Raum.**

- 14.1 Zeitfreie Diffusionsgleichung und Potentialgleichung
- 14.2 Eindimensionale Diffusionsgleichung
- 14.3 Eindimensionale Potentialgleichung
- 14.4 Dreidimensionale Diffusions- und Potentialgleichung
- 14.5 Zweidimensionaler Fall
  - 14.5.1 Zweidimensionale Diffusionsgleichung
  - 14.5.2 Zweidimensionale Potentialgleichung
  - 14.5.3 Die Absteigemethode
- 14.6  $n$ -dimensionaler Fall

#### **15. Die Greensche Funktion der Helmholtzgleichung im freien Raum und in Rohren**

- 15.1 Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung und die Greensche Funktion des freien Raumes für 1, 2, 3 und  $n$  Dimensionen
- 15.2 Integraldarstellungen der Greenschen Funktion des dreidimensionalen freien Raumes in Zylinderkoordinaten
  - 15.2.1 Die Werteverteilung der Funktion  $\sqrt{(k^2 - z^2)}$  für komplexes  $z$  und  $k$
  - 15.2.2 Die Integraldarstellung mit radialen und azimuthalen Eigenfunktionen
  - 15.2.3 Die Integraldarstellung mit longitudinalen und azimuthalen Eigenfunktionen
  - 15.2.4 Die Umrechnung der beiden Integraldarstellungen
  - 15.2.5 Die Formeln von Sommerfeld und Weyrich für die dreidimensionale Greensche Funktion des freien Raumes
- 15.3 Greensche Funktionen in kreiszylindrischen Rohren
  - 15.3.1 Schallwellen in Rohren
    - 15.3.1.1 Partikuläre Lösungen der Helmholtzgleichung
    - 15.3.1.2 Wellen im Inneren von schallweichen Rohren
    - 15.3.1.3 Wellen im Inneren von schallharten Rohren
    - 15.3.1.4 Greenschen Funktionen im Inneren von schallweichen und schallharten Rohren Integraldarstellungen
    - 15.3.1.5 Greensche Funktionen im Inneren von schallweichen Rohren. Reihendarstellung
    - 15.3.1.6 Greensche Funktionen im Inneren von schallharten Rohren. Reihendarstellung

15.3.2 Potential einer Punktladung in einem metallischen Rohr

## **16. Die charakteristische Singularität der Greenschen Funktion Differentialoperatoren zweiter Ordnung**

16.1 Die Singularität Greenscher Funktionen in geschlossener Form

16.2 Auswirkung der Singularität auf die Konvergenz der Reihendarstellung

16.2.1 Das Verhalten der Greenschen Funktion der zweidimensionalen Diffusions- und Potentialgleichung

16.2.1.1 Die Diffusionsgleichung

16.2.1.2 Die Potentialgleichung

16.3 Das Potential in einem Rechteck (in Vorbereitung)

## **17. Erfüllung von Randbedingungen durch Symmetrioperationen. Konvergenzbeschleunigung von Lösungsdarstellungen durch Extraktion der Quellsingularitäten**

17.1 Spiegelung an Ebenen.

17.1.1 Spiegelung an einer Ebene

17.1.2 Homogene Randbedingung längs zweier paralleler Ebenen

17.1.2.1 Die Reihendarstellung der Greenschen Funktion der Potentialgleichung

17.1.2.2 Die Integraldarstellung der Greenschen Funktion der Potentialgleichung

17.1.2.3 Verbesserung der Konvergenz der Integraldarstellung

17.1.2.4 Notebook: Konvergenz der GF zwischen zwei parallelen leitenden Platten

17.1.2.5 Erstellung einer Reihendarstellung durch Spiegelung

17.2 Spiegelung an der Kugel.

17.2.1 Eine Punktquelle vor einer Kugel

17.2.2 Anwendung der Inversion auf die Helmholtzgleichung

## **18. Lösung inhomogener Randbedingungen mittels Greenscher Funktion.**

18.1 Allgemeine Beschreibung

18.2 Anregung eines Hohlleiters

## **19. Green's functions for problems with layers**

19.1 Continuity conditions

19.2 Green's functions for two-layer problems

19.2.1 The electrostatic two-layer problem

19.2.2 The source representation

19.2.3 Two dielectric half spaces separated by a plane interface

19.2.3.1 Computing the Green's function by image charges

19.2.3.2 Computing the Green's function by integral representations

19.3 Further examples of Green's functions for problems with several layers

19.4 References

19.5 *Mathematica* notebooks

19.5.1 Point charge  $q$  with two dielectrics. Method of images

19.5.2 Green's function for two dielectric halfspaces. Method of integral representations

19.5.3 Green's function for a condenser with two layers. Convergence acceleration by removing slowly convergent terms in the integral representation (in preparation)

**20. Die Greensche Funktion der zeitabhängigen Diffusionsgleichung.**

20.1 Definition der Greenschen Funktion.

20.2 Quellenmäßige Darstellung der Lösung.

20.3 Die Greenschen Funktion der zeitabhängigen Diffusionsgleichung im freien Raum.

20.4 Diffusionswellen

20.4.1 Ausbreitung längs eines Stabs. Die Neumannsche Lösung des eindimensionalen Falls

20.5 Die Greensche Funktion für einen Kreiszylinder mit Dirichletscher Randbedingung

**21. Die Greensche Funktion der Wellengleichung.**

21.1 Definition der Greenschen Funktion im freien Raum

21.2 Quellenmäßige Darstellung der Lösung

21.3 Berechnung der Greenschen Funktion im freien Raum

21.3.1 Dreidimensionaler Fall

21.3.2 Zweidimensionaler Fall

21.3.2.1 Die Auswertung der Integrale der Greenschen Funktion

21.3.3 Eindimensionaler Fall

21.3.3.1 Die Auswertung des Integrals

21.3.3.2 Eine zweite Methode zur Berechnung der Greenschen Funktion

## **22. Lösung der Vektorhelmholtzgleichung und der Maxwell'schen Gleichungen**

### 22.1 Der Vektor-Laplace-Operator

22.1.1 Notebook: Operationen der Vektoranalysis in Zylinderkoordinaten  $r, \phi, z$

### 22.2 Die Basisfelder $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ für die Vektorhelmholtzgleichung

22.2.1 Zylindrische Koordinaten und Felder

22.2.2 Sphärische Koordinaten und Felder

22.2.3 Die Vektorfelder  $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$  aus ebenen Wellen

### 21.2 Vektorfelder zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen

21.2.1 Vergleich zwischen den Maxwell'schen Gleichungen und der Vektorhelmholtzgleichung

### 22.3 Vektorfelder zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen

22.3.1 Vergleich zwischen den Maxwell'schen Gleichungen und der Vektorhelmholtzgleichung

### 22.4 Allgemeine Methoden zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen

22.4.1 Lösung mittels des elektrischen Hertz'schen Vektors

22.4.2 Lösung mittels des magnetischen Hertz'schen Vektors

22.4.3 Elektromagnetische Wellen einkomponentiger Hertz'scher Vektoren in zylindrischen Systemen. E- und H-Typ.

22.4.3.1 E-Typ

22.4.3.2 H-Typ

22.4.4 Lechertyp, TEM-Typ

22.5 Elektromagnetische Wellen in metallischen Rohren. Eigenschwingungen zylindrischer metallischer Hohlräume.

### 22.5.1 Zylindrischer Wellenleiter

22.5.1.1 E-Typ, E-Wellen, elektrische Moden, TM-Typ

22.5.1.2 H-Typ, H-Wellen, magnetische Moden, TE-Typ

22.5.1.3 Lecher-Typ, TEM-Mode

### 22.5.2 Zylindrischer Hohlraum

### 22.5.3 Kreiszyklindrischer Wellenleiter

22.5.3.1 E-Typ,  $E_{mn}$ -Moden

22.5.3.2 H-Typ,  $H_{mn}$ -Moden

### 22.5.4 Kreiszyklindrischer Hohlraum

22.5.4.1 E-Typ,  $E_{mnp}$ -Resonanzen

22.5.4.2 H-Typ,  $H_{mnp}$ -Resonanzen

22.5.5 Notebook: E- und H-Moden in kreiszyklindrischen Wellenleitern und Hohlräumen

### 22.5.6 Koaxialer kreiszyklindrischer Wellenleiter E-Typ, $E_{mn}$ -Moden

22.5.6.1 E-Typ,  $E_{mn}$ -Moden

22.5.6.2 H-Typ,  $H_{mn}$ -Moden

22.5.6.3 Lecher-Typ, TEM<sub>00</sub>-Mode

### 22.5.7 Rechteckiger Wellenleiter

22.5.7.1 E-Typ,  $E_{mn}$ -Moden

22.5.7.2 H-Typ,  $H_{mn}$ -Moden

### 22.5.8 Quaderförmiger Hohlraum, E.: Cuboid Cavity

22.5.8.1 E-Typ,  $E_{mnp}$ -Resonanzen

22.5.8.2 H-Typ,  $H_{mnp}$ -Resonanzen

22.5.9 Anregung von Hohlrohrwellen durch achsenparallele elektrische oder magnetische Dipole

22.5.10 Die Vollständigkeit des Systems der Hohlrohrwellen

- 22.6 Elektromagnetische Felder in sphärischen Systemen
- 22.6.1 Kugelförmiger Hohlraum. Notebook: Elektromagnetische Eigenschwingungen im Inneren einer metallischen Kugel
- 22.6.2 Hohlraum zwischen zweikonzentrischen Kugeln
- 22.6.3 Die Debye potential
- 22.7 Das Lösungsverfahren von Bromwich
- 22.7.1 E-Typ,  $H_1 \equiv 0$
- 22.7.2 H-Typ,  $E_1 \equiv 0$

## **21. Green's functions for problems with layers**

21.1 Continuity conditions

21.2 Green's functions for two-layer problems

21.2.1 The electrostatic two-layer problem

21.2.2 The source representation

21.2.3 Two dielectric half spaces separated by a plane interface

21.2.3.1 Computing the Green's function by image charges

21.2.3.2 Computing the Green's function by integral representations

21.3 Further examples of Green's functions for problems with several layers

21.4 References

21.5 *Mathematica* notebooks

21.5.1 Point charge  $q$  with two dielectrics. Method of images

21.5.2 Green's function for two dielectric halfspaces. Method of integral representations

21.5.3 Point charge in front of a dielectric sphere

21.5.4 Green's function for a condenser with two layers. Convergence acceleration by removing slowly convergent terms in the integral representation

## 22. Lösung der Vektorhelmholtzgleichung und der Maxwell'schen Gleichungen

### 22.1 Der Vektor-Laplace-Operator

22.1.1 Notebook: Operationen der Vektoranalysis in Zylinderkoordinaten  $r, \phi, z$

### 22.2 Die Basisfelder $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ für die Vektorhelmholtzgleichung

22.2.1 Zylindrische Koordinaten und Felder

22.2.2 Sphärische Koordinaten und Felder

22.2.3 Die Vektorfelder  $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$  aus ebenen Wellen

### 21.3 Vektorfelder zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen

21.3.1 Vergleich zwischen den Maxwell'schen Gleichungen und der Vektorhelmholtzgleichung

### 21.4 Allgemeine Methoden zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen

21.4.1 Lösung mittels des elektrischen Hertz'schen Vektors

21.4.2 Lösung mittels des magnetischen Hertz'schen Vektors

21.4.3 Elektromagnetische Wellen einkomponentiger Hertz'scher Vektoren in zylindrischen Systemen. E- und H-Typ.

21.4.3.1 E-Typ

21.4.3.2 H-Typ

21.4.3.3 Lechertyp, TEM-Typ

22.5 Elektromagnetische Wellen in metallischen Rohren. Eigenschwingungen zylindrischer metallischer Hohlräume.

### 21.5.1 Zylindrischer Wellenleiter

21.5.1.1 E-Typ, E-Wellen, elektrische Moden, TM-Typ

21.5.1.2 H-Typ, H-Wellen, magnetische Moden, TE-Typ

21.5.1.3 Lecher-Typ, TEM-Mode

### 21.5.2 Zylindrischer Hohlraum

### 21.5.3 Kreiszyklindrischer Wellenleiter

22.5.3.1 E-Typ,  $E_{mn}$ -Moden

22.5.3.2 H-Typ,  $H_{mn}$ -Moden

### 21.5.4 Kreiszyklindrischer Hohlraum

21.5.4.1 E-Typ,  $E_{mnp}$ -Resonanzen

21.5.4.2 H-Typ,  $H_{mnp}$ -Resonanzen

21.5.5 Notebook: E- und H-Moden in kreiszyklindrischen Wellenleitern und Hohlräumen

### 21.5.6 Koaxialer kreiszyklindrischer Wellenleiter

21.5.6.1 E-Typ,  $E_{mn}$ -Moden

21.5.6.2 H-Typ,  $H_{mn}$ -Moden

21.5.6.3 Lecher-Typ,  $TEM_{00}$ -Mode

### 21.5.7 Rechteckiger Wellenleiter

21.5.7.1 E-Typ,  $E_{mn}$ -Moden

21.5.7.2 H-Typ,  $H_{mn}$ -Moden

### 21.5.8 Quaderförmiger Hohlraum, E.: Cuboid Cavity

21.5.8.1 E-Typ,  $E_{mnp}$ -Resonanzen

21.5.8.2 H-Typ,  $H_{mnp}$ -Resonanzen

21.5.9 Anregung von Hohlrohrwellen durch achsenparallele elektrische oder magnetische Dipole

21.5.10 Die Vollständigkeit des Systems der Hohlrohrwellen

### 22.6 Elektromagnetische Felder in sphärischen Systemen

22.6.1 Notebook: Elektromagnetische Eigenschwingungen im Inneren einer metallischen Kugel

### 21.6 Das Lösungsverfahren von Bromwich

21.6.1 E-Typ,  $H_1 \equiv 0$ ,      22.6.2 H-Typ,  $E_1 \equiv 0$

### **23. Greensche Tensoren für die Vektorhelmholtzgleichung**

22.1 Greensche Tensoren für die Vektorhelmholtzgleichung im dreidimensionalen freien Raum

22.1.1 Operatordarstellung des Greenschen Tensors

22.1.2 Eigenfunktionsentwicklung des Greenschen Tensors

### **24. Greensche Tensoren für das elektromagnetische Feld in isotropen Medien.**

23.1 Verallgemeinerte Maxwellsche Gleichungen

23.2 Quellenmäßige Darstellung der Lösungen im freien Raum mittels Greenscher Tensoren

23.3 Greensche Tensoren bei Anwesenheit leitender Körper

23.4 Symmetrien der Greenschen Tensoren

23.5 Quellenmäßige Darstellung der E- und H-Felder durch Greensche Tensoren

23.6 Der Greensche Tensor des freien Raumes

23.7 Die Greenschen Tensoren des Halbraumes

23.7.1 Das Feld im Halbraum als Funktional des Randfeldes

23.8 Eigenfunktionsentwicklung des Greenschen Tensors des elektromagnetischen Feldes im freien Raum.

### **25. Green's Tensor for the Electromagnetic Field in Cylindrical Coordinates**

24.1 The vector fields, Hansen Harmonics

24.2 Green's tensors

24.2.1 General integral representation of the Green's tensor in Hansen harmonics

24.3 Representation of the Green's tensor without the irrotational Hansen harmonics

24.3.1 Representation with the unit tensor in the singular term

24.3.2 Representation with the dyadic  $\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z'$

24.3.3 Representation with the dyadic  $\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r'$

## **26. Besselfunktionen**

### 25.1 Besselfunktionen

- 25.1.1 Die Besselsche Differentialgleichung
- 25.1.2 Die Besselfunktionen als Lösungen
- 25.1.3 Das asymptotische Verhalten der Besselfunktionen
- 25.1.4 Separation der Helmholtzgleichung in Polarkoordinaten
- 25.1.5 Integraldarstellungen der Besselfunktionen
- 25.1.6 Rekursionsformeln
- 25.1.7 Unbestimmte Integrale über Besselfunktionen
- 25.1.8 Wronskische Determinanten
- 25.1.9 Umlaufsrelationen

### 25.2 Modifizierte Besselfunktionen

- 25.2.1 Die Differentialgleichung der Modifizierte Besselfunktionen
- 25.2.2 Die modifizierten Besselfunktionen
- 25.2.3 Das asymptotische Verhalten der Modifizierten Besselfunktionen
- 25.2.4 Die Integraldarstellung der Funktionen  $K_\mu(z)$
- 25.2.5 Rekursionsformeln für die Ableitungen
- 25.2.6 Die Wronskische Determinante der Modifizierten Besselfunktionen
- 25.2.7 Ein Additionstheorem

### 25.3 Sphärische Besselfunktionen

- 25.3.1 Separation der Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten
- 25.3.2 Die Differentialgleichung der sphärischen Besselfunktionen
- 25.3.3 Die sphärischen Besselfunktionen
- 25.3.4 Rekursionsformeln der sphärischen Besselfunktionen
- 25.3.5 Das asymptotische Verhalten der sphärischen Besselfunktionen
- 25.3.6 Wronskische Determinanten der sphärischen Besselfunktionen

## **27. Periodische Differentialgleichungen**

### 26.1 Die Hillsche Differentialgleichung und spezielle Fälle

### 26.2 Problemstellungen, die zu periodischen Differentialgleichungen führen

#### 26.2.1 Randwertprobleme

#### 26.2.3 Dynamische Probleme mit periodischen Differentialgleichungen

#### 26.3.1 Das Hillsche Mondproblem

#### 26.3.2 Starke Fokussierung in einem Beschleuniger

#### 26.3.3 Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt I

#### 26.3.4 Abschließende Bemerkungen

### 26.4 Ein erster Überblick über die Mathiesche Differentialgleichung und deren Lösungen

#### 26.4.1 Die Eigenschwingungen der elliptischen Membran

#### 26.4.2 Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt II

### 26.5 Grundlegende Eigenschaften der Hillschen und der Mathieschen Differentialgleichung. Das Theorem von Floquet

#### 26.5.1 Das Fundamentalsystem der Mathieschen Differentialgleichung

#### 26.5.2 Der Satz von Floquet für die Mathiesche Differentialgleichung

#### 26.5.3 Der charakteristische Exponent und die Periodizitätsgleichung

##### 26.5.3.1 Definition der ganzperiodischen und halbperiodischen Lösungen

##### 26.5.3.2 Die Periodizitätsgleichung der Mathieschen Differentialgleichung

##### 26.4.3.3 Fundamental-periodische Lösungen

#### 26.5.4 Der Satz von Ince

- 26.5.4.1 Der Unterschied zwischen der Mathieugleichung und anderen periodischen Differentialgleichungen
  - 26.5.4.2 Folgerungen aus dem Satz von Ince
  - 26.5.4.3 Die vier Typen von fundamentalperiodischen Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung
  - 26.5.4.4 Die vier Typen von Lösungen, die komplementär zu den fundamentalperiodischen Lösungen sind
  - 26.5.4.5 Der charakteristische Exponent
  - 26.6 *Mathematica* Notebook: Beispiele zu Mathieufunktionen
  - 26.7 Anwendungen der Mathieufunktionen
    - 26.6.1 Das Pendel mit periodisch bewegter Aufhängung III
    - 26.6.2 Das gedämpfte Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt
    - 26.6.3 Die starke Fokussierung des Synchrotrons
  - 26.7 Anwendungen der Mathieuschen Differentialgleichung
  - 26.8 Die Meissnersche Differentialgleichung
  - 26.9 Hills equation: Even and odd solutions
  - 26.10 Appel's Theorem for a certain third order differential equation
- Literaturverzeichnis