

# Kapitel 10

## Verschränkte Zustände

Die Möglichkeit der Verschränkung mehrerer Freiheitsgrade spielt in der Quantenmechanik eine zentrale Rolle und unterscheidet sie essentiell von der klassischen Physik. Wir werden in diesem Kapitel einige wichtige Aspekte und Anwendungen besprechen. Einen reinen Quantenzustand mit zwei Sätzen  $A$  und  $B$  von Freiheitsgraden nennt man einen Produktzustand (s. Kap. 9), wenn er von der Form

$$|\psi_{\text{gesamt}}\rangle = |\varphi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B \quad (10.1)$$

ist. Verschränkt ist ein reiner Zustand, wenn er von der Form

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle_A \otimes |\chi_n\rangle_B \quad (10.2)$$

mit mehr als einem Summanden ist und nicht durch Faktorisierung in die Form eines einzelnen Produktzustands gebracht werden kann.

Im vorigen Kapitel haben wir festgestellt, dass im Falle von Verschränkung quantenmechanische Interferenzeffekte verschwinden können, wenn man nur ein Teilsystem untersucht. In Kap. 10.1 und 10.2 werden wir Auswirkungen auf den quantenmechanischen Messprozess selber und auf die makroskopisch auftretende Dekohärenz behandeln. In Kap. 10.16 werden wir sehen, dass experimentelle quantenmechanische Korrelationen von verschränkten Zuständen nicht klassisch erklärt werden können, selbst nicht durch unendlich viele sogenannte verborgene Parameter. In Kap. 10.4 werden wir auf Anwendungen von Verschränkung eingehen, mit der sogenannten Quanteninformation und als abschließendes Beispiel der Quantenteleportation.

## 10.1 Der Messprozess

Wir schauen uns genauer an, was bei einer Messung geschieht. Das betrachtete quantenmechanische System  $S$  liege in einem reinen Zustand  $|\psi\rangle$  vor. Wir messen eine Observable  $A$  mit zugehörigem Operator (Analytiker)  $\hat{A}$ . Das Spektrum von  $\hat{A}$  sei diskret, mit Eigenvektoren  $|n\rangle$ :

$$\hat{A}|n\rangle = a_n|n\rangle. \quad (|n\rangle \text{ hieß zuvor } |a_n\rangle) \quad (10.3)$$

Den Zustand kann man nach den Eigenvektoren von  $\hat{A}$  entwickeln:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle. \quad \text{z.B. } | \text{Spalt } 1 \rangle, | \text{Spalt } 2 \rangle \quad (10.4)$$

Als einfaches Beispiel betrachten wir den Fall, dass zu  $|\psi\rangle$  nur zwei Eigenvektoren von  $\hat{A}$  beitragen:

$$|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle. \quad (10.5)$$

Der Dichteoperator dieses reinen Zustands ist

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_0 &= |\psi\rangle\langle\psi| = (c_1|1\rangle + c_2|2\rangle)(c_1^*\langle 1| + c_2^*\langle 2|) \\ &\equiv \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1c_2^* \\ c_1^*c_2 & |c_2|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Während der Messung tritt das System  $S$  mit einem Messapparat  $M$  in Wechselwirkung und anschließend wird das Messergebnis von einem Beobachter abgelesen. Die quantenmechanischen Postulate sagen aus, dass bei einer Messung von  $A$  nur die Eigenwerte  $a_n$  von  $\hat{A}$  vorkommen, und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $|\langle n|\psi\rangle|^2 = |c_n|^2$ . Diese Aussage kann man auch so auffassen, dass sich das System unmittelbar nach der Messung in dem gemischten Zustand

$$\hat{\rho}_I = \sum_n |c_n|^2 |n\rangle\langle n| \quad (\text{Wie?}) \quad (10.7)$$

befindet. Im betrachteten Beispiel wird dies in der Matrixdarstellung zu

$$\rho_I = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & 0 \\ 0 & |c_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (10.8)$$

Die Wahrscheinlichkeiten kann man vielleicht als die noch vorliegende Unkenntnis des Messergebnisses interpretieren. Beim Ablesen nimmt der Beobachter dann wie in der klassischen Statistik Kenntnis vom Messergebnis und weiß dann, dass das System in einem einzelnen Eigenzustand  $|n\rangle$  ist, d.h.  $\hat{\rho}$  wird weiter reduziert zu

$|4\rangle \approx |4\rangle$   $\hat{S}_R \rightarrow \hat{\rho}_{II} = |n\rangle\langle n|$  . Wie? s.s. 262 (10.9)

Im quantenmechanischen Zustand  $|\psi\rangle$  können die beitragenden Zustände  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$  bei geeignetem experimentellen Aufbau miteinander interferieren (s. Kap. 9.1), über Nichtdiagonalelemente  $\langle 1|\hat{B}|2\rangle = \text{tr}(\hat{B}|2\rangle\langle 1|)$  einer zugehörigen Observablen  $\hat{B}$ . Dazu müssen im Dichteoperator (10.6) Nichtdiagonalterme wie  $|2\rangle\langle 1| \hat{=} c_1^* c_2$  vorhanden sein. Dagegen enthält (10.8) nur noch klassische Wahrscheinlichkeiten; dort fehlen die Nichtdiagonalterme.

Die beschriebenen Übergänge von  $\hat{\rho}_0$  nach  $\hat{\rho}_I$  und dann nach  $\hat{\rho}_{II}$  (oder auch direkt  $\hat{\rho}_0$  nach  $\hat{\rho}_{II}$ ) bereiten allerdings große Schwierigkeiten bei der Interpretation. Die sogenannte Kopenhagensche Interpretation der Quantenmechanik spricht hier vom „Kollaps der Wellenfunktion“ ( $\hat{\rho}_0$  nach  $\hat{\rho}_{II}$ , oder äquivalent  $|\psi\rangle$  nach  $|n\rangle$ ), im Unterschied zur sonst vorliegenden unitären Zeitentwicklung gemäß der Schrödingergleichung. (Fußnote S.263)

Ein eklatantes Beispiel ist Schrödingers berühmte Katze (1935): Sie ist in einem Kasten eingesperrt, in den man nicht hineinschauen kann. Innerhalb des Versuchszeitraums soll in dem Kasten mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  Gift ausströmen (ausgelöst zum Beispiel durch den Zerfall eines Atoms), wodurch die Katze stirbt. Ob die Katze lebt oder nicht, erfährt man aber erst beim Öffnen des Kastens. Unmittelbar vorher sieht man sich anscheinend gezwungen, ihren Zustand mit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} ( |\text{lebendig}\rangle + |\text{tot}\rangle )$$

falsch! Siehe Seite 263

anzugeben. Dies ist sehr merkwürdig. Hat man es mit einer makroskopischen Überlagerung von lebendiger und toter Katze zu tun? Ist das sinnvoll? Entscheidet sich erst bei der Beobachtung, ob die Katze lebt? Sollte man auch den Beobachter mit in das quantenmechanische System miteinbeziehen? Muss man die Wechselwirkung mit der sonstigen Umgebung berücksichtigen? Wie kommt man von mikroskopischer Quantenmechanik zu makroskopischem Determinismus? Wie geht man mit

## 10.1. Der Messprozess

der Wahrscheinlichkeitsinterpretation um? Diese und verwandte Fragestellungen sind unter dem Namen „Messproblem“ bekannt. Dazu gibt es trotz jahrzehntelanger Versuche immer noch keine allgemein akzeptierte Interpretation.

Man kommt weiter, wenn man auch die Zeitentwicklung des Messapparates quantenmechanisch mit berücksichtigt. Der Messapparat befinde sich vor der Messung im Zustand  $|M_0\rangle$ . Der Gesamtzustand von System und Messapparat sei vor der Messung

$$|\psi\rangle \otimes |M_0\rangle \equiv |\psi, M_0\rangle. \quad (10.10)$$

Er faktorisiert in die Anteile  $|\psi\rangle$  des Systems und  $|M_0\rangle$  des Messapparats. M soll ein Messapparat in folgendem Sinne sein: Wenn S vor der Messung im Zustand  $|k\rangle$  ist, soll es nach der Messung weiter „im Zustand  $|k\rangle$ “ sein, und der Messapparat soll in den Zustand  $|M_k\rangle$  übergehen (z.B. mit der Zeigerstellung k). Wir betrachten nun die quantenmechanische Zeitentwicklung des Gesamtsystems bei der Messung, die ganz normal über den Zeitentwicklungsoperator abläuft:

$$|\psi, M_0\rangle = \sum_n c_n |n, M_0\rangle \longrightarrow |\psi_{gesamt}\rangle = \sum_n c_n |n, M_n\rangle. \quad (10.11)$$

Der Endzustand ist jetzt zwischen System und Messapparat verschränkt; er faktorisiert nicht mehr. Er ist aber nach wie vor ein reiner Zustand.

Der Beobachter registriert (misst) am Ende die Zeigerstellung des Messapparates. Zum eigentlichen System S hat er bei der betrachteten Situation keinen weiteren Zugang. Seine Wechselwirkung findet nur mit dem Messapparat statt. Seine Situation wird daher durch eine reduzierte Dichtematrix beschrieben, in der nur die Zustände des Messapparates auftauchen:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\text{Messapparat}} &= \text{tr}_{\text{System}} |\psi_{gesamt}\rangle \langle \psi_{gesamt}| \\ &= \text{tr}_{\text{System}} \sum_{n,m} c_n c_m^* |n, M_n\rangle \langle m, M_m| \\ &= \sum_n |c_n|^2 |M_n\rangle \langle M_n|. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Dies entspricht einer Matrix ohne Interferenzterme, in der die erwarteten Wahrscheinlichkeiten  $|c_n|^2$  für die einzelnen Messergebnisse auftauchen.

\* Dem Zustand, zu dem sich  $|k\rangle$  entwickelt, wird hier der Einfachheit halber weiter der Name  $|k\rangle$  gegeben.

\*) Aber weiterhin Ableasen  $\rightarrow |M_n\rangle\langle M_n|$  mit festem  $n$ . D.h.  $|\psi\rangle \rightarrow |n, M_n\rangle$   
D.h. plötzlicher Kollaps von (10.12), nicht-unitär!  $\rightarrow$  Siehe aber die Fußnote.

## Kapitel 10. Verschränkte Zustände

Der Übergang von der quantenmechanischen Situation mit Interferenz hin zu klassischen Wahrscheinlichkeiten ( $\hat{\rho}_0$  zu  $\hat{\rho}_I$ ) geschieht somit durch die reduzierte Beobachtung nur des Messapparates statt des Gesamtsystems. (Bei Schrödingers Gedankenexperiment könnte man die Katze auch als makroskopischen Messapparat interpretieren, der detektiert, ob das auslösende Ereignis, z.B. der mikroskopische Zerfall eines Atoms, stattgefunden hat.) \*

d.h. zunächst verschränkter Zustand  $| \text{Atom zerfallen, Katze tot} \rangle + | \text{Atom nicht zerfallen, Katze lebendig} \rangle$   
dann bei Beobachtung nur der Katze:  $(1/2) | \text{lebendig} \rangle + (1/2) | \text{tot} \rangle$  : gemischter Zustand!

Dies klärt aber nicht die Frage, wie man das Vorhandensein von Wahrscheinlichkeiten statt klassischem Determinismus interpretieren sollte. In Kapitel 10.3 werden wir sehen, dass eine zunächst naheliegende Interpretation als statistisches Gemisch von einzelnen Realisierungen mit jeweils vorbestimmtem Ergebnis („verborgene Variablen“) im Widerspruch zum Experiment steht. 

## 10.2 Dekohärenz

Es gibt einen weiteren wichtigen Mechanismus, durch den quantenmechanische Interferenzeffekte in der makroskopischen Welt drastisch reduziert werden, die sogenannte Dekohärenz aufgrund von Wechselwirkungen mit den vielen Freiheitsgraden der äußeren Welt.

Wir betrachten der Einfachheit halber wieder ein Teilchen (System) im reinen Zustand

$$|\psi\rangle_S = c_1 |1\rangle_S + c_2 |2\rangle_S,$$

mit der Dichtematrix (10.6).

Die Wechselwirkung mit der Umgebung erfolgt zum Beispiel durch Streuung von (in der Regel zahlreich vorhandenen) Photonen an dem Teilchen. Bei einer einzelnen Streuung sei das Photon zunächst im Zustand  $|i\rangle_P$ . Der Zustand des Photons nach der Streuung wird vom Zustand des Teilchens

Zum Kollaps, S.261 Überraschenderweise bekommt man bei aufeinanderfolgenden Messungen dieselben Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Kombinationen von Messergebnissen, wenn man bei der mathematischen Beschreibung einer Messung nicht die Reduktion (Kollaps) von  $\hat{\rho}$  auf nur noch einen Term  $|M_n\rangle\langle M_n|$  (oder von  $|\psi\rangle$  auf  $|n\rangle$ ) vornimmt, sondern die Zeitevolution durchgehend unitär beschreibt (s. Basdevant/Dalibard S. 110ff). Dann wäre die Zeitevolution reversibel! Mit Kollaps laut Postulaten der QM ist sie bei Messungen irreversibel. Der Unterschied wäre im Prinzip experimentell klärbar! (?)   
  


(N.B.: Diese Beschreibung über Wahrscheinlichkeiten von Kombinationen von Messergebnissen ohne Kollaps ist der Zugang eines (unnötig kompliziert formulierten) QM-Formalismus namens "Consistent Histories".)

## 10.2. Dekohärenz

(z.B. dem Ort) abhängen. Wir können schematisch schreiben

$$\underline{|n\rangle_S \otimes |i\rangle_P} \rightarrow \underline{|\tilde{n}\rangle_S \otimes |n\rangle_P}$$

Dabei haben wir den Zustand des Teilchens nach der Streuung  $|\tilde{n}\rangle_S$  genannt. Wir nehmen an, dass das Teilchen vor der Streuung in einem Produktzustand mit dem Photon ist. Bei der Streuung wird daraus (völlig analog zur obigen Rechnung bei der Messung)

$$|\psi\rangle_S \otimes |i\rangle_P = \left( \sum_n c_n |n\rangle_S \right) \otimes |i\rangle_P \rightarrow |\psi_{\text{gesamt}}\rangle = \sum_n c_n (|\tilde{n}\rangle_S \otimes |n\rangle_P). \quad (10.13)$$

ein weiterhin reiner, aber nun mit dem Photon verschränkter Zustand.

Wenn wir annehmen, dass die beitragenden Endzustände des Photons orthogonal sind,  ${}_P\langle 1|2\rangle_P = 0$ , dann ist die reduzierte Dichtematrix des Systems

$$\tilde{\rho}_S = \text{tr}_P |\psi_{\text{gesamt}}\rangle \langle \psi_{\text{gesamt}}| = \dots \hat{=} \begin{pmatrix} |c_1|^2 & 0 \\ 0 & |c_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (10.14)$$

Hier fehlen die Interferenzterme!

Man kann, realistischer, auch zulassen, dass die Endzustände  $|n\rangle_P$  des Photons zueinander nicht orthogonal sind. Dann taucht in den Nichtdiagonalelementen ihr Überlapp  ${}_P\langle 1|2\rangle_P$  auf, der in der Regel klein sein wird, insbesondere wenn die Zustände  $|1\rangle_S$  und  $|2\rangle_S$  des Systems sich makroskopisch unterscheiden (z.B. weit auseinanderliegende Orte). Wenn ein weiteres Photon an  $|\psi_{\text{gesamt}}\rangle$  streut, mit Endzuständen  $|n_P^{(2)}\rangle$ , dann taucht in der reduzierten Dichtematrix bei den Nichtdiagonalelementen das Produkt  ${}_P\langle 1^{(1)}|2^{(1)}\rangle_P \cdot {}_P\langle 1^{(2)}|2^{(2)}\rangle_P \ll 1$  auf. Mit jeder weiteren Streuung verringert sich die Größe der Nichtdiagonalelemente. Das Gesamtsystem mit Teilchen und allen Photonen befindet sich in einem reinen Zustand, der viele Summanden hat. Die reduzierte Dichtematrix dagegen wird bei zunehmender Zahl von Streuungen immer ähnlicher zu klassischen Situation (10.8): das System verliert seine Kohärenz. !

In einem realen System sind makroskopisch viele Photonen und andere Teilchen enthalten, die auf sehr kurzen Zeitskalen miteinander wechselwirken. Dadurch bekommt man automatisch den Übergang von mikroskopischer zu makroskopischer Physik: die mikroskopischen quantenmechanischen Interferenzeffekte gehen bei makroskopischen Objekten (z.B. ?

$$\tilde{S}_{Katte} = \frac{1}{2} |tot\rangle \langle tot| + \frac{1}{2} |lebendig\rangle \langle lebendig|$$

Kapitel 10. Verschränkte Zustände

auch bei Schrödingers Katze! meist sehr schnell verloren und es ist in der Regel sehr schwierig, quantenmechanische Kohärenz experimentell stabil zu halten. Es gibt aber spektakuläre Ausnahmen, bei denen makroskopisch viele Teilchen im selben Quantenzustand sind, der deswegen stabil ist, insbesondere die Suprafluidität und die Supraleitung.

! ⚠  
(Energie-Lücke)

### 10.3 EPR-Paradoxon und Bellsche Ungleichungen

Einstein war zeitlebens unzufrieden damit, dass die Quantenmechanik nur statistische Aussagen macht, was in seinem berühmten Zitat zum Ausdruck kommt

Dass [der Herrgott] würfelt und sich telepathischer Mittel bedient (wie es ihm von der gegenwärtigen Quantentheorie zugemutet wird), kann ich keinen Augenblick glauben.

Könnte vielleicht der Ausgang von Messungen durch verborgene Parameter fest bestimmt sein? Dann wäre die Quantenmechanik in Wirklichkeit deterministisch, so wie die klassische Mechanik. Einstein, Podolsky und Rosen (EPR) schlugen dazu 1935 ein Gedankenexperiment vor. Jahrzehnte später konnte damit, nach einer Analyse von John Bell 1964 und mit Experimenten seit den 1970er Jahren diese Frage geklärt werden.

Wir betrachten eine modifizierte Variante des Experiments, die auf D. Bohm zurückgeht. Im Laborsystem liege ein Teilchen mit Spin Null vor, das in zwei Teilchen A und B mit Spin 1/2 zerfällt, die voneinander wegfliegen.<sup>2</sup> Quantenmechanisch sind diese Teilchen miteinander verschränkt. (Kap 10.3.1)



Wir warten, bis die Teilchen weit voneinander entfernt sind und führen dann Messungen der Spins durch. Die Messungen sollen so kurz hintereinander erfolgen, dass sich die Messergebnisse bei Berücksichtigung der Lichtgeschwindigkeit nicht beeinflussen können.<sup>3</sup>

Wenn man nur bei Teilchen A misst, findet man bezüglich jeder beliebigen Messrichtung  $\vec{n}$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Messergebnisse  $+\frac{\hbar}{2}$  und  $-\frac{\hbar}{2}$ , im Mittel über viele Versuchsläufe also Null. Das Gleiche findet man, wenn man nur bei Teilchen B misst.

<sup>2</sup>Analoge Experimente können auch mit Photonen durchgeführt werden.  
<sup>3</sup>Seit den 1980er Jahren ist dies tatsächlich experimentell möglich geworden.

### 10.3. EPR-Paradoxon und Bellsche Ungleichungen

Aufgrund der Drehimpulserhaltung muss aber das Gesamtsystem weiterhin den Spin Null haben. Man messe zum Beispiel den Spin von A in der z-Richtung, etwa mit dem Ergebnis  $+\frac{\hbar}{2}$ . Dann muss eine Messung des Spins von B in derselben Richtung den Wert  $-\frac{\hbar}{2}$  ergeben. Das Ergebnis der zweiten Messung kann man also vorhersagen.

Diese Korrelation der Messergebnisse bei derselben Messrichtung ist aber noch nicht der ganze quantenmechanische Effekt. Sie ähnelt der klassischen Situation, dass man eine rote und eine schwarze Kugel auf zwei Behälter verteilt. Wenn dann im ersten Behälter die rote Kugel gefunden wird, muss der zweite Behälter mit Sicherheit die schwarze Kugel enthalten.

Messbare Unterschiede zwischen klassischer Physik und Quantenmechanik bezüglich sehr allgemeiner angenommener verborgener Variablen erhält man, wenn man den Spin der beiden Teilchen in *unterschiedlichen Richtungen* misst, wie wir gleich zeigen werden. Wir führen dazu zwei getrennte Analysen durch, einmal mit angenommenen verborgenen Variablen und einmal gemäß der üblichen Quantenmechanik.

#### 10.3.1 Lokale realistische Theorien (hypothetisch)

Eine sogenannte „realistische“ Theorie definieren EPR als eine Theorie, bei der gilt

Kann man den Wert einer physikalischen Größe mit Sicherheit vorhersagen, ohne ein System zu stören, dann gibt es ein Element der physikalischen Realität, das dieser Größe entspricht.

Diese Formulierung ist bewusst operational gewählt. Die „Elemente der physikalischen Realität“ sind die erwähnten verborgenen Variablen. Wir machen jetzt die Annahme, dass die korrekte Theorie der Welt in diesem Sinne „realistisch“ ist.

Zusätzlich machen wir die Annahme der „Lokalität“, d.h. dass es keine Wechselwirkung gibt, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit (oder sogar instantan) ausbreitet.

Wir analysieren den oben beschriebenen Fall, dass die Messung von  $S_z$  am Teilchen A den Wert  $\frac{\hbar}{2}$  ergab. Dann können wir das Messergebnis bei B mit

Sicherheit vorhersagen, ohne B zu stören. Nach dem zitierten Realitätskriterium folgt, dass das Teilchen B im Beispiel tatsächlich eine Eigenschaft „ $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ “ besitzt.

Wir könnten bei A auch  $S_x$  messen und dann  $S_x$  bei B korrekt vorhersagen. Wegen der angenommenen Lokalität kann die Wahl der Messrichtung<sup>4</sup> bei A die Messergebnisse bei B nicht beeinflussen<sup>5</sup>. Daher muss B auch eine Eigenschaft „ $S_x$ “ besitzen.

S.u.

Der Widerspruch dieser Aussage zur Quantenmechanik, in der wegen  $[\hat{S}_z, \hat{S}_x] \neq 0$  nicht beide Spinrichtungen scharfe Werte haben können, ist das „Paradoxon“ von EPR.

Die obige Überlegung gilt für jede Richtung  $\vec{n}$  und auch bei Vertauschung der Rollen von A und B. In einer „lokalen realistischen Theorie“ müssen deswegen die Messergebnisse für jedes Teilchen A und B und jeder Messrichtung schon vor der Messung festliegen.

→ viele Parameter!

### Bellsche Ungleichung

John Bell gelang es 1964, experimentell überprüfbare Vorhersagen aus der Annahme einer lokalen realistischen Theorie herzuleiten.

Dazu muss man bei Teilchen A und B den Spin in unterschiedlichen Richtungen messen. Jede Einzelmessung liefert ein Ergebnis  $\pm \frac{\hbar}{2}$ . Wir definieren die Korrelationsfunktion

$$C(\vec{a}, \vec{b}) := P_{++} + P_{--} - P_{+-} - P_{-+}, \quad (10.15)$$

wobei z.B.  $P_{+-}$  die Wahrscheinlichkeit sein soll, bei der Messung von A in Richtung  $\vec{a}$  den Wert  $+\frac{\hbar}{2}$  zu finden und beim selben Zerfall bei B in Richtung  $\vec{b}$  den Wert  $-\frac{\hbar}{2}$ .

<sup>4</sup>Sie wurde im Experiment tatsächlich sehr schnell lokal und zufällig variiert.

<sup>5</sup>Die einfachste Version einer verborgenen Variablen, nämlich dass jedes der beiden Teilchen nach dem Zerfall eine feste Spin-Richtung besäße, ist schon mit diesem experimentellen Ergebnis nicht kompatibel. Wenn die Spin-Richtung etwa  $\pm \vec{e}_z$  wäre, dann wären die Messergebnisse von A und B bezüglich  $\vec{e}_x$  nicht korreliert. Im Mittel hätten die Messergebnisse bezüglich derselben Messachse bei A und B dann nicht die experimentell gefundene perfekte Korrelation.



### 10.3. EPR-Paradoxon und Bellsche Ungleichungen

Behauptung: Bei Annahme einer lokalen realistischen Theorie gilt die

#### BELLSCHE UNGLEICHUNG

$$|C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + C(\vec{b}, \vec{c}). \quad (10.16)$$

Beweis: In jeder der drei Richtungen  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  können bei A die Messergebnisse  $\pm \frac{\hbar}{2}$  vorkommen. Die relativen Anteile dieser 8 Fälle bezeichnen wir mit  $n(\alpha_A, \beta_A, \gamma_A)$ , wobei  $\alpha_A, \beta_A, \gamma_A = \pm 1$ . Nach Annahme einer realistischen Theorie liegen diese Anteile gleichzeitig fest und es ist

$$\sum_{\alpha_A, \beta_A, \gamma_A} n(\alpha_A, \beta_A, \gamma_A) = 1.$$

Die Korrelationsfunktion kann man dann auffassen als  $C(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \alpha_A \beta_B \rangle$ . Wegen des Gesamtspins von Null ist der Messwert  $\beta_B$  bei B bezüglich der Richtung  $\vec{b}$  gleich dem Negativen des Messwerts  $\beta_A$  bei A bezüglich derselben Richtung, d.h.  $\beta_B = -\beta_A$ . Aus  $\langle \alpha_A \beta_B \rangle$  wird dann

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{\alpha_A, \beta_A, \gamma_A} n(\alpha_A, \beta_A, \gamma_A) \alpha_A \cdot (-\beta_A),$$

und daher (wir lassen den Index  $_A$  jetzt fort): *(alles:  $\alpha, \beta, \gamma$ )* {

$$\begin{aligned} C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{c}) &= - \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) \alpha(\beta - \gamma) \\ &= - \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) \alpha\beta(1 - \beta\gamma) \end{aligned}$$

wegen  $\beta^2 = 1$ . Wegen  $\alpha\beta = \pm 1$  folgt

$$|C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{c})| \leq \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) (1 - \beta\gamma) = 1 + C(\vec{b}, \vec{c}),$$

was zu zeigen war.

### 10.3.2 Quantenmechanische Analyse

#### Singulett

Die beiden Teilchen A und B entstehen beim Zerfall eines Teilchens ohne Spin. Ihr gemeinsamer quantenmechanischer Zustand muss deshalb den Gesamtspin Null haben, d.h. er darf sich unter Rotationen nicht verändern. Der Gesamtdrehimpulsoperator ist hier

$$\vec{J} = \vec{S}_A + \vec{S}_B, \quad (10.17)$$

wobei  $\vec{S}_A$  nur auf den Spin von A wirkt und  $\vec{S}_B$  nur auf den Spin von B. Eine Basis für den gemeinsamen Zustand von A und B bekommt man aus dem Produkt der einzelnen Basisvektoren als

$$|\uparrow, \uparrow\rangle, |\downarrow, \downarrow\rangle, |\uparrow, \downarrow\rangle, |\downarrow, \uparrow\rangle,$$

wobei die erste Position für Teilchen A und die zweite für Teilchen B stehen soll, und  $|\uparrow\rangle$  und  $|\downarrow\rangle$  hier für  $|+z\rangle$  und  $|-z\rangle$ . Die gewünschte Linearkombination, die sich unter Drehungen mit

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \varphi \vec{n} \cdot \vec{J}}$$

nicht ändert, und daher den Zustand von A und B beschreibt, ist das Singulett

(english: "singlet")

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle \right). \quad (10.18)$$

Es hat wegen der Rotationsinvarianz dieselbe Darstellung auch bezüglich jeder anderen Basisrichtung  $\vec{n}$ . Dies kann man am einfachsten verifizieren, indem man  $(\hat{J})^2$  anwendet und dabei benutzt, dass A und B jeweils Teilchen mit Spin  $j = \frac{1}{2}$  sind. Für das einzelne Teilchen A gilt

$$\text{Op. } S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = (\vec{S}_A)^2 |\pm z\rangle_A = \hbar^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) |\pm z\rangle_A = \hbar^2 \frac{3}{4} |\pm z\rangle_A.$$

und für den Gesamtzustand

$$\begin{aligned} (\vec{J})^2 |\psi_S\rangle &= (\vec{S}_A + \vec{S}_B)^2 |\psi_S\rangle \\ &= \left( (\vec{S}_A)^2 + (\vec{S}_B)^2 + 2\vec{S}_A \vec{S}_B \right) |\psi_S\rangle. \end{aligned} \quad (10.19)$$

### 10.3. EPR-Paradoxon und Bellsche Ungleichungen

$\vec{J}^2 |j, m\rangle$   
 $\hat{J}_z |j, m\rangle$

Durch Benutzen der Paulimatrizen sieht man, dass

$$\hat{S}_A^x \hat{S}_B^x |\psi_S\rangle = \hat{S}_A^y \hat{S}_B^y |\psi_S\rangle = \hat{S}_A^z \hat{S}_B^z |\psi_S\rangle = -\frac{\hbar^2}{4} |\psi_S\rangle,$$

und die Beiträge in Gl. (10.19) heben sich insgesamt zu Null auf. Das Singulett ist also tatsächlich ein Eigenzustand von  $(\hat{J})^2$ , mit Eigenwert  $\hbar^2 j(j+1) = 0$ , d.h. mit  $j = 0$ .

N.B.

Die drei anderen Zustände  $|\uparrow, \uparrow\rangle$ ,  $|\downarrow, \downarrow\rangle$  und  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle)$  bilden zusammen das Spin-Triplett ( $j=1$ ) mit Gesamtspin  $1 \cdot \hbar$  und mit  $m = 1, m = 0, m = -1$ .

Wichtig ist, dass das Singulett ein verschränkter Zustand ist. Eine EPR-Analyse kann man analog zu der hier besprochenen auch mit dem  $m = 0$  Zustand des Triplets oder mit verschränkten Zuständen von Photonen durchführen.

### Quantenmechanische Korrelationen

Die Berechnung der Korrelationen  $C(\vec{a}, \vec{b})$  ist am einfachsten, wenn wir  $\vec{a}$  als z-Achse definieren, d.h.  $|\pm a\rangle \equiv |\pm z\rangle$ . Die Basisvektoren  $|\pm b\rangle$  kann man in der z-Basis schreiben (2.28):

$$\begin{aligned} |+\vec{b}\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |+\vec{z}\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |-\vec{z}\rangle \\ |-\vec{b}\rangle &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |+\vec{z}\rangle - e^{i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |-\vec{z}\rangle, \end{aligned}$$

wobei  $\theta$  und  $\varphi$  die Polarkoordinaten von  $\vec{b}$  sind. Die Wahrscheinlichkeit  $P_{++}$  aus Gl. (10.15) ist für den Zustand  $|\psi_S\rangle$ :

$$\begin{aligned} P_{++} &\equiv \left| \langle \psi_S | \underline{+a}, +b \rangle \right|^2 \quad (\underline{+a} = \underline{+z}) \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle +z, -z | \underline{+z}, +b \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -z, +z | \underline{+z}, +b \rangle \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{A \langle +z | +z \rangle_A}_{=1} \underbrace{B \langle -z | +b \rangle_B} - \underbrace{A \langle -z | +z \rangle_A}_{=0} \underbrace{B \langle +z | +b \rangle_B}_{\text{(korrigiert 28.6.2021)}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \tag{10.20}$$

wobei nur der erste Summand des Singulettts beiträgt.  $P_{--}$  führt auf dasselbe Ergebnis. Für  $P_{+-}$  erhalten wir analog  
(via  $\langle +z | -b \rangle$ )

$$\left| \langle \psi_S | +a, -b \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle +z, -z | +z, -b \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} {}_B \langle -z | -b \rangle_B \right|^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

ebenso wie für  $P_{-+}$ , und damit für die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} \underline{C(\vec{a}, \vec{b})} &= P_{++} + P_{--} - P_{+-} - P_{-+} \\ &= \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ &= -\cos \theta = \underline{-\vec{a} \cdot \vec{b}}. \end{aligned} \tag{10.21}$$

### 10.3.3 Vergleich

Wir wählen nun

$$\vec{a} = (0, 0, 1), \quad \vec{b} = (0, 1, 0), \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1).$$

Dann ist die quantenmechanische Vorhersage für die linke der Bellschen Ungleichung (10.16)

$$|C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{c})| = \left| 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \simeq 0.707.$$

Dies ist aber viel größer als das quantenmechanische Ergebnis für die rechte Seite

$$1 + C(\vec{b}, \vec{c}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.293.$$

und steht somit im Widerspruch zur Bellschen Ungleichung, welche unter der Annahme einer lokalen realistischen Theorie hergeleitet worden war.

Entscheiden kann nur das Experiment. Die Ergebnisse der zahlreichen und immer genauer durchgeführten Experimente, u.a. auch mit analogen Verschränkungen von Photonen, ist eindeutig: sie sind mit dem quantenmechanischen Ergebnis verträglich, aber die Bellschen Ungleichungen sind verletzt. Eine lokale realistische Theorie im Sinne von EPR ist somit nicht mit dem Experiment verträglich.

Nobelpreis 2022:  
A. Aspect, J. Clauser  
(+ A. Zeilinger u.a. für  
Quantenteleportation, s.u.)

S.a. Bachelorarbeit und Vortrag zu Bells Theorem und Experimenten, Alexander Ferk 2020, verfügbar im TeachCenter.

## 10.4 Quanteninformation

In den letzten Jahren hat die sogenannte Quanteninformationstheorie einen stürmischen Aufschwung genommen, vor allem wegen immer besserer experimenteller Möglichkeiten. Dazu gehören zum einen die Überprüfung quantenmechanischer Vorhersagen auf mikroskopischer Skala, wie sie bei Entwicklung der Quantenmechanik noch kaum vorstellbar war. Zum anderen gehört dazu die Nutzung quantenmechanischer Effekte für neue Anwendungen. Am stärksten sind diese bei Zwei-Zustands-Systemen, den sogenannten Qubits, für die es unterschiedlichste Realisierungen gibt.

Während ein klassisches Bit nur die Werte 0 und 1 haben kann, gibt es bei einem Qubit

$$\frac{1}{\sqrt{1 + |\alpha|^2}} \left( |0\rangle + \alpha |1\rangle \right)$$

einen kontinuierlichen komplexen Parameter  $\alpha$ , so dass in einem Qubit mehr Information enthalten ist.

Man erreicht neue Möglichkeiten, indem man mehrere (idealerweise viele) Qubits miteinander verschränkt und passend manipuliert. Dabei ist es wichtig und sehr schwer zu erreichen, dass die Manipulationen kohärent ablaufen, so dass z.B. die Phaseninformation in den Parametern  $\alpha$  und zwischen den beteiligten Qubits nicht verlorengehen. <-> Fehlerkorrektur

Zu den spektakulären Möglichkeiten gehören zum Beispiel die Quantenkryptographie, die schon kommerziell angewendet wird, die noch zu besprechende Quantenteleportation auf dem Niveau einiger Qubits, und als Fernziel der Quantencomputer, bei dem besonders viele Qubits über längere Zeit kohärent über sogenannte Quanten-Gatter manipuliert werden müssen. Dort wird die Verschränkung ausgenutzt, um, zumindest in der Theorie, mit wachsender Qubit-Zahl exponentiell mal schneller rechnen zu können als auf klassischen Computern. Ungeklärt ist (sogar prinzipiell), ob sich die Dekohärenz genügend klein halten lässt.

## 10.5 Verschränkungsmaß

Verschränkung zwischen Freiheitsgraden ist charakteristisch für die Quantenmechanik und Grundlage der Quanteninformationsanwendungen. Oh-

## 10.5. Verschränkungsmaß

*Zwischen den Anteilen*

ne Verschränkung verbleiben nur Produktzustände, mit denen keine Interferenzeffekte auftreten können. Es ist daher relevant zu fragen, wie man Verschränkung quantifizieren kann. ✓

### 10.5.1 Schmidt-Zerlegung

(-> SVD, Anhang A.11)

Wir teilen ein quantenmechanisches Gesamtsystem in zwei beliebige Untersysteme A und B auf (so wie zuvor „Umgebung“ und „System“).

Es seien  $|j\rangle_A$  orthonormale Basiszustände von A, und  $|k\rangle_B$  von B. Ein allgemeiner reiner Zustand des Gesamtsystems kann dann als Linearkombination

$$|\Psi\rangle = \sum_{j,k} c_{jk} |j\rangle_A |k\rangle_B, \quad (10.21)$$

geschrieben werden, mit Koeffizienten  $c_{jk}$ . Wir fassen nun  $c_{jk}$  als Matrix auf und verwenden die Singulärwertzerlegung (Anhang A.11) dieser Matrix:

$$(c_{jk}) = \tilde{U} \tilde{D} \tilde{V}^\dagger, \quad \text{mit unitären } \tilde{U} \text{ und } \tilde{V}. \quad (10.22) \quad ✓$$

In Komponenten wird daraus  $c_{jk} = \sum_{\alpha=1}^{\chi} \lambda_{\alpha} \tilde{U}_{j\alpha} (\tilde{V}_{\alpha k})^\dagger$ , wobei  $\chi$  der Rang der Matrix  $c_{jk}$  ist, der in diesem Zusammenhang „Schmidt-Rang“ genannt wird. Weil  $\tilde{U}$  und  $\tilde{V}$  unitär sind, kann man zwei Basistransformationen durchführen:  $|A\rangle_{\alpha} := \sum_j \tilde{U}_{j\alpha} |j\rangle_A$  und  $|B\rangle_{\alpha} := \sum_k (\tilde{V}^\dagger)_{\alpha k} |k\rangle_B$  und den Zustand  $|\Psi\rangle$  in der neuen Basis ausdrücken:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha=1}^{\chi} \lambda_{\alpha} |A\rangle_{\alpha} |B\rangle_{\alpha}, \quad \text{mit } \chi \leq \min(\dim(A), \dim(B)). \quad (10.23)$$

Diese sogenannte Schmidt-Zerlegung eines Zustands  $|\Psi\rangle$  in zwei Untersysteme existiert immer! Der Rang  $\chi$  ist höchstens so groß wie die Hilbertraumdimension des kleineren Untersystems.

Aus der Normierung  $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$  folgt

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2 = 1. \quad (10.24)$$

## 10.5.2 Reduzierte Dichtematrix

Die gesamte Dichtematrix des reinen Zustands  $|\Psi\rangle$  ist  $\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle\Psi|$ .

Mit der Schmidtzerlegung wird daraus

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha=1}^x \sum_{\beta=1}^x \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \underline{|A\rangle_{\alpha} |B\rangle_{\alpha} \langle A|_{\beta} \langle B|_{\beta}}$$

Die reduzierte Dichtematrix für das Teilsystem A erhält man, indem man die Spur über alle Freiheitsgrade des Teilsystems B bildet:

$$\hat{\rho}_A = \text{tr}_B \hat{\rho} = \sum_{\gamma} \langle B|_{\gamma} \hat{\rho} |B\rangle_{\gamma} \quad (10.25)$$

Weil die Basiszustände orthonormal sind, trägt nur  $\alpha = \beta = \gamma$  bei und man erhält

$$\hat{\rho}_A = \sum_{\gamma=1}^x \lambda_{\gamma}^2 |A\rangle_{\gamma} \langle A|_{\gamma} \quad (10.26)$$

Dies ist die Spektraldarstellung der Dichtematrix, mit den Gewichten (Wahrscheinlichkeiten)  $\lambda_{\gamma}^2$ . Aus der Schmidt-Zerlegung erhält man somit sofort die reduzierte Dichtematrix.

s.a. S. 253

Genauso erhält man die reduzierte Dichtematrix des Systems B:

$$\hat{\rho}_B = \sum_{\gamma=1}^x \lambda_{\gamma}^2 |B\rangle_{\gamma} \langle B|_{\gamma} \quad (10.27)$$

## 10.5. Verschränkungsmaß

### 10.5.3 Von Neumannsche Verschränkungsentropie

Das wichtigste Maß für die Verschränkung zweier Teilsysteme hat schon von Neumann formuliert.

Es ist analog aufgebaut wie die Entropie eines klassischen statistischen Systems. Dort ist die Dichtematrix in den klassischen Zuständen diagonal und besteht aus den Boltzmannengewichten  $p_i \sim \exp(-E_i/(k_B T))$ . Die klassische Entropie kann man dann in der Form

$$S = -\text{tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}). \quad = - \sum_i p_i \ln(p_i)$$

$$S = - \left( p_1 p_2 p_3 \dots \right) \quad \checkmark$$

schreiben.

Für ein quantenmechanisches System ist die von Neumannsche Verschränkungsentropie zwischen zwei Teilsystemen A und B analog über die reduzierte Dichtematrix definiert:

$$S_A := -\text{tr}_A(\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A) \quad (10.29)$$

In den Schmidt-Basen ist die reduzierte Dichtematrix gemäß (10.26) diagonal. Dann kann man den Logarithmus einzeln für jede Komponente nehmen und aus (10.29) wird

$$S_A = - \sum_{\gamma=1}^{\chi} \lambda_{\gamma}^2 \ln \lambda_{\gamma}^2 \equiv S_B. \quad (10.30)$$

Die Verschränkungsentropie des Teilsystems A relativ zu B ist daher dieselbe wie die von Teilsystem B relativ zu A.

Den maximal möglichen Wert bekommt  $S_A$ , wenn alle  $\lambda_{\gamma}$  gleich sind, d.h.  $\lambda_{\gamma}^2 = \frac{1}{\chi}$  wegen der Normierung  $\sum_{\gamma} \lambda_{\gamma}^2 = 1$ . Die reduzierte Dichtematrix ist dann proportional zur Einheitsmatrix (hier ohne Beweis)

$$\hat{\rho}_A = \frac{1}{\chi} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (10.31) \quad \checkmark$$

und  $S_A$  ist

$$S_A = -\chi \left( \frac{1}{\chi} \ln \frac{1}{\chi} \right) = \ln \chi. \quad (10.32) \quad \checkmark$$

## 10.6. No-Cloning-Theorem

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$$

$$S_A = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

Beispiele:

- Bei einem Produktzustand  $|\psi\rangle = |A\rangle|B\rangle$  ist  $\chi = 1$  und  $\lambda = 1$ , daher  $\ln \lambda = 0$  und  $S_A = 0$ , wie erwartet.
- Bei einem Singulett ist die Form

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B \right)$$

(dies ist schon die Schmidt-Zerlegung)

vgl. S. 298

schon die Schmidt-Zerlegung, mit  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Die reduzierte Dichtematrix ist

$$\hat{\rho}_A = \sum_{\alpha=1}^2 \lambda_{\alpha}^2 |A\rangle_{\alpha} \langle A| = \frac{1}{2} \left( |\uparrow\rangle_A \langle\uparrow| + |\downarrow\rangle_A \langle\downarrow| \right)$$

$$\hat{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_A \hat{=} \frac{1}{2} \mathbb{1}_A \quad \text{gleich}$$

Entropie  $S_A = -2 \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \right) = \ln 2 = \ln \chi$ . Da  $\chi = 2$  auch die Dimension der Hilberträume  $\{\uparrow, \downarrow\}$  der einzelnen Teilchen ist, sind sie maximal verschränkt! Sie können nicht mit weiteren Teilchen verschränkt sein. !

## 10.6 No-Cloning-Theorem

Klassische Bits kann man mit hoher Genauigkeit kopieren und weiterverarbeiten. Dadurch sind effiziente Fehlerkorrekturverfahren realisierbar, die klassische Computer weitgehend resistent gegen gelegentlich auftretende Bit-Fehler machen.

Bei Qubits ist eine zuverlässige Kopie für alle möglichen Zustände des Qubits aber nicht möglich, wie wir gleich zeigen werden. Manipulationen in der Quantenmechanik verlaufen über die Anwendung von unitären Operatoren (Zeitentwicklungsoperatoren). Ein Operator  $\hat{U}$ , der den Zustand  $|\psi\rangle$  eines Qubits A auf ein anderes Qubit B im anfänglichen Zustand  $|i\rangle$  kopiert, müsste folgendes leisten:

$$\hat{U} \left( |\psi\rangle_A |i\rangle_B \right) = |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B$$

und ebenso für einen anderen anfänglichen Zustand  $|\varphi\rangle_A$ :

$$\hat{U} \left( |\varphi\rangle_A |i\rangle_B \right) = |\varphi\rangle_A |\varphi\rangle_B$$

(das Minuszeichen kann in die Def. der Basisvektoren verschoben werden, z.B. Umdef. von  $|\uparrow\rangle_B$  um einen Faktor -1

Das Skalarprodukt der beiden linken Seiten muss gleich dem der beiden rechten Seiten sein:

$$\left( {}_A\langle\psi| {}_B\langle i| \right) \hat{U}^\dagger \hat{U} \left( |\varphi\rangle_A |i\rangle_B \right) = {}_A\langle\psi| {}_B\langle\psi| |\varphi\rangle_A |\varphi\rangle_B.$$

Außerdem muss die linke Seite wegen  $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{1}$  auch gleich  ${}_A\langle\psi| {}_B\langle i| |\varphi\rangle_A |i\rangle_B$  sein. Daraus folgt

$${}_A\langle\psi|\varphi\rangle_A {}_B\langle\psi|\varphi\rangle_B = {}_A\langle\psi|\varphi\rangle_A \underbrace{{}_B\langle i|i\rangle_B}_{=1}.$$

$|\varphi\rangle_B, |\psi\rangle_B$  sind Kopien von  $|\varphi\rangle_A, |\psi\rangle_A$ . Daher ist  ${}_A\langle\psi|\varphi\rangle_A = {}_B\langle\psi|\varphi\rangle_B$  und es folgt  $\langle\psi|\varphi\rangle^2 = \langle\psi|\varphi\rangle$

mit den Lösungen  $\langle\psi|\varphi\rangle = 1$  (d.h.  $|\psi\rangle = |\varphi\rangle$ ) und  $\langle\psi|\varphi\rangle = 0$ . Deswegen können zusätzlich zu einem bestimmten Zustand  $|\psi\rangle$  höchstens noch orthogonale weitere Zustände  $|\varphi\rangle$  kopiert werden, aber nicht beliebige Qubits. Darüberhinaus kann man zeigen, dass auch gemischte Zustände nicht kopiert werden können.

## 10.7 Quanten-Teleportation

Ein Verfahren zur Quantenteleportation wurde erstmals 1993 von Peres et al. vorgeschlagen. Die ersten experimentellen Realisierungen gelangen 1997 in Innsbruck in der Gruppe von A. Zeilinger und etwa zeitgleich auch in Großbritannien. Wegen der Komplexität der tatsächlichen experimentellen Realisierung soll hier vor allem die zugrundeliegende Idee dargestellt werden.

Nobelpreis 2022:  
A. Zeilinger  
(+Aspect, Clauser  
für Experimente zu  
Bellschen Ungleichungen)

Der grundsätzliche Aufbau ist in Abb. 10.7 wiedergegeben. Ziel ist es, den quantenmechanischen Zustand

$$|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (10.34)$$

eines Teilchens „C“ auf ein anderes Teilchen „B“ zu übertragen. Das ursprüngliche Teilchen C liegt bei „Alice“ vor und das Teilchen B soll schließlich mit Hilfe von „Bob“ in den richtigen Zustand gelangen. Wegen des No-Cloning Theorems kann sich nach dem Experiment das Teilchen C nicht mehr im ursprünglichen Zustand befinden. Zu beachten ist auch, dass generell nicht Teilchen teleportiert werden, im Sinne der Science Fiction Literatur, sondern „nur“ die quantenmechanischen Zustände existierender Teilchen.

N.B. Zustand des einzelnen Teilchens C kann von Alice \*nicht\* durch eine Messung bestimmt werden!  
Beispiel (Spinsprache):  $|\varphi\rangle = |+\rangle + |-\rangle$  (Alice nicht bekannt).  
Alice macht eine Messung, z.B. in z-Basis  
-> Messergebnis  $|+\rangle$  oder  $|-\rangle$ , beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit (siehe Stern-Gerlach),  
d.h. Zustand  $|\varphi\rangle$  ist Alice dann NICHT bekannt, aber ist verändert (-> keine weitere Messung sinnvoll)

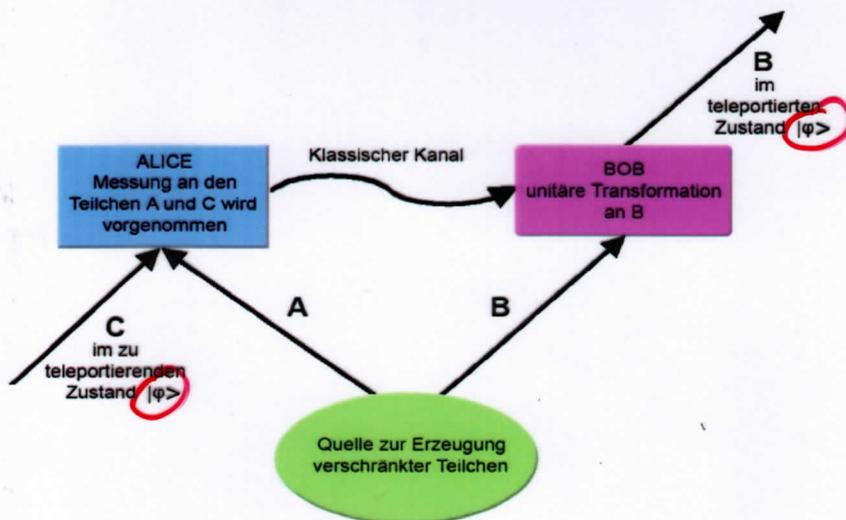


Abbildung 10.1: Schema der Quantenteleportation (Chr. Weiss, Bachelorarbeit 2007)

Als ersten Schritt erzeugt eine Quelle ein Paar von Teilchen A und B, in der Regel Photonen, in einem verschränkten Zustand. Dann nimmt Alice an den Teilchen A und C eine Messung vor, die diese beiden Teilchen in einen verschränkten Zustand bringen. Das Ergebnis der Messung übermittelt Alice über einen klassischen Kanal an Bob. Das Teilchen B wird ebenfalls an Bob geschickt. Abhängig vom übermittelten Messergebnis muss Bob noch eine Transformation am Teilchen B vornehmen (wie z.B.  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ ). Danach befindet sich das Teilchen B im gewünschten Zustand.

Zur formalen Darstellung benötigen wir die sogenannte Bell-Basis für die Zustände von zwei Qubits A und B:

$$\begin{aligned}
 |\Psi^-\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |0\rangle_A |1\rangle_B - |1\rangle_A |0\rangle_B \right) \\
 |\Psi^+\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |0\rangle_A |1\rangle_B + |1\rangle_A |0\rangle_B \right) \\
 |\Phi^-\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |0\rangle_A |0\rangle_B - |1\rangle_A |1\rangle_B \right) \\
 |\Phi^+\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B \right).
 \end{aligned}$$

Diese Basis ist analog zur Basis von Singulett (entspricht  $|\Psi^-\rangle$ ) und Triplet, verwendet aber ausschließlich verschränkte Zustände.

## 10.7. Quanten-Teleportation

Die Quelle soll den verschränkten Zustand  $|\Psi^+\rangle_{AB}$  erzeugen. Dies geschieht zum Beispiel, indem aus einem hochenergetischen Photon an einem doppeltbrechenden Kristall zwei verschränkte Photonen werden. Zu Beginn befindet sich das Gesamtsystem dann im Zustand

$$|\psi\rangle_{\text{gesamt}} = |\varphi\rangle_C \cdot |\Psi^+\rangle_{AB} . \quad (10.34)$$

*Produkt*

Diesen Zustand kann man auch anders schreiben, nämlich in der Bell-Basis von A und C, multipliziert mit Zuständen von B. Eine kurze Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} 2 |\psi\rangle_{\text{gesamt}} &= |\Psi^+\rangle_{AC} \cdot |\varphi\rangle_B \\ &+ |\Psi^-\rangle_{AC} \cdot \sigma_3 |\varphi\rangle_B \\ &+ |\Phi^+\rangle_{AC} \cdot \sigma_1 |\varphi\rangle_B \\ &+ |\Phi^-\rangle_{AC} \cdot (-i\sigma_2) |\varphi\rangle_B . \end{aligned} \quad (10.35)$$

Alice misst nun (experimentell aufwendig), welcher der vier Bell-Zustände von A und C vorliegt. Nach der Messung befinden sich A und C dann tatsächlich in dem entsprechenden Zustand. Sie sind durch die Messung verschränkt worden. Gleichzeitig ist damit gemäß (10.35) auch der Zustand von Teilchen B bekannt. Alice übermittelt ihr Messergebnis auf klassischem Weg an Bob. Je nach Messergebnis muss Bob entweder nichts tun (bei  $|\Psi^+\rangle_{AC}$ ) oder den Zustand des Teilchens B noch geeignet manipulieren.

Im ersten Experiment 1997 konnte nur  $|\Psi^-\rangle_{AC}$  überhaupt detektiert werden, mit Hilfe der Antisymmetrie der Wellenfunktion, und man hat sich die Transformation am Teilchen B gespart. Es fand also nur in einem viertel der Fälle eine „Teleportation“ statt.

Inzwischen ist Teleportation im beschriebenen Sinne auch für verschränkte Paare von Teilchen demonstriert worden, oder über sehr große Abstände von ca. 100km, etc. Das Gebiet befindet sich in ständiger Weiterentwicklung, ebenso wie die Quanteninformationstheorie insgesamt.

(Zeilinger)