8 Renormierungsgruppe

(Viele Gebiete der Physik)
Vorher schon ähnlich in QED.

Fragestellung:

- Warum gibt es Universalität und Universalitätsklassen?
- Warum gibt es Beziehungen zwischen den kritischen Exponenten
  „Skaling Thermodynamische Ungleichungen“: tatsächlich Gleichungen

Antworten darauf und analytische Zugänge zu komplizierteren Systemen aus der „Renormierungsgruppe“(RG): K.G. Wilson 1971. → Nobelpreis 1982, Revolution...

Auch analyt. Zugang! (Störungsth.)

Allgemeine Idee: ↳ (Gittereichtheorie 1974, Kondo-Lösung 1975)

- Ändere iterativ die Längenskala auf der man ein System betrachtet, durch Entfernung von Freiheitsgraden
- Beschreiben mittels einer effektiven Hamilton-Funktion
- Am kritischen Punkt ($\xi = \infty$) bleiben physikalische Eigenschaften bei der Transformation erhalten => Fixpunkt der RG-Transformation

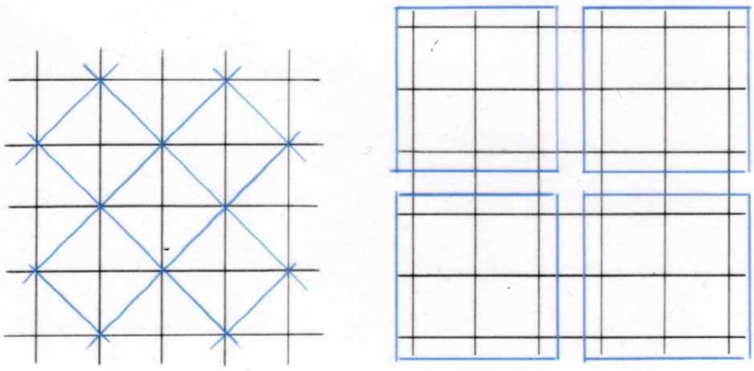
8.1 RG-Transformation

(hier: eine Variante im Ortsraum)

Reduziere die Anzahl der Freiheitsgrade $N \to N'$: „Skalen Faktor“$b^d = \frac{N}{N'}$ oder fasse jeweils $3x3$ Plätze zu einem neuen Platz zusammen ($b = 3$).

Neue Spin-Konfiguration: neue Freiheitsgrade sollen dieselbe Anzahl von Werten haben (Ising: 2 Werte). ("Block-Spin": Kadanoff 1965)

Beispiel: $b = \sqrt{2}$



$b = 3$

Abbildung 8.1: Möglichkeiten zur Reduktion der Freiheitsgrade

Wertzuweisung: z.B. Majoritätsentscheidung: 3x3 Spins $\to s'$ oder „Integration“über die Weggelassenen Freiheitsgrade (z.B. im Impulsraum: integriere über hohe Impulse).

↳ z.B. Feldtheorie

Forderung: Zustandssumme soll dem Wert nach gleich bleiben. Die neuen Freiheitsgrade wechselwirken mit einer neuen Hamiltonfunktion.

$$\boxed{Z = \sum_{\{s\}} e^{-\mathcal{H}} \overset{!}{=} \sum_{\{s'\}} e^{-\mathcal{H}'} = Z'}$$

(im ersten Schritt: $\mathcal{H} = \beta H$) (schreibe $\mathcal{H}$ statt βH)
s... alte Freiheitsgrade
s'... neue (weniger) Freiheitsgrade

Dies definiert eine Abbildung $\boxed{\mathcal{H} \to \mathcal{H}' =: R\mathcal{H}}$
R... Transformation ↑ Transformation (formale Def.)

Skalierungen

Z konstant ⇒
- Freie Energie pro Spin: $f'(\mathcal{H}') = b^d f(\mathcal{H})$
- Längenskalen: $r \to r' = \frac{1}{b} r$
  speziell $\xi \to \xi' = \frac{1}{b}\xi$
- Impulse $p \to p' = bp$
- Man findet, dass Spins ebenfalls reskaliert werden sollten: $s_r \to s'_{r'} = \frac{1}{c} s_{r'}$
  Dann gilt $G(\vec{r}, \mathcal{H}) = c^2 G(\vec{r'}, \mathcal{H}')$ (Korrel.fkt.)

Fixpunkt:
$\xi' = \frac{1}{b}\xi < \xi$ außer $\xi = 0$ oder ∞
Am Fixpunkt gilt: $\mathcal{H} = \mathcal{H}' =: \mathcal{H}*$ (nur bei unendlich großen Systemen)

Beispiele:

- $T = \infty$: völlig ungeordnetes System $\xi = 0$
- $T = 0$: meist völlig geordnetes System. Bei $h > 0$ ist $\langle s_i \rangle = 1$, daher gilt: $\xi = 0$, da verbundene Korrelationsfunktion $G_c = \langle s_0 s_r \rangle - \langle s_0 \rangle \langle s_r \rangle \approx \cancel{e^{-\frac{r}{\xi}}}$ sogar $s_i = 1$
  ≈ 0 $= 1 - 1 \times 1 = 0$
- $T = T_c$: $\xi = \infty$

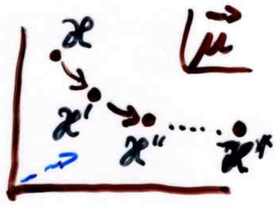
8.2 RG-Fluss im Parameterraum

In der folgenden Herleitung gibt es Inkonsistenzen zwischen h und βh.

$\mathcal{H}$ ist eine Summe von Funktionen von (eventuell vielen) Spins. Schar aller solcher Funktionen sei $\{f_\alpha\}$ oder $\vec{f}$.
Beispiele: $\cancel{f_{(1)}(s_i) = s_i,\ f_{(2)}(s_i, s_j) = s_i s_j}$, $f_1 = \sum_i s_i$, $f_2 = \sum_{<ij>} s_i s_j$, $f_3 = \sum_{<ijk>} s_i s_j s_k$ ...
zusätzliche Parameter (wie h, J_{ij}): $\vec{\mu}$
d.h. $\boxed{\mathcal{H} = \sum_\alpha \mu_\alpha f_\alpha = \vec{\mu}\vec{f}}$

⚠ Die RG-Transformation vergrößert meist sehr schnell die Zahl der (von Null verschiedenen) Parameter ($\to$ später).

RG-Transformation:
$\mathcal{H}' = R(\mathcal{H})$ und $\mathcal{H} = \vec{\mu}\vec{f}$
und somit:
$\boxed{\vec{\mu}' = R(\mu)}$ <==> $\mathcal{H}' = \vec{\mu}'\vec{f}$



↑ Transf. der Parameter (der Einfachheit halber mit denselben Buchstaben R)

Am Fixpunkt gilt: $\vec{\mu} = \vec{\mu'} = \vec{\mu}^*$

In der Nähe des Fixpunktes (versuche) Linearisierung (manchmal sind höhere Ordnungen nötig)

$\vec{\mu} = \vec{\mu}^* + \delta\vec{\mu}$ ($\delta\vec{\mu}$.. kleine Abweichung vom Fixpunkt)
$\vec{\mu'} = \vec{\mu}^* + \delta\vec{\mu'}$

Linearisierte RG-Transformation im Parameterraum

Linearisierung: $\boxed{\delta\vec{\mu'} = A(\vec{\mu}^*)\delta\vec{\mu}}$
mit der RG-Matrix $A(\vec{\mu}^*)$ mit Eigenwerten λ_i und Eigen~~funktionen~~ vektoren v_i.

Iteration von RG-Transformationen:

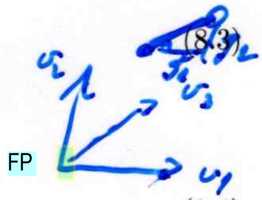
$$\delta\vec{\mu}'' = A_{b_2}\delta\vec{\mu}' = \underbrace{A_{b_2}A_{b_1}}_{A_{b_1 b_2}}\delta\vec{\mu} \tag{8.1}$$

$A_{b_1 b_2}$ ist die RG-Transformation mit Skalenfaktor $b_1 \cdot b_2$. Daraus folgt die folgende Gruppeneigenschaft (daher Renormierungs*gruppe*):

$$\text{Eigenwerte:} \quad \lambda(b_2)\cdot\lambda(b_1) = \lambda(b_1 \cdot b_2) \quad \text{(wenn Eigenvektoren passend)} \tag{8.2}$$

Betrachte den Fall, dass Skalenfaktoren b kontinuierliche Werte annehmen (z.B. Impulsraum-Skala), dann folgt die Lösung

$$\boxed{\lambda_i = b^{y_i}} \tag{8.3}$$



mit "kritischen Exponenten" y_i.

Darstellung in der Eigenbasis von A:

Fixpunkt: $\vec{g} = 0$

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}^* + \sum_i g_i \vec{v}_i \qquad \vec{\mu'} = \vec{\mu}^* + \sum_i g'_i \vec{v}_i \tag{8.4}$$

$$\Rightarrow \quad g_i{}' = \lambda_i g_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_i{}' = b^{y_i} g_i} \tag{8.5}$$

Dabei bezeichnet g_i den Abstand vom Fixpunkt in Richtung des Eigenvektors $\vec{v}_i$. Es gilt $b > 1$.

Fallunterscheidung:

$y_i > 0$: g_i *wächst* bei der RG-Transformation, d.h. das System entfernt sich vom Fixpunkt in Richtung $\vec{v}_i$, außer wenn $g_i = 0$. Man spricht von einer "relevanten Variablen" g_i. Eine solche muss passend eingestellt werden, damit man zum Fixpunkt kommt. Beispiele: Im Ising-Modell sind Magnetfeld ($h = 0$) und Temperatur ($T = T_c$) relevante Variablen.

$y_i < 0$: g_i *schrumpft*, das System nähert sich dem Fixpunkt bei der RG-Transformation. $\Rightarrow$ Der Anfangswert von g_i ist egal (solange er klein genug für die Linearisierung ist). g_i ist eine "irrelevante Variable".

Gleicher Fixpunkt bedeutet, dass die Physik bei großen Abständen gleich ist !

! $\Rightarrow$ Universalität: Verschiedene physikalische Systeme haben denselben Fixpunkt ($\Rightarrow$ dasselbe kritische Verhalten (s.u.)). wenn sie sich nur um irrelevante Kopplungen unterscheiden

$y_i = 0$: In der linearen Näherung bleibt g_i konstant. "marginale Variable" $\Rightarrow$ Es ist eine Näherung höherer Ordnung nötig.

(s.u.) !

- Bei $y_i = 0$ ist es auch möglich, dass die kritischen Exponenten sich kontinuierlich als Funktion eines Parameters in $\mathcal{H}$ ändern, d.h. *keine* Universalität! Selten: (Nur?) 2-dim XY-Modell (s.u.) plus verwandte Modelle z.B. 2-dim SOS-Modell und 1-dim Spin-1/2-Quanten-Heisenberg-Modell (Spin-Kopplung nicht isotrop).

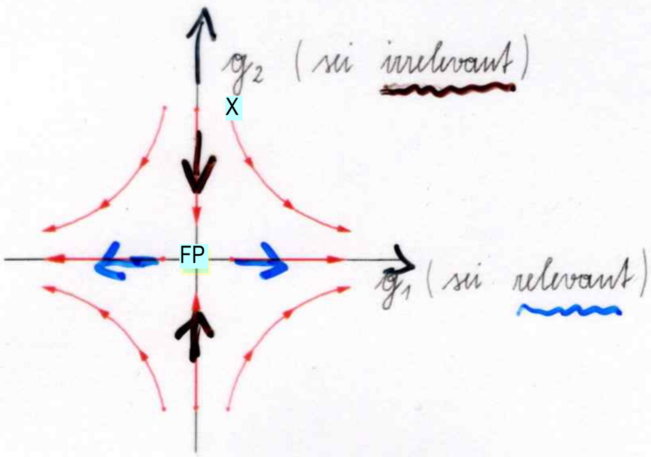


Abbildung 8.2: Renormierungsgruppenfluss für relevante/irrelevante Parameter.

!

- In der Regel gibt es nur wenige relevante Parameter. Beispiele:
  - Magnetische Systeme: 2 relevante Parameter: h, T
  - 3-dim Flüssigkeiten: ebenfalls 2 relevante Parameter: p, T
- Welche Parameter relevant sind und die Werte der kritischen Exponenten y_i hängen vom Fixpunkt ab. !
- Ein System heißt "renormierbar", wenn die Anzahl der relevanten Parameter endlich ist.

N.B.: Forderung von 1) Renormierbarkeit, 2) Lorentzinv. und 3) Darstellung über Lagrangeformalismus führt zur QED ! (oder hoch nichtlinearen Lagrangefunktionen)

N.B. Elementarteilchenphysik: "Kontinuumslimes"

1. Beschreibe System auf grober Skala (oder mit kleinem maximalen Impuls)
2. Verfeinere die Skala → brauche eventuell mehr Parameter
3. Forderung (nötig???): Kontinuumslimes existiert, d.h. die Raumzeit hat keine räumlich diskrete Struktur

Crossover: z.B. Situation mit 2 Fixpunkten: Fixpunkt A mit 1 relevanten und 1 irrelevanten Kopplung, Fixpunkt B mit 2 irrelevanten Kopplungen. Beim ursprünglichen System mit diesen Kopplungen "läuft" das System bei einer RG-Transformation (d.h. betrachten auf gröberer Skala) zunächst näher zu A, dann zu B. Beispiel: Scheibe mit sehr großem Radius: System wirkt bei kleinen ξ 3-dimensional, danach 2-dimensional. (Entlang der RG-Fluss-Linie wächst die Korrelationslänge ξ.)

siehe Abb. S.69

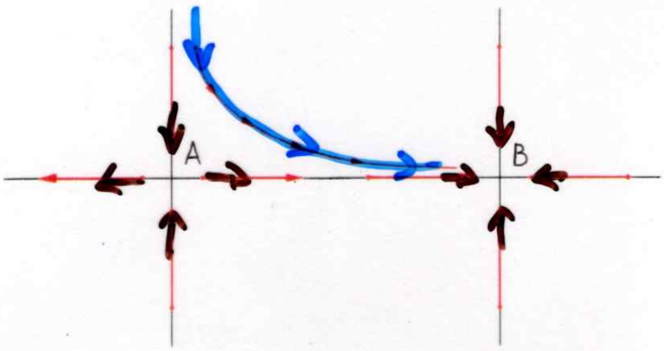


Abbildung 8.3: Crossover im Parameterraum. A hat einen relevanten Freiheitsgrad (x-Richtung), B hat nur irrelevante Freiheitsgrade.

8.3 Skalenverhalten und kritische Exponenten

Zur Erinnerung: Aus den thermodynamischen Definitionen folgen die "Skalenrelationen" (Ungleichungen)

$$\alpha + 2\beta + \gamma \geq 2 \tag{8.6}$$

$$\alpha + \beta\,(1+\delta) \geq 2 \tag{8.7}$$

Mit Annahme über die Form der Korrelationsfunktion folgen auch die "Hyperscaling-Relationen"

$$\gamma \leq (2-\eta)\,\nu \tag{8.8}$$

$$d\,\nu \geq 2-\alpha \tag{8.9}$$

In Wirklichkeit findet man, dass diese Beziehungen als Gleichungen erfüllt sind. !

Erklärung durch die Renormierungsgruppe

Die freie Energie pro Spin verhält sich bei RG-Transformationen wie $f' = b^d f$, d.h. $f\,(\vec{\mu}') = b^d f\,(\vec{\mu})$. Nahe am Fixpunkt ergibt dies

$$f\,(\overbrace{g_1', g_2', \ldots}^{\vec{\mu}'}) = b^d f\,(\overbrace{g_1, g_2, \ldots}^{\vec{\mu}}) \tag{8.10}$$

(8.5) : $g_i' = b^{y_i} g_i$

$$\Rightarrow \quad f\,(b^{y_1} g_1, b^{y_2} g_2, \ldots) = b^d f\,(g_1, g_2, \ldots) \tag{8.11}$$

Beispiel: Magnet: Man findet, dass dort nur 2 relevante Parameter existieren, nämlich $g_1 = t = \frac{T-T_c}{T_c}$ und $g_2 = h$, d.h. hier gilt (bei kleinen t und h)

$$f\,(t, h, g_3, \ldots) = b^{-d} f\,(b^{y_1} t, b^{y_2} h, b^{y_3} g_3, \ldots) \tag{8.12}$$

Gleichung für das Ising Modell selbst

Beispiel: **Kritischer Exponent α:** spezifische Wärme

$$c \sim \left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_{h=0} \overset{!}{\sim} |t|^{-\alpha} \tag{8.13}$$

hier:

$$\frac{\partial^2 f\,(t, h=0, \ldots)}{\partial t^2} = b^{-d} b^{2y_1} \left.\frac{\partial^2 f\,(g_1', g_2'=0, \ldots)}{\partial g_1'^2}\right|_{g_1'=b^{y_1} t} \tag{8.14}$$

Gleichung 8.14 stellt einen Bezug her zwischen der Wärmekapazität $\frac{\partial^2 f(t,..)}{\partial t^2}$ bei Temperatur t (linke Seite) und Temperatur $g_1' = b^{y_1} t$ (rechte Seite). Mit ~~dem Ansatz~~ der Annahme $c \propto |t|^{-\alpha}$ ergibt sich:

(Herleitung ohne diese Annahme danach) s.u.

$$c(t) = b^{2y_1-d}c(b^{y_1}t) \tag{8.15}$$

(8.14)

Annahme

$$|t|^{-\alpha} = b^{2y_1-d}|b^{y_1}t|^{-\alpha} \tag{8.16}$$

$$1 = b^{2y_1-d-y_1\alpha} \tag{8.17}$$

Da $b > 0$ kann der letzte Ausdruck logarithmiert und aufgelöst werden. Es ergibt sich:

$$\boxed{\alpha = 2 - \frac{d}{y_1}} \tag{8.18}$$

Bessere

Alternative Herleitung:

g_1'

Annahme: b ist kontinuierlich wählbar. Wähle b so, dass $\underbrace{b^{y_1}|t|}_{g_1'} = \text{const}$. (bei Änderung von t) $\Rightarrow \boxed{|t| \sim b^{-y_1}}$ $\Rightarrow b \sim |t|^{-1/y_1}$

b durch t ersetzen

Schlusskette: **RG =>**
(8.5) g'_i = b^(y_i) g_i
=>
(8.11) f(b^(y_i,...)=...
=>
(8.14)
=> **Verhalten wie /t/^(-alpha)**

(8.14):

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f(t, h=0,\dots)}{\partial t^2} \sim b^{2y_1-d} \sim |t|^{\frac{d}{y_1}-2} \underbrace{\left.\frac{\partial^2 f(g_1',0,\dots)}{\partial g_1'^2}\right|_{g_1'=\text{const.}}}_{=\text{const}} \tag{8.19}$$

=(8.14)

gehört nach links

==> Spez. Wärme verhält sich tatsächlich wie t^(-alpha) !

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 2 - \frac{d}{y_1}} \tag{8.20}$$

unabhängig vom Vorzeichen von t, d.h. $\alpha = \alpha'$. !

Analog findet man:

$$\beta = (d - y_2)/y_1 \qquad M \sim |t|^{\beta} \tag{8.21}$$

$$\gamma = (2y_2 - d)/y_1 \qquad \chi \sim |t|^{-\gamma} \tag{8.22}$$

$$\delta = y_2/(d - y_1) \qquad h \sim |M|^{\delta} \tag{8.23}$$

Hier gibt es nur 2 relevante Parameter (t,h)
$\Rightarrow$ 2 Exponenten y_1, y_2 bestimmen 4 physikalische kritische Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
$\Rightarrow$ Es gibt Beziehungen zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, nämlich die 2 Skalenrelationen.

Kritische Exponenten der Korrelationslänge: $\cancel{\nu(\xi)}$ ν, η

Hier eine Skalierungs Konstante

Die Korrelationsfunktion $G(r) = \langle s_0 s_r\rangle - \langle s_0\rangle\langle s_r\rangle$ wird mit der Transformation $s_i \to s_i' = c s_i$ in der Nähe des Fixpunktes:

nahe

$$G(r, t, h, g_3, \dots) \propto c^2(b) G\left(\frac{r}{b}, b^{y_1}t, b^{y_2}h, b^{y_3}g_3, \dots\right)$$

analog (8.12), (8.14)

Bei $h=0, g_3 \dots = 0$: Fixpunkt $\Rightarrow$ wieder $|t| \sim b^{-y_1}$

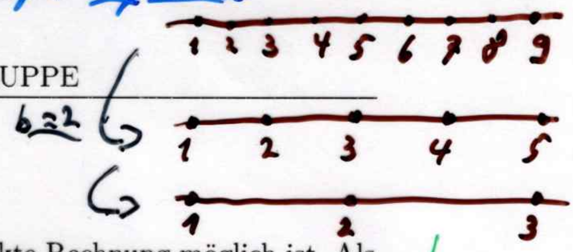
$\Rightarrow$ Längen skalieren bei der RG-Transformation also wie $|t|^{\frac{1}{y_1}}$ Das kritische Verhalten der Korrelationslänge ist $\xi \propto |t|^{-\nu}$ womit sich $\nu = \frac{1}{y_1}$ ergibt.

Da der kritische Exponent α auch nur von y_1 abhängt, folgt eine „Hyperscaling"-Gleichung:

$$\boxed{2 - \alpha = d\nu}$$

(Analog: η ... $\Rightarrow \gamma = (2 - \eta)\nu$ Hyperscaling)

Blocktransf. hier: jeden 2. Spin weglassen



8.4 Beispiel für eine RG-Rechnung

Wir benutzen das 1dimensionale Ising-Modell, da hier eine exakte Rechnung möglich ist. Als RG-Transformation wird jeweils nur jeder zweite Spin verwendet (siehe Abbildung) wodurch sich $b = 2$ ergibt. ~~Der Renormierungsgruppenansatz liefert:~~ !

Ursprüngl. Hamiltonfkt.: in $Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\mathcal{H}}$

$$\mathcal{H} = -K \sum_i s_i s_{i+1} - H \sum_i s_i - \sum_i C \tag{8.24}$$

Zunächst mit $K = \beta J; H = \beta h; C = const(s.u.)$

$$\tag{8.25}$$

Blocktransformation:

$$Z = \sum_{\{s_i\}} e^{-\mathcal{H}} = \sum_{\{s_i\}} \prod_{i=2,4,6,\ldots} e^{K s_i (s_{i-1}+s_{i+1}) + H s_i + H \frac{1}{2}(s_{i+1}+s_{i-1}) + 2C} \tag{8.26}$$

← war ok

Summiere $s_i = \pm 1$

~~Summe~~ über $s_2, s_4, s_6,$ ausführen ==>

$$= \sum_{s_1, s_3, \ldots} \prod_{i=2,4,\ldots} \left[e^{K(s_{i-1}+s_{i+1}) + H + \frac{H}{2}(s_{i-1}+s_{i+1}) + 2C} + e^{-K(s_{i-1}+s_{i+1}) - H + \frac{H}{2}(s_{i-1}+s_{i+1}) + 2C} \right] \tag{8.27}$$

($s_i = +1$) von ($s_i = -1$)

← war ok: 2, 4, 6

Umbenennung von i auf j ($j = 1, 2, 3, 4 \ldots$)

$$= \sum_{s_j} \prod_j \left[e^{(K+\frac{H}{2})(s_j+s_{j+1}) + H + 2C} + e^{-(K-\frac{H}{2})(s_j+s_{j+1}) - H + 2C} \right] \tag{8.28}$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{s_j} e^{-\mathcal{H}'} = \sum_{s_j} \prod_j e^{K' s_j s_{j+1} + H' s_j + C' (+\text{ev. weitere Terme})} \tag{8.29}$$

Es wäre Umskalierung der Spins möglich, ist aber nicht notwendig. Hier ist es exakt lösbar ! und es gibt 3 Fälle:

- $s_j = s_{j+1} = 1$
- $s_j = s_{j+1} = -1$
- $s_j = -s_{j+1} = \pm 1$

Aus diesen 3 Fällen folgen 3 Gleichungen für 3 Unbekannte K', H', C':

$$e^{2H'} = e^{2H} \frac{\cosh(2K+H)}{\cosh(2K-H)}$$

$$e^{4K'} = \frac{\cosh(2K+H)\cosh(2K-H)}{\cosh^2(H)}$$

$$e^{4C'} = e^{8C} \cosh(2K+H)\cosh(2K-H)\cosh^2(H)$$

Die ersten beiden Gleichungen sind unabhängig von C wodurch sich ~~der~~ ein RG-Fluss nur in K und H ergibt.

Nebenbemerkung:

Bei $T = \inf$ kann die freie Energie f direkt berechnet werden und der RG-Fluss kann oft benutzt werden um f bei $T < \inf$ zu berechnen.

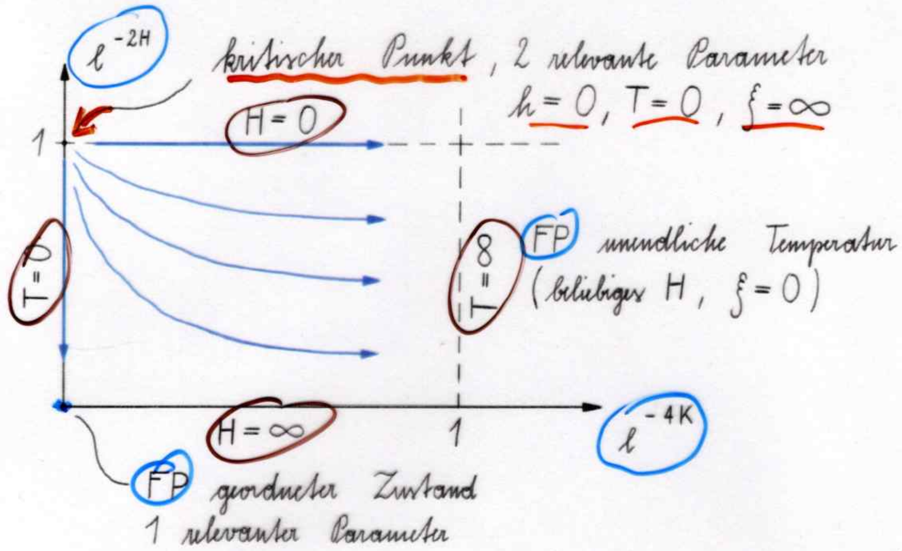


Abbildung 8.4: Fluss der Renormierungsgruppe im 1d Ising Modell

Linearisierung (Berechung des kritischen Verhaltens)

Beispielsweise die Linearisierung der RG-Flussgleichungen um den kritischen Fixpunkt:

$$(T=0,h=0) \Leftrightarrow (\underbrace{e^{-2H}}_{y}=1,\underbrace{e^{-4K}}_{x}=0), \epsilon = y - y^4$$

(= Def. einer günstigen Variablen epsilon, die nur vom Magnetfeld abhängt))

Für 1d Ising: brauche $e^{\cdots}$ als Variable wegen expon. Abhängigkeit

ergibt $x' = 4x, \epsilon' = 2\epsilon$. Das heißt die jeweiligen Eigenwerte sind $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$. Betrachtet man das erwartete Verhalten $gi' = \lambda_i g_i = b^{y_i} g_i$, hier mit $b = 2$ ergibt dies die

Kritischen Exponenten:
$y_1 = 2, y_2 = 1$

Anmerkungen

(anderes "epsilon" als oben)

Meist sind Näherungen nötig. Zum Beispiel die „ϵ-Entwicklung“mit $\epsilon = d-2$ oder $d-4$ je nach Modell. ϵ wird durch geschickte analytische Fortsetzung eingeführt, z.B. $d! \to \Gamma(d+1)$. Diese Methode geht zurück auf Gerard 't Hooft.

! Entwicklung in der Dimension !

Auch numerische Zugänge sind möglich („DMRG“)