8. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2011

Abgabe: Dienstag, 17.05.2011

Aufgabe 27: Potentialtopf mit verschobener Wand (9 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem eindimensionalen unendlich tiefen Potentialtopf, dessen rechte Wand zum Zeitpunkt $t = 0$ plötzlich von L nach $2L$ verschoben wird:

$$V(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < L,\, t \text{ beliebig} \\ 0 & \text{für } L \leq x \leq 2L,\, t > 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Für $t < 0$ sei das Teilchen im Grundzustand.

- Geben Sie die Wellenfunktion $\phi(x)$ des Anfangszustandes an, d.h. die Grundzustandswellenfunktion bei $t < 0$ (aus dem Vorlesungsskript).
- Geben Sie die Ortsraum-Eigenfunktion $\langle x|n\rangle$ des Hamiltonaoperators bei $t > 0$ an (aus dem Vorlesungsskript).
- Geben Sie die Spektraldarstellung für den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U(t)}$ bei $t > 0$ an.
- Bestimmen Sie mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators den Zustand $\psi(x,t)$ für $t > 0$, nur formal als Linearkombination der Eigenzustände $|n\rangle$ von $\hat{H}$.
- Vergleichen Sie die Eigenenergien bei $t < 0$ und $t > 0$. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei eine Messung der Energie des Teilchens zur Zeit $t > 0$
  - eine kleinere Energie als bei $t < 0$,
  - die gleiche Energie als bei $t < 0$,
  - eine größere Energie als bei $t < 0$

  gefunden wird.
  Anleitung: Überlegen Sie, welche Eigenenergien des verbreiterten Topfes den obigen drei Fällen entsprechen. Bestimmen Sie dann die Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Messergebnisse.
- Wie groß ist der Erwartungswert der Energie bei $t > 0$?

Aufgabe 28: Spin in Richtung $\vec{n}$ (5 Punkte)

Berechnen Sie die Spin-$\frac{1}{2}$-Eigenvektoren in Richtung des Einheitsvektors $\vec{n}$ mit Polarkoordination (Θ, Φ). Lösen Sie dazu explizit die Eigenwertgleichung

$$\left(\vec{\hat{S}} \cdot \vec{n}\right)|n\rangle = \frac{\hbar}{2}\lambda_{\pm}|\pm n\rangle \tag{2}$$

für den Spin-Operator in Richtung $\overrightarrow{n}$, $\hat{S}_n \equiv \overrightarrow{\hat{S}} \cdot \overrightarrow{n}$.
Zeigen Sie zunächst, dass die obige Gleichung in der z-Basis zu

$$(\overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{n}) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \lambda_\pm \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Hinweise: Die Lösung für $|+n\rangle$ kennen Sie aus dem Skriptum. Beachten Sie, dass Eigenvektoren im Komplexen nur bis auf eine beliebige Phase festgelegt sind. Die Lösung für $|-n\rangle$ erhalten Sie am einfachsten über die Orthogonalität mit $|+n\rangle$.

Aufgabe 29: Schrödingergleichung im Impulsraum (6 Punkte)
Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in einem Potential $V(x)$. Wie lautet die Schrödingergleichung $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\overrightarrow{\hat{Q}})$ im Impulsraum, d.h. als Gleichung für $\tilde{\psi}(k,t) \equiv \langle k|\psi(t)\rangle$?
Hinweise: Ein möglicher Lösungsweg ist die direkte Fouriertransformation der Schrödingergleichung für $\psi(x,t)$. Eine andere Möglichkeit ist, die Schrödingergleichung für den Vektor $|\psi(t)\rangle$ im Impulsraum auszuwerten.
Für ein freies Teilchen ($V = 0$) erhalten Sie das bekannte Ergebnis

$$i\hbar\frac{d\tilde{\psi}(k,t)}{dt} = \frac{\hbar^2}{2m}k^2\tilde{\psi}(k,t) \tag{4}$$