4. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2011

Abgabe: Dienstag, 29. 03. 2011, 13:00 bzw. 15:15 Uhr

Aufgabe 12: Ortsoperator, Spektraldarstellung *(5 Punkte)*

Wir betrachten einen diskreten Ortsraum, in dem eine räumliche Koordinate mit 3 möglichen Werten $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ gegeben sei (z.B. die Koordinaten von 3 Spalten einer Blende). Zu den Koordinaten (Spalten) gehören Basisvektoren $|x_i\rangle$. Der Ortsoperator $\hat{Q}$ ist durch

$$\hat{Q}\,|x_i\rangle \;=\; x_i\,|x_i\rangle$$

definiert, hat also Eigenvektoren mit Namen $|x_i\rangle$ und Eigenwerte x_i. Der Vektor $|\psi\rangle$ sei

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\,(3|x_1\rangle \;-\; \mathrm{i}|x_3\rangle)\ .$$

a) Geben Sie die Spektraldarstellung des Ortsoperators $\hat{Q}$ an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{Q}\rangle = \langle\psi|\hat{Q}|\psi\rangle$

   i) direkt über $\hat{Q}\,|x_i\rangle = x_i\,|x_i\rangle$, sowie

   ii) über seine Spektraldarstellung

c) Berechnen Sie $\langle\hat{Q}^2\rangle$ über die Spektraldarstellung.

Aufgabe 13: Ortsoperator *(4 Punkte)*

Im Gegensatz zur Aufgabe 12 wird nun in einem kontinuierlichem Ortsraum gearbeitet (d.h. mit kontinuierlichen Variablen x und den zugehörigen Eigenzuständen $|x\rangle$).

Gegeben sei ein Zustand $|\psi\rangle$ mit der Ortsraumdarstellung $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = (1+i)\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\,e^{-\gamma|x|}$ und $-\infty < x < \infty$, $\gamma > 0$. Berechnen Sie im Zustand $|\psi\rangle$ die Erwartungswerte $\langle\hat{Q}\rangle$ und $\langle\hat{Q}^2\rangle$.

Aufgabe 14: Hellman-Feynman Theorem *(3 Punkte)*

Gegeben sei ein hermitescher Operator $\hat{H}_\lambda$, der von einem Parameter λ abhängt. Seine normierten Eigenzustände seien $|\psi_\lambda\rangle$. Sie erfüllen die Eigenwertgleichung $\hat{H}_\lambda\,|\psi_\lambda\rangle \;=\; E_\lambda\,|\psi_\lambda\rangle$. Zeigen Sie

$$\boxed{\frac{d}{d\lambda}\,E_\lambda \;\equiv\; \frac{d}{d\lambda}\,\langle\psi_\lambda|\hat{H}_\lambda|\psi_\lambda\rangle \;=\; \langle\psi_\lambda|\left(\frac{d}{d\lambda}\hat{H}_\lambda\right)|\psi_\lambda\rangle}$$

Anleitung: Wenden Sie die Kettenregel der Differentiation an, benutzen Sie, dass $\hat{H}$ hermitesch ist und daher auch nach links angewandt werden kann, sowie $\langle\psi_\lambda|\psi_\lambda\rangle = 1$.

Aufgabe 15: Stern-Gerlach-Versuch *(6 Punkte)*

Ein Strahl von Spin-$\frac{1}{2}$-Atomen wird wie folgt duch eine Serie von Stern-Gerlach-Apparaturen geleitet (analog zur Anordnung in der Vorlesung):

- Die erste Apparatur wählt $|+z\rangle$ aus und blockiert $|-z\rangle$.
- Die zweite Apparatur wählt $|-n\rangle$ aus und blockiert $|+n\rangle$, bezüglich eines beliebigen Einheitsvektors $\vec{n}$.
- Die dritte Apparatur wählt $|-z\rangle$ aus und blockiert $|+z\rangle$.

a) Wie groß ist die Intensität des austretenden Strahls, wenn der aus der ersten Apparatur austretende Strahl auf 1 normiert ist? Wie muss der Vektor $\vec{n}$ orientiert werden, um diese Intensität zu maximieren? Benutzen Sie die in der Vorlesung angegebene Darstellung von $|\pm n\rangle$.

b) Wie groß wäre die Intensität des austretenden Strahls, würde die 2. Apparatur weggelassen werden?

Aufgabe 20: Baker-Hausdorff-Formeln *(2 Punkte)*

Für Exponentialfunktionen von Operatoren, die nicht miteinander kommutieren, gelten nicht dieselben Rechenregeln wie für Zahlen, sondern die Baker-Hausdorff-Formeln

a) $\boxed{e^A\, e^B \;=\; e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+O(K)}}$

b) $\boxed{e^A\, e^B \;=\; e^{A+B}\, e^{\frac{1}{2}[A,B]+O(K)}}$

c) $\boxed{e^A\, C\, e^{-A} \;=\; C \,+\, [A,C] \,+\, \frac{1}{2!}[A,[A,C]] \,+\, \frac{1}{3!}[A,[A,[A,C]]] \,+\, ...}$

wobei K abkürzend für Terme mit Vielfach-Kommutatoren wie z.B. $[A,[A,B]]$ steht. Verifizieren Sie *eine* dieser Formeln durch Entwickeln bis zu Produkten von maximal 2 Operatoren A, B. Funktionen von Operatoren sind durch die Potenzreihenentwicklung der Funktion definiert.