2. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2011

Abgabe: Dienstag, 16.03.2011, 13:00 bzw. 15:15 Uhr

Aufgabe 5: Spur, Adjungierte

(5 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen aus dem Anhang A des Vorlesungsskripts:

a) $\mathrm{Sp}\left(\hat{\mathrm{A}}\,|\phi\rangle\langle\psi|\right) \;=\; \langle\psi|\hat{\mathrm{A}}|\phi\rangle$

b) $(|\psi\rangle\langle\phi|)^\dagger \;=\; |\phi\rangle\langle\psi|$

Aufgabe 6: Operatoren in Bra-Ket-Schreibweise

(7 Punkte)

Es sei ein Vektorraum mit den beiden orthonormierten Basiszuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ gegeben, sowie der Zustand $|\psi\rangle = |1\rangle \,-\, i\,|2\rangle$.

a) Normieren Sie den Zustand $|\psi\rangle$ und finden Sie einen normierten Zustand, der orthogonal zu $|\psi\rangle$ ist.

b) Es sei der Operator

$$\hat{H} = 3|1\rangle\langle 1| \,-\, |2\rangle\langle 2| \,-\, 2i|1\rangle\langle 2| \,+\, 2i|2\rangle\langle 1|$$

gegeben. Geben Sie die Matrixdarstellung dieses Operators in der Basis $|1\rangle, |2\rangle$ an. Ist dieser Operator hermitesch ?

c) Berechnen Sie $\dfrac{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$. Dies ist der Erwartungswert des Operators $\hat{H}$ im Zustand $|\psi\rangle$.

(bitte wenden)

Aufgabe 7: Unitäre Operatoren und Basistransformationen

(8 Punkte)

Durch $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ sei eine orthonormale Basis gegeben. Eine weitere orthonormale Basis sei durch

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(|a_1\rangle + 2i|a_2\rangle\right) \quad , \quad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2|a_1\rangle - i|a_2\rangle\right)$$

gegeben.

a) Drücken Sie den unitären Operator $\hat{U}$, der die a-Basisvektoren in die b-Basisvektoren überführt, durch Bra und Ket-Vektoren aus. Welche Matrix ist diesem Operator in der a-Basis zugeordnet ?

b) Ein Vektor $|\chi\rangle$ sei in der a-Basis durch den Koeffizientenvektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Schreiben Sie $|\chi\rangle$ als Summe von Ket-Vektoren. Wie lauten die Koeffizienten dieses Vektors in der b-Darstellung ?

c) Ein linearer Operator $\hat{T}$ sein in der a-Basis durch die Matrix

$$t^{(a)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Drücken Sie diesen Operator durch die Basis-Bras und -Kets der a-Basis aus. Wie lautet die Matrixdarstellung von $\hat{T}$ in der b-Basis ?