11. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2011

Abgabe: Dienstag, 06. 06. 2011, 13:00 bzw. 15:15 Uhr

Aufgabe 35: Quantenmechanischer Virialsatz *(6 Punkte)*

Gegeben sei ein quantenmechanisches Teilchen mit Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{1}{2m}\vec{\hat{P}}^2 + \hat{V}(\vec{\hat{Q}})$, wobei das Potential $\hat{V}$ nur von $\vec{\hat{Q}}$ abhänge.

(a) Zeigen Sie den quantenmechanischen Virialsatz

$$2\,\langle\psi|\ \frac{1}{2m}\vec{\hat{P}}^2\ |\psi\rangle\ =\ \langle\psi|\ \vec{\hat{Q}}\cdot\vec{\nabla}\hat{V}\ |\psi\rangle\,.$$

Er ist zum Virialsatz der klassischen Mechanik völlig analog, gilt aber nur für *Erwartungswerte* in den <u>*Eigenzuständen*</u> $|\psi\rangle$ von $\hat{H}$.

Hinweise: Der Einfachheit halber brauchen Sie diese Beziehung nur in 1 Dimension zu beweisen. Berechnen Sie dazu $\langle\psi|\ [\hat{H},\hat{Q}\hat{P}]\ |\psi\rangle$ zum einen mittels $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ und zum anderen durch Einsetzen der Definition von $\hat{H}$. Sie benötigen $[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$ sowie $[f(\hat{Q}),\hat{P}] = \mathrm{i}\hbar\ \frac{\partial f(x)}{\partial x}\Big|_{x=\hat{Q}}$

(b) Wenden Sie den Virialsatz auf den eindimensionalen harmonischen Oszillator an.

Aufgabe 36: Harmonischer Oszillator: Mischung von Zuständen

(6 Punkte)

a) Konstruieren Sie einen normierten Zustand als Linearkombination der Eigenzustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators derart, dass $\langle\hat{Q}\rangle$ so gross wie möglich wird. Wählen Sie in der Linearkombination reelle Koeffizienten.

b) $|\psi(0)\rangle$ sei der eben konstruierte Zustandsvektor. Berechnen Sie $|\psi(t)\rangle$, $\langle\hat{Q}(t)\rangle$, $\langle\hat{P}(t)\rangle$. Bleiben die Koeffizienten der Basiszustände $|n\rangle$ reell ?

c) Berechnen Sie $\langle\hat{Q}^2(t)\rangle$.

Hinweis: Benutzen Sie für alle Rechnungen die Darstellungen der auftretenden Operatoren in Erzeugern und Vernichtern $a, a^\dagger$. Schreiben Sie zur Vereinfachung der Rechnung $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ als $\hat{Q} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\,(a^\dagger + a)$ und $\hat{P} = i\,p_0\,(a^\dagger - a)$.

Aufgabe 37: Kohärente Zustände I

(8 Punkte)

Ein kohärenter Zustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist als Eigenzustand des (nicht-hermiteschen) Vernichtungsoperators a definiert:

$$a\,|\lambda\rangle \;=\; \lambda\,|\lambda\rangle \;\;,$$

wobei der Eigenwert λ eine beliebige komplexe Zahl ist. Die Zustände $|\lambda\rangle$ seien normiert.

a) Berechnen Sie die Erwartungwerte von $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ im Zustand $|\lambda\rangle$.

b) Zeigen Sie, dass im Zustand $|\lambda\rangle$ die Orts-Impulsunschärfe ihren minimal möglichen Wert $\frac{\hbar}{2}$ annimmt.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Unschärfe des Anzahloperators $\hat{N} = a^\dagger a$ im Zustand $|\lambda\rangle$.

d) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten $f(n)$ der normierten Zustände in der Darstellung

$$|\lambda\rangle \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,|n\rangle$$

durch $f(n) = \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} e^{-|\lambda|^2/2}$ gegeben sind.

e) *Zeitentwicklung:* Zeigen Sie

$$|\lambda(t)\rangle \;=\; e^{-i\frac{\omega}{2}t}\,|\lambda e^{-i\omega t}\rangle \;\;,$$

indem Sie den Zeitentwicklungsoperator des harmonischen Oszillators auf $|\lambda\rangle$ anwenden und die unter d) hergeleitete Darstellung von $|\lambda\rangle$ benutzen.

Hinweise: Benutzen Sie für alle Rechnungen die Darstellungen der auftretenden Operatoren in Erzeugern und Vernichtern $a, a^\dagger$. Schreiben Sie zur Vereinfachung der Rechnung $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ als $\hat{Q} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\,(a^\dagger + a)$ und $\hat{P} = i\,p_0\,(a^\dagger - a)$.