

10. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2011

Abgabe: Dienstag, 30.5.2011, 13:00 bzw. 15:15 Uhr

Aufgabe 33: Streuung an einem Ferromagneten (8 Punkte)

Ein Strahl von Neutronen der Energie E und der Masse m fällt aus der negativen x -Richtung kommend senkrecht auf ein ferromagnetisches Material, das den gesamten Bereich $x \geq 0$ einnimmt. Die potentielle Energie eines Neutrons ist $V = V_1 + V_2$, wobei V_1 die Wechselwirkung des Neutrons mit den Nukleonen des Ferromagneten beschreibt, und V_2 die Wechselwirkung des magnetischen Moments $\hat{\vec{\mu}}$ des Neutrons (Spin $\frac{1}{2}$) mit dem im Ferromagneten vorhandenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, $B_z = \text{const} > 0$. Es sei

$$V_1(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ V_0 = \text{const} > 0 & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

$$V_2(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ -\hat{\vec{\mu}}\vec{B} & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

mit $\hat{\vec{\mu}} = -g\mu_0\hat{\vec{S}}$ und $\vec{x} = (x, y, z)$. Dies ist zunächst ein dreidimensionales Problem. Das Potential $V(\vec{x})$ hängt aber nicht von y und z ab, sondern nur von x und vom Spin des Neutrons.

a) Geben Sie den gesamten Hamiltonoperator \hat{H} an. Zeigen Sie, dass

$$[\hat{H}, \hat{P}_y] = [\hat{H}, \hat{P}_z] = [\hat{H}, \hat{S}_z] = 0 \quad .$$

Es gilt auch $[\hat{P}_y, \hat{P}_z] = [\hat{P}_y, \hat{S}_z] = [\hat{P}_z, \hat{S}_z] = 0$. Die Operatoren \hat{H} , \hat{P}_y , \hat{P}_z und \hat{S}_z kommutieren also paarweise miteinander und können deshalb gleichzeitig diagonalisiert werden. \hat{H} vertauscht aber nicht mit \hat{P}_x , weil das Potential von x abhängt. Die Eigenfunktionen von \hat{H} kann man daher faktorisieren:

$$\Psi(\vec{x}, \sigma) = \psi_1(x, \sigma) \psi_2(y) \psi_3(z) \quad .$$

Die Eigenfunktionen von \hat{P}_j sind $\psi_j(x_j) \sim e^{-ip_j x_j}$. Da der Strahl senkrecht einfallen soll, gilt hier die Randbedingung $p_y = p_z = 0$, so dass einfach $\psi_2(y) = \text{const}$, $\psi_3(z) = \text{const}$.

Sie brauchen deshalb im Folgenden nur noch ein eindimensionales Problem zu lösen. Weil \hat{H} mit \hat{S}_z kommutiert, kann man beide gleichzeitig diagonalisieren, d.h. die Lösungen nach den Eigenwerten von \hat{S}_z klassifizieren. Man hat daher Wellenfunktionen $\phi_\sigma(x) := \psi_1(x, \sigma)$, für einfallende Neutronen mit Spin σ in z -Richtung, d.h. parallel bzw. antiparallel zum Magnetfeld.

b) Es gelte $V_0 - \frac{\hbar}{2}g\mu_0 B_z < E < V_0 + \frac{\hbar}{2}g\mu_0 B_z$.

Bestimmen Sie die Wellenfunktionen $\phi_\sigma(x)$.

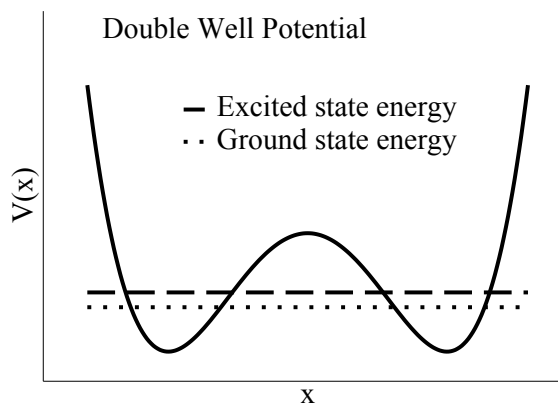
c) Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten für Neutronen mit Spin parallel bzw. antiparallel zu \vec{B} .

d) Man kann die Polarisation eines solchen Strahls als $P = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}$ definieren, wobei N_+ bzw. N_- die Anzahl der Neutronen mit Spin parallel bzw. antiparallel zur z -Achse ist. Der einfallende Strahl sei unpolarisiert, d.h. $P = 0$. Bestimmen Sie die Polarisation des reflektierten Strahls.

Aufgabe 34: Ein Teilchen im Doppelmuldenpotential

(6 Punkte)

Betrachten Sie das abgebildete Doppelmuldenpotential $V(x)$. In der Abbildung ist bereits die Energie des Grund- und der ersten angeregten Zustands angedeutet. Das Potential $V(x)$ sei an $x = 0$ zentriert.



a) Wie wirkt sich die Spiegelsymmetrie von $V(x)$ auf die möglichen Wellenfunktionen aus?

b) Skizzieren Sie die Wellenfunktion des Grundzustands $\psi_0(x)$ und des ersten angeregten Zustands $\psi_1(x)$. Teilen Sie dazu die x-Achse in Regionen mit Krümmungen von $\psi(x)$ verschiedenen Vorzeichens auf. Betrachten Sie explizit die Situation an $x \rightarrow \pm\infty$. Fertigen Sie zwei getrennte Abbildungen an.

c) Skizzieren Sie die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands.

Hinweis: Überlegen Sie, welche Eigenschaften die Wellenfunktionen aufgrund der Schrödingergleichung und der Randbedingungen, die sich für jeden Teilbereich der x-Achse einstellen, haben müssen.