

# NUMERISCHE METHODEN IN DER PHYSIK

## Vierte Übung WS 2012/2013 [C]

### Numerische Auswertung von Anfangswertproblemen mittels des Runge-Kutta-Verfahrens

#### Konkrete Anwendung: Pendel - Pendel - Pendel

In dieser Übung sollen Sie das von mir im Skriptum, Kap. 8, ausführlich besprochene *Runge-Kutta-Verfahren* zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen verwenden, insbesondere im Zusammenhang mit der *Pendelbewegung*.

Dafür stelle ich Ihnen per Internet die folgenden Routinen zur Verfügung:

`runge_kutta_D.c` (Struktogramme 26-28)

`nrutil.c`

#### Verwendung des Runge-Kutta-Programmpaketes:

Wie im Skriptum im Kapitel 8.5 beschrieben, besteht das Runge-Kutta-System aus den Elementen ODEINT, RKQC und RK4, wobei ODEINT das Programm ist, das von Ihrem Hauptprogramm aufgerufen werden muß. Vom Benutzer ist außerdem das Programm DERIVS beizustellen, welches das gegebene Problem in Form eines Systems von  $n$  Differentialgleichungen erster Ordnung definiert:



```

#include "runge_kutta_D.c" // Einbeziehung des Runge-Kutta-Programms,
                          // das Sie ueber Internet beziehen koennen.
                          // Das "Kontaktprogramm", welches Sie vom
                          // main-Programm aufrufen muessen, hat den
                          // Namen ODEINT: im folgenden eine kurze
                          // Beschreibung von Headline und Parametern:

// void odeint(double ystart[], int nvar, double x1, double x2, double eps,
//             double h1, double hmin, int nstmax, int *nwerte,
//             double xx[], double **yy)

// Dieses Programm stellt das driver program fuer das RuKu-Programmsystem
// dar, das aus den Prozeduren ODEINT, RKQC, RK4 und DERIVS besteht.
// (s. Skriptum Seite 249ff).

// Last update: 2-10-96

// Es ist zu beachten:
// =====
// Es muss ein Unterprogramm
//     void derivs(double x, double y[], double f[])
// existieren, welches an dem gegebenen Punkt x und mit Kenntnis
// der Funktionswerte y[] die entsprechenden 'rechten Seiten' der
// Differentialgleichungen f[] berechnet.

// Bedeutung der Parameter:
// =====
//     Input:  ystart[]  Vektor mit den Anfangswerten des Dgl-Systems
//              nvar     Zahl der Gleichungen des Dgl-Systems
//              x1,x2    Startpunkt/Endpunkt des Integrationsintervalls
//              eps      geforderte relative Genauigkeit
//              h1       guessed value fuer die Schrittweite des
//                      RuKu-Prozesses
//              hmin     Minimalwert, unter den die Arbeitsschrittweite
//                      nicht sinken darf
//              nstmax   maximale Zahl von Stuetzpunkten zwischen x1 und
//                      x2, die in den Feldern xx[] bzw. yy[,]
//                      abgespeichert werden

//     Output: nwerte   Zahl der abgespeicherten Stuetzpunkte
//              xx[]     Abszissenwerte der Stuetzpunkte
//              yy[] []  Ordinatenwerte der Loesungsfunktionen:
//                      erster Index = Index der Funktion
//                      zweiter Index = Nummer des Abszissenwertes

```

```

int main()
{
    int nvar,nstmax,nwerte,... ;
    double t0,tmax,eps,h1,hmin;
    double *ystart,*tfeld,**yfeld;

    nvar=... ;
    nstmax=... ;
    y0=dvector(1,nvar);
    tfeld=dvector(1,nstmax);
    yfeld=dmatrix(1,nvar,1,nstmax);

    t0=... ;
    tmax=... ;

    ystart[1]=... ;
    ystart[2]=... ;
    .
    .

    eps=... ;
    h1=... ;
    hmin=... ;

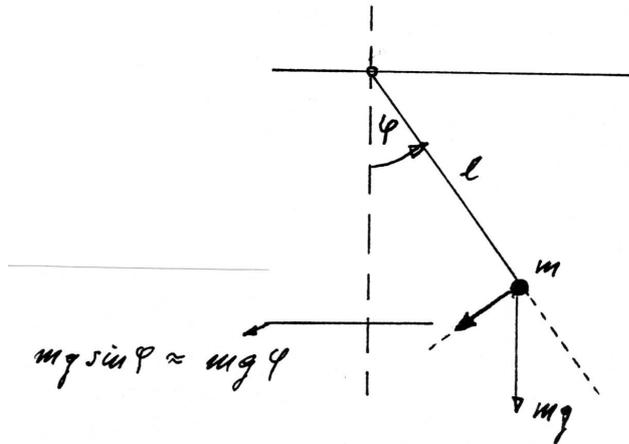
    odeint(ystart,nvar,t0,tmax,eps,h1,hmin,nstmax,&nwerte,tfeld,yfeld);
    .
    .

    free_dvector(y0,1,nvar);
    free_dvector(tfeld,1,nstmax);
    free_dmatrix(yfeld,1,nvar,1,nstmax);
    .
    .
    return (0);
}

```

# 1. Das lineare/nicht-lineare einfache Pendel

## Theoretische Grundlagen



Die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels kann aus der obigen Zeichnung leicht ermittelt werden; sie lautet

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

**Einschub:** Ableitung dieser Bewegungsgleichung nach dem Lagrange-Formalismus

Das folgende wird Ihnen vielleicht etwas unnötig vorkommen, Sie werden aber im Lauf dieser Übung erkennen, daß die nun nun kurz beschriebene Methode, die Bewegungsgleichungen von Massepunkten mit Hilfe des *Formalismus von Lagrange* zu ermitteln, für etwas kompliziertere Systeme sehr große Vorteile hat.

Es ist im Rahmen dieser LV allerdings unmöglich, diesen Formalismus so gründlich zu erklären und abzuleiten, wie dies in jeder Vorlesung aus *Analytische Mechanik* geschieht. Ich muß mich hier darauf beschränken, den Lagrange-Formalismus quasi als Rezept zu präsentieren, also nach dem Motto: "man nehme ...".

Im Zentrum dieses Formalismus steht natürlich die sogenannte Lagrange-funktion  $L$ , welche nichts anderes ist als die Differenz aus der kinetischen und potentiellen Energie des untersuchten Systems:

$$L(q, \dot{q}) = E_{kin} - E_{pot}. \quad (2)$$

Die Argumente dieser Funktion sind die sogenannten *generalisierten Koordinaten*  $q$  bzw. deren zeitliche Ableitungen  $\dot{q}$ . Es handelt sich dabei um einen Satz von Koordinaten  $q$ , die so gewählt sind, daß sie eventuelle Zwangsbedingungen, denen die Bewegungen der Massepunkte unterworfen sind, bereits berücksichtigen.

Nun folgt - wie gesagt - einfach als Rezept und ohne weitere Ableitung die

Formel, mit welcher man aus der Lagrangefunktion die entsprechenden Bewegungsgleichungen gewinnen kann:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (3)$$

Wie sieht das beim einfachen Pendel aus? Die Koordinate der Pendelbewegung, welche die Tatsache, daß die Bahnkurve Teil einer Kreisbahn sein muß (= Zwangsbedingung!), bereits "automatisch" berücksichtigt, ist natürlich der Winkel  $\varphi$ .

Die Aufgabe besteht nun als erstes darin, die kinetische und die potentielle Energie der Pendelbewegung *als Funktionen von  $\varphi$  und  $\dot{\varphi}$  hinzuschreiben*.

Dies ist aber kein Problem:

$$E_{kin} = \frac{m(\ell\dot{\varphi})^2}{2} \quad \text{und} \quad E_{pot} = mg\ell(1 - \cos \varphi). \quad (4)$$

Die Lagrangefunktion für das einfache Pendel lautet demnach

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m(\ell\dot{\varphi})^2}{2} - mg\ell(1 - \cos \varphi). \quad (5)$$

Die Anwendung der Formel (3) ergibt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\ddot{\varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg\ell \sin \varphi.$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke folgt mit

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -mg\ell \sin \varphi$$

unmittelbar die Bewegungsgleichung (1).

**Ende des Einschubs.**

Für kleine Auslenkungen gilt wegen

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

die in  $\varphi$  lineare Gleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0 \quad (6)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi(t=0) = \varphi_0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(t=0) = 0. \quad (7)$$

Dabei ist  $\varphi = \varphi(t)$  die Winkelauslenkung zur Zeit  $t$ ,  $\ell$  ist die Länge des masselosen Stabes, an dessen Ende sich die Masse  $m$  befindet, und  $g$  ist die Erdbeschleunigung.

Die analytische Lösung des Anfangswertproblems zweiter Ordnung (6), (7) lautet

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{g/\ell} t\right),$$

wobei die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (8)$$

beträgt. Im folgenden wird die Kreisfrequenz  $\sqrt{g/\ell}$  als  $\omega$  bezeichnet, d.h., das (lineare) Problem hat die Form

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \quad (9)$$

mit

$$\varphi(t=0) = \varphi_0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(t=0) = 0 \quad (10)$$

mit der analytischen Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t). \quad (11)$$

Wie Sie wissen, muß für die Anwendung von Runge-Kutta-Formeln das gegebene Problem (9), (10) in ein System von zwei Dgl. erster Ordnung umgeformt werden:

$$\varphi(t) \longrightarrow y_1(t) \quad \dot{\varphi}(t) \longrightarrow y_2(t)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= f_1 = y_2(t) & y_1(t=0) &= \varphi_0 \\ \dot{y}_2(t) &= f_2 = -\omega^2 y_1(t) & y_2(t=0) &= 0 \end{aligned}$$

## Aufgabenstellung

- Schreiben Sie ein Programm, mit dem Sie unter Verwendung des *Runge-Kutta-Programms* das Problem des linearen Pendels für beliebige (kleine) Anfangs-Auslenkungen numerisch lösen können.
- Achtung: die folgenden Parameter für das Runge-Kutta-Programm gelten für **alle** Tests dieser Übung:

relative Genauigkeit EPS =  $10^{-7}$

Parameter HMIN = 0.0

Parameter NSTMAX = 40000

- In allen nun folgenden Tests soll  $\omega$  den Wert  $1.2 \text{ s}^{-1}$  haben.

- Berechnen Sie sowohl die *Bahnkurven* als auch die *Phasen-Diagramme* für die Anfangs-Auslenkungen

$$\varphi_0 = 5 \quad 10 \quad 20 \quad \text{Grad}$$

jeweils für den Zeitraum von  $t = 0$  bis  $t = 4$ -5 Schwingungsdauern **und präsentieren Sie die Ergebnisse in Form von Diagrammen.**

Wie Sie vermutlich wissen, ist ein *Phasendiagramm* die Darstellung der Bewegungskurven eines Massenpunktes im Auslenkungs-Geschwindigkeits-Raum, d.h. in einem Koordinatensystem mit den Auslenkungen von der Ruhelage als Abszisse und den entsprechenden Geschwindigkeiten (Impulsen) als Ordinate.

Für das lineare mathematische Pendel sind die Winkel-Auslenkungen bzw. die Winkel-Geschwindigkeiten durch die Gleichungen

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(t) = -\varphi_0 \omega \sin(\omega t)$$

gegeben; der Zusammenhang zwischen  $\varphi$  und  $\dot{\varphi}$  lautet demnach

$$\frac{\varphi^2}{\varphi_0^2} + \frac{\dot{\varphi}^2}{(\omega\varphi_0)^2} = 1. \quad (12)$$

Das entsprechende Phasendiagramm sollte also eine Ellipse mit den Halbachsen  $\varphi_0$  und  $\omega\varphi_0$  zeigen.

- Vergleichen Sie Ihre numerischen Resultate mit den entsprechenden analytischen Ergebnissen gemäß Glgen. (11) und (12).

Nach diesen einfachen Tests wird es nun mathematisch und physikalisch wesentlich interessanter. Es geht im folgenden darum, die Nicht-Linearität der Bewegungsgleichung (1) zu berücksichtigen:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0 \quad (13)$$

mit

$$\varphi(t=0) = \varphi_0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(t=0) = 0.$$

Für dieses Anfangswertproblem gibt es keine einfache analytische Lösung, sondern man ist auf die Numerik angewiesen. Dennoch lohnt es sich, auch dieses Problem analytisch etwas weiter zu verfolgen (das Folgende z. B. nach A. Sommerfeld, *Mechanik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1962, S. 76ff):

Wenn man die Differentialgleichung (13) mit  $\dot{\varphi}$  multipliziert, ergibt sich

$$\dot{\varphi} \ddot{\varphi} + \omega^2 \dot{\varphi} \sin \varphi = 0,$$

woraus durch zeitliche Integration der Ausdruck

$$\frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2 = \omega^2 \cos \varphi + C \quad (14)$$

folgt. Die Integrationskonstante ergibt sich aus den Anfangsbedingungen zu

$$C = -\omega^2 \cos \varphi_0.$$

Unter Verwendung dieser Konstanten sowie der Identität

$$\cos \varphi - \cos \varphi_0 = 2 \left( \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$$

erhält man aus Glg. (14) nach einigen elementaren Rechenschritten den Ausdruck

$$\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\left(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)}} = \omega dt. \quad (15)$$

Integriert man nun links zwischen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \varphi_0$ , so entspricht das rechts einer zeitlichen Integration über ein Viertel der vollen Schwingungsdauer  $T$ , d.h.

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\left(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)}} = \frac{1}{4} \omega T$$

bzw., unter Berücksichtigung von  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ ,

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\left(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)}}. \quad (16)$$

Dieser Ausdruck wird gewöhnlich noch in die sogenannte kanonische Form gebracht, was dadurch geschieht, daß man die Variablen-Transformation

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \psi$$

durchführt. Die Details dieser Rechnung überlasse ich Ihnen, wenn Sie Interesse haben; als Ergebnis bekommt man für die Schwingungsdauer  $T$  die Formel

$$T = \frac{4}{\omega} K(k) \quad \text{mit} \quad K(k) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}. \quad (17)$$

$K(k)$  ist das bekannte *vollständige elliptische Integral erster Gattung* mit dem *Modul*

$$k = \sin \frac{\varphi_0}{2}.$$

Damit haben wir einen kompakten Integral-Ausdruck für die Schwingungsdauer des nicht-linearen Pendels gefunden. Obwohl auch dieses elliptische Integral nicht analytisch auswertbar ist, kann man bereits hier eine interessante Beobachtung machen: *es ist bekannt, daß  $K = \infty$  für  $k \rightarrow 1$ , d.h., für die maximale Pendel-Auslenkung  $\varphi_0 \rightarrow 180$  Grad bzw.  $\pi$  wächst die Schwingungsdauer über alle Maßen!*

Natürlich könnte man die elliptischen Integrale mittels der numerischen Integration (s. Kapitel 6 des Vorlesungsskriptums) berechnen; für den konkreten Fall der  $K(k)$  gibt es aber einen einfachen und leistungsfähigen Algorithmus, der auf keinen Geringeren als auf Karl Friedrich Gauss zurückgeht:

```

|-----|
|      pi:=3.14159265359;      |
|      a:=cos(phi0/2.0);      |
|      b:=1.0;                |
|-----|
|                                |
|      i=1(1)5                |
|      |-----|              |
|      |      geom:=sqrt(a*b);  |
|      |      arith:=(a+b)/2.0; |
|      |      a:=geom;          |
|      |      b:=arith;         |
|-----|-----|
|      c:=(a+b)/2.0;          |
|      kintegral:=pi/2.0/c;    |
|-----|

```

phi0 = Winkel der Anfangs-  
Auslenkung (in rad)

Wie Sie sehen, sind in diesem Struktogramm nur 5 Iterationsschritte vorge-  
sehen. Nach Überhuber<sup>1</sup> liefert dieser Algorithmus für den Argumentbereich  
 $0.0 \leq \varphi_0 \leq 3.1414$  rad das elliptische Integral auf sieben Dezimalstellen  
genau.

### Aufgabenstellung

- Schreiben Sie ein Programm, mit dem Sie unter Verwendung des obigen Algorithmus die Schwingungsdauer eines nicht-linearen Pendels *in Abhängigkeit von der Anfangs-Auslenkung*  $\varphi_0$  berechnen können.
- Verwenden Sie für diese und die folgenden Aufgaben wieder

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = 1.2 \text{ s}^{-1}.$$

- Stellen Sie die Schwingungsdauer als Funktion von  $\varphi_0$  für  $\varphi_0 = 0$  bis nahe  $\pi$  grafisch dar, und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der (von der Anfangs-Auslenkung unabhängigen) Schwingungsdauer des linearen Pendels [s. Glg. (8)].

In den folgenden Aufgaben dieser Übung sollen nun die Eigenschaften der nicht-linearen Pendelbewegung untersucht werden: einen wesentlichen Unterschied zum linearen Pendel haben wir bereits kennengelernt:

<sup>1</sup>Ch. Überhuber, *Computer-Numerik* Bd. 1, Springer 1995, S. 21.

- Beim linearen Pendel ist die Schwingungsdauer  $T$  unabhängig von der Anfangsauslenkung; man sagt, diese Pendelbewegung ist *isochron*.
- Beim nicht-linearen Pendel ist die Schwingungsdauer  $T$  eine monoton ansteigende Funktion mit steigender Anfangsauslenkung.

### Aufgabenstellung

- Erstellen Sie eine Version Ihres Programmes, mit dem Sie das Problem des nicht-linearen Pendels numerisch lösen können.
- Berechnen Sie sowohl die *Bahnkurven* als auch die *Phasen-Diagramme* für einen Zeitraum von  $t = 0$  bis 40 Sekunden für die folgenden Anfangsauslenkungen (in Grad):  
10 45 90 120 150 170 178 179.5
- Präsentieren Sie die Ergebnisse in Diagrammen, und führen Sie jeweils einen Vergleich mit den entsprechenden analytischen Resultaten für das lineare Pendel [Gln. (11) und (12)] durch.

Für die letzten Untersuchungen im Zusammenhang mit dem einfachen nicht-linearen Pendel sollen nun andere Anfangsbedingungen gewählt werden, nämlich

$$\varphi(t = 0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(t = 0) = \dot{\varphi}_0$$

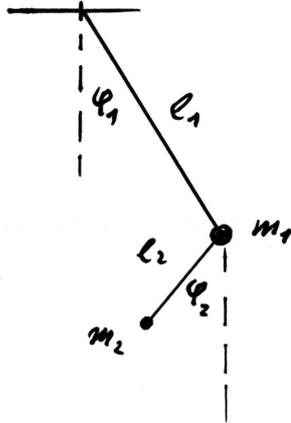
Das bedeutet, daß das Pendel anfangs sich in der Gleichgewichtslage befindet und eine Anfangs-Winkelgeschwindigkeit erhält, also mit einer mehr oder weniger großen Intensität angestoßen wird.

### Aufgabenstellung

- Berechnen Sie numerisch die Bahnkurve und das Phasendiagramm für ein nicht-lineares Pendel für die zuletzt definierten Anfangsbedingungen.
- Beginnen Sie bei diesen Tests mit kleinen Anfangs-Winkelgeschwindigkeiten (z.B. mit  $\dot{\varphi}_0 = 5$  Grad/s), und steigern Sie dann den Wert dieser Anfangsgröße.
- In welcher Weise verändern sich Bahnkurve und Phasendiagramm "dramatisch" bei einer bestimmten *kritischen Anfangs-Winkelgeschwindigkeit*?  
Interpretieren Sie diese Veränderung.
- Den Wert der *kritischen Anfangs-Winkelgeschwindigkeit* haben Sie empirisch ermittelt. Wenn Sie etwas nachdenken, werden Sie ohne Probleme diese Größe auch analytisch bestimmen können (Energiesatz!!).

## 2. Das Doppelpendel

### Theoretische Grundlagen



Schon im Falle des einfachen Pendels ist eine konsequente analytische Behandlung auf die Näherung für kleine Auslenkungen beschränkt. Beim Doppelpendel mit den beiden schwingenden Massen  $m_1$  und  $m_2$  an den gewichtsfreien und starren Stäben mit den Längen  $l_1$  und  $l_2$  ist eine analytische Lösung ebenfalls nur unter sehr einschränkenden Bedingungen möglich.

Wieder geht es zuerst darum, die Bewegungsgleichungen (hier sind es natürlich zwei, weil ja zwei Massen sich bewegen) aufzustellen. Hier zeigen sich viel deutlicher als beim einfachen Pendel die Vorteile des Lagrange-Formalismus: es ist nämlich nicht ganz einfach, die Bewegungsgleichungen "direkt" aus der obigen Zeichnung zu ermitteln.

Die Anschreibung der kinetischen und potentiellen Energie des 2-Teilchen-Systems macht hingegen keine Schwierigkeiten. Als *generalisierte Koordinaten* nehmen wir wieder die Winkel, also  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , sodaß die Lagrange-funktion von vier Argumenten

$$L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = E_{kin} - E_{pot}$$

abhängt.

Es ist nicht schwierig, und Sie sollten es wirklich auch selbst schaffen, die folgenden Ausdrücke für  $E_{kin}$  und  $E_{pot}$  mit Hilfe der obigen Zeichnung zu erhalten:

$$E_{kin}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{m_1(\dot{\varphi}_1)^2}{2} + \frac{m_2}{2} \left[ (\dot{\varphi}_1)^2 + (\dot{\varphi}_2)^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \quad (18)$$

und

$$E_{pot}(\varphi_1, \varphi_2) = m_1 g l_1 (1 - \cos \varphi_1) + m_2 g (l_1 + l_2 - l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2) . \quad (19)$$

Daraus ergeben sich unter Verwendung der Gleichungen (3)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} \quad (20)$$

die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} &= m_1 \ell_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 \ell_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ &\quad + m_2 \ell_1 \ell_2 (\dot{\varphi}_2)^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_1 g \ell_1 \sin \varphi_1 - m_2 g \ell_1 \sin \varphi_1$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} &= m_2 \ell_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 \ell_1 \ell_2 (\dot{\varphi}_1)^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ &\quad + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 g \ell_2 \sin \varphi_2$$

Diese Ausdrücke in die Gleichungen (20) eingesetzt ergibt die Bewegungsgleichungen für die beiden schwingenden Massen des Doppelpendels:

$$(1+\alpha)\ddot{\varphi}_1 + \alpha\beta\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \alpha\beta(\dot{\varphi}_2)^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = -\omega^2(1+\alpha) \sin \varphi_1 \quad (21)$$

und

$$\beta\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - (\dot{\varphi}_1)^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = -\omega^2 \sin \varphi_2. \quad (22)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = \varphi_{10} \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_{10} \quad \varphi_2(0) = \varphi_{20} \quad \dot{\varphi}_2(0) = \dot{\varphi}_{20} \quad (23)$$

Die in den Gleichungen (21 und (22) vorkommenden Abkürzungen lauten:

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1} \quad \beta = \frac{\ell_2}{\ell_1} \quad \omega^2 = \frac{g}{\ell_1}, \quad (24)$$

### Aufgabenstellung - Erstes Experiment

- Schreiben Sie ein Programm, mit dem Sie unter Verwendung der C-Routine *runge-kutta\_D.c* das Problem des Doppelpendels für beliebige Anfangsbedingungen sowie beliebige Parameterwerte  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\omega$  numerisch lösen können.

Natürlich müssen Sie auch in diesem Fall das System zweier Differentialgleichungen zweiter Ordnung (21, 22) in ein System von vier Differentialgleichungen erster Ordnung überführen, bevor Sie das entsprechende DERIVS-Programm schreiben können. Diese Umformung ist zwar nicht trivial, aber auch nicht besonders schwierig.

- Für das erste Doppelpendel-”Experiment” soll die folgende Situation angenommen werden: zum Zeit-Nullpunkt befindet sich das Pendel in der Ruhelage, d.h.  $\varphi_{10} = \varphi_{20} = 0$ . Nun gibt man (nur) dem ersten Pendel einen Stoß, d.h. die Anfangsbedingungen für die Winkelgeschwindigkeiten lauten

$$\dot{\varphi}_{10} = \text{Eingabewert} \quad \dot{\varphi}_{20} = 0.0 \quad ,$$

wobei dieser Eingabewert klein sein soll (einige Grad/s), um nicht zu große Auslenkungen der Pendel zu provozieren: nehmen Sie für den ersten Test den Input  $\dot{\varphi}_{10} = 1.0$  Grad/s.

Diese Situation kann man näherungsweise auch analytisch behandeln: ich zitiere dazu z.B. aus dem dtv-Lexikon Physik, Stichwort ”Pendel”: *für kleine Schwingungsausschläge ergibt sich, daß die beiden Pendel auf keinen Fall genau mit der gleichen Frequenz schwingen können. Annähernd wird dies erreicht, wenn  $\ell_1 = \ell_2$  und  $m_1 \gg m_2$  ist. Gibt man dem oberen (ersten) Pendel einen kurzen Stoß, dann gerät das untere in lebhaft Bewegung, die jedoch relativ schnell abklingt. Zugleich beobachtet man, daß das obere Pendel zu schwingen beginnt, dann aber sehr rasch wieder zur Ruhe kommt, während das untere Pendel sich erneut lebhaft bewegt usw. Die Energie wandert also periodisch zwischen den beiden Pendeln hin und her; es treten Schwebungen auf.*

Versuchen Sie eine solche Situation darzustellen, indem Sie die Auslenkungskurven der beiden Pendel als Funktion der Zeit im Zeitraum von Null bis 200 Sekunden graphisch darstellen.

Parameter des Doppelpendels:  $\alpha = 0.01$      $\beta = 1.0$      $\omega = 1.2$

- Nehmen Sie nun das gegebene Doppelpendel und *erhöhen Sie schrittweise den Eingabewert von  $\dot{\varphi}_{10}$* , d.h., stoßen Sie das erste (obere) Pendel immer stärker an.
- Wie verändert sich das Verhalten der beiden schwingenden Massen?

### Aufgabenstellung - Zweites Experiment

- In diesem numerischen Experiment soll ein Doppelpendel simuliert werden, dessen Parameter wie folgt lauten<sup>2</sup>:  
 $\alpha = 1.0$  und  $\beta = 1.0$ , d.h. die beiden Massen und die beiden Pendellängen sind gleich. Die Größe  $\omega$  habe den Wert  $7.0 \text{ s}^{-1}$ , und die Anfangswerte lauten wie folgt:

$$\varphi_{10} = 28.0 \quad \varphi_{20} = \text{Eingabewert} \quad \dot{\varphi}_{10} = \dot{\varphi}_{20} = 0.0$$

---

<sup>2</sup>Die Parameter für diese Aufgabe stammen aus: D. R. Stump, Am. J. Phys. **54**, 1096 (1986).

- Berechnen Sie die Auslenkungen der beiden Massen als Funktion der Zeit für den Bereich von Null bis 100 Sekunden, und zwar für die Eingabewerte

$$\varphi_{20} = 170 \quad 175 \quad 179 \quad 179.1 \quad 179.11 \quad \text{Grad},$$

und geben Sie die Ergebnisse in grafischer Form aus.

- Diskutieren Sie die Ergebnisse:
  1. Sind die erhaltenen Kurven wenigstens annähernd periodisch?
  2. Ist die Abhängigkeit der erhaltenen Kurven von den Eingabewerten für  $\varphi_{20}$  stark oder schwach?
  3. Was bedeuten die "Sprünge" in der Auslenkungskurve der zweiten (unteren) Masse, die manchmal über mehrere Radianten gehen?

Ohne Ihren Ergebnissen vorgreifen zu wollen: Sie werden zum Schluß kommen, daß das Doppelpendel im obigen (zweiten) Experiment ein eindeutig **chaotisches** Verhalten zeigt.

- Die extreme Empfindlichkeit solcher chaotischen Systeme hat noch eine andere unerfreuliche Konsequenz: die numerischen Ergebnisse sind nicht nur außerordentlich sensibel in bezug auf die Anfangsbedingungen, sondern auch in bezug auf die Details des Algorithmus und der auftretenden Verfahrens- und Rundungsfehler.

Dies können Sie durch einen einfachen Test verifizieren:

Sie haben die letzte Rechnung mit einer Anfangs-Auslenkung der zweiten Masse von 179.11 Grad und mit dem Runge-Kutta-Genauigkeitsparameter  $\text{EPS} = 10^{-7}$  durchgeführt.

Wiederholen Sie diese Rechnung mit  $\text{EPS} = 10^{-8}$ , und vergleichen Sie die Schwingungskurven für die beiden Pendelmassen mit der vorherigen Rechnung (grafische Darstellung).

Pendel- und insbesondere Doppelpendel-Probleme werden natürlich auch im Internet ausführlich diskutiert. Es gibt vor allem eine große Zahl von Animations-Programmen, die man interaktiv verwenden kann. Ich habe nicht die Zeit, mich durch die vielen einschlägigen Webseiten durchzuarbeiten, aber z.B. hat mir die auf der Adresse

<http://www.maths.tcd.ie/~plynch/SwingingSpring/doublependulum.html>

befindliche Animationsroutine recht gut gefallen.

### 3. Aufgabe: Der van der Pol-Oszillator

#### Theoretische Grundlagen

Es sollen die Eigenschaften des sogenannten *van-der-Polschen* Oszillators untersucht werden, welcher z.B. bei einem Sender elektromagnetischer Strahlung vorliegt, dessen Widerstandsverluste durch eine Rückkopplung über das Steuergitter einer Triode ausgeglichen werden.

Die Differentialgleichung, welche ein solches System beschreibt, kann im Prinzip *nur numerisch* gelöst werden, es können aber zumindest analytische Näherungen für die *Attraktorkurve* (s. u.) angegeben werden.

Der van-der-Polsche Oszillator hat die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} - 2m\gamma(x)\dot{x} + m\omega^2x = 0 \quad (25)$$

mit  $x(t=0) = x_0$  und  $\dot{x}(t=0) = v_0$ . Die Ursache dafür, daß man bei diesem Problem auf eine numerische Lösung angewiesen ist, ist der *nicht-lineare* Term

$$\gamma(x) := \gamma_0 \left[ 1 - \frac{x(t)^2}{x_{kr}^2} \right] \quad (26)$$

im Dämpfungsglied der Bewegungsgleichung, wobei  $\gamma_0 > 0$  und  $x_{kr}$  Konstante sind.  $x_{kr}$  ist eine *kritische Auslenkung*, oberhalb derer die Schwingung gedämpft wird. Für Auslenkungen  $< x_{kr}$  ist  $\gamma(x)$  negativ, d.h. die Schwingungsbewegung wird in diesen Fällen verstärkt.

- Lösen Sie das Anfangswertproblem (25), (26) mit Hilfe des *Runge-Kutta-Verfahrens dreimal*, und zwar für die folgenden Parameter ( $\gamma_0$  und  $\omega$  in  $s^{-1}$ ,  $x_{kr}$  und  $x_0$  in  $cm$ ,  $v_0$  in  $cm/s$ ):

1.  $\omega = \pi$      $\gamma_0 = 0.025$      $x_{kr} = 0.5$   
 $x_0 = 5.0$      $v_0 = 0.0$   
 $0 \leq t \leq 61 s$     EPS = 0.00001
2.  $\omega = \pi$      $\gamma_0 = 1.25$      $x_{kr} = 0.5$   
 $x_0 = 5.0$      $v_0 = 0.0$   
 $0 \leq t \leq 31 s$     EPS = 0.00001
3.  $\omega = \pi$      $\gamma_0 = 2.5$      $x_{kr} = 1.0$   
 $x_0 = 0.1$      $v_0 = 0.0$   
 $0 \leq t \leq 31 s$     EPS = 0.0001

- Stellen Sie für diese drei Fälle die Funktionen  $x(t)$  grafisch dar.
- Zeichnen Sie die *Phasendiagramme* Ihrer Ergebnisse, d.h. stellen Sie die Auslenkungen  $x(t)$  in Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten  $\dot{x}(t)$  dar. Sie werden beobachten, daß in allen Fällen die Schwingung einer *Grenzkurve* zustrebt, die selbst periodische Lösung des Systems ist. Diese Lösung, die *Attraktorkurve* genannt wird, kann zumindest näherungsweise als analytische Funktion der Form

$$x(t) = 2x_{kr} \cos(\omega t) - \gamma_0 \frac{x_{kr}}{2\omega} \sin(3\omega t)$$

bzw. der entsprechenden Ableitung nach der Zeit dargestellt werden. Zeichnen Sie diese Approximationen in Ihre Phasendiagramme ein <sup>3</sup>.

Zu Abschluss dieser Übung sollen Sie nun noch eine interessante Studie über die Form und die Periode der Attraktorkurven in Abhängigkeit vom Parameter  $\gamma_0$  durchführen.

Zu diesem Zweck werten Sie die van der Polsche Bewegungsgleichung für die Parameter

`omega=pi x0=0.1 xkr=1.0 v0=0 fuer 0 < t < 61 s EPS=0.0001`

aus, und zwar für die Werte  $\gamma_0$  von 1 bis 50 (ca. 10  $\gamma_0$ -Werte).

Wenn Sie sich die einzelnen Schwingungsfunktionen ansehen, werden Sie erkennen, wie diese mit steigendem  $\gamma_0$  die Attraktorkurven kontinuierlich von einer harmonischen Cosinus-Kurve zu einer massiv anharmonischen *Sägezahnkurve* werden. Gleichzeitig nimmt die Periodenzeit der Attraktoren mit steigendem  $\gamma_0$  deutlich zu.

Nun zu Ihren Aufgaben:

- Eruieren Sie numerisch die Attraktor-Periode  $P$  als Funktion von  $\gamma_0$ .
- Tragen Sie ihre numerisch erhaltenen Werte in ein Diagramm ein.
- Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der folgenden theoretischen Aussage:

Im Grenzwert für  $\gamma_0 \rightarrow \infty$  ergibt sich der lineare Zusammenhang

$$P(\gamma_0) = \frac{2\gamma_0}{\omega^2} (3 - 2 \ln 2).$$

- Zeichnen Sie alle erhaltenen Schwingungskurven in ein Diagramm, wobei Sie die Zeitachsen jeweils in Einheiten der zum jeweiligen Attraktor gehörenden Periode nehmen, und verschieben Sie diese Kurven horizontal so, dass die Maxima und Minima exakt übereinstimmen. Stellen Sie auf diese Weise etwa drei nebeneinanderliegende Attraktor-Perioden dar<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup>Genauer zum van-der-Polschen Oszillator finden Sie z.B. in: F. Scheck, *Mechanik: von den Newtonschen Gesetzen zum deterministischen Chaos*, Springer-Lehrbuch 1992, S.293f;

Ch. Gerthsen, Physik, 18. Auflage, neubearbeitet von H. Vogel, Springer, Berlin, 1995, S. 976f.

<sup>4</sup>vgl.: K. Lang, *Pendel: Linear und nicht-linear - Chaotische Systeme*, Bachelor-Arbeit, TU Graz 2009, Kap. 2.