

8. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2010

Abgabe: Dienstag, 18. 05. 2010, 13:00 bzw. 15:15 Uhr

Aufgabe 27: Potentialtopf mit verschobener Wand (9 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem eindimensionalen unendlich tiefen Potentialtopf, dessen rechte Wand zum Zeitpunkt $t = 0$ plötzlich von L nach $2L$ verschoben wird:

$$V(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < L, \quad t \text{ beliebig} \\ 0 & \text{für } L \leq x \leq 2L, \quad t > 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} .$$

Für $t < 0$ sei das Teilchen im Grundzustand.

- a) Geben Sie die Wellenfunktion $\phi(x)$ des Anfangszustandes an, d.h die Grundzustandswellenfunktion bei $t < 0$ (aus dem Vorlesungsskript).
- b) Geben Sie die Ortsraum-Eigenfunktionen $\langle x|n\rangle$ des Hamiltonoperators bei $t > 0$ an (aus dem Vorlesungsskript).
- c) Geben Sie die Spektraldarstellung für den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t)$ bei $t > 0$ an.
- d) Bestimmen Sie mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators den Zustand $\psi(x, t)$ für $t > 0$, nur formal als Linearkombination der Eigenzustände $|n\rangle$ von \hat{H} .
- e) Vergleichen Sie die Eigenenergien bei $t < 0$ und $t > 0$. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei einer Messung der Energie des Teilchens zur Zeit $t > 0$
 - i) eine kleinere Energie als bei $t < 0$,
 - ii) die gleiche Energie wie bei $t < 0$,
 - iii) eine größere Energie als bei $t < 0$

gefunden wird. *Anleitung:* Überlegen Sie, welche Eigenenergien des verbreiterten Topfes den Fällen i), ii), iii) entsprechen. Bestimmen Sie dann die Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Messergebnisse.

- f) Wie groß ist der Erwartungswert der Energie bei $t > 0$?

Aufgabe 28: Spin in Richtung \vec{n}

(5 Punkte)

Berechnen Sie die Spin- $\frac{1}{2}$ -Eigenvektoren in Richtung eines Einheitsvektors \vec{n} mit Polarkoordinaten (θ, ϕ) . Lösen Sie dazu explizit die Eigenwertgleichung

$$(\vec{S} \cdot \vec{n})|\pm n\rangle = \frac{\hbar}{2}\lambda_{\pm}|\pm n\rangle$$

für den Spin-Operator in Richtung \vec{n} , $\hat{S}_n \equiv \vec{S} \cdot \vec{n}$.

Zeigen Sie zunächst, dass die obige Gleichung in der z -Basis zu

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \lambda_{\pm} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

wird.

Hinweise: Die Lösung für $|+n\rangle$ kennen Sie aus dem Skriptum. Beachten Sie, dass Eigenvektoren im Komplexen nur bis auf eine beliebige Phase festgelegt sind. Die Lösung für $|-n\rangle$ erhalten Sie am einfachsten über die Orthogonalität mit $|+n\rangle$.

Aufgabe 29: Schrödingergleichung im Impulsraum

(6 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in einem Potential $V(x)$. Wie lautet die Schrödingergleichung $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{Q})$ im Impulsraum, d.h. als Gleichung für $\tilde{\psi}(k, t) \equiv \langle k | \psi(t) \rangle$?

Hinweise: Ein möglicher Lösungsweg ist die direkte Fouriertransformation der Schrödingergleichung für $\psi(x, t)$. Eine andere Möglichkeit ist, die Schrödingergleichung für den Vektor $|\psi(t)\rangle$ im Impulsraum auszuwerten.

Für ein freies Teilchen ($V = 0$) erhalten Sie das aus Aufgabe 24 bekannte Ergebnis

$$i\hbar \frac{d\tilde{\psi}(k, t)}{dt} = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \tilde{\psi}(k, t) .$$