3. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2010

Abgabe: Dienstag, 23. 03. 2009, 13:00 bzw. 15:15 Uhr

Aufgabe 8: Diagonalisierung einer Matrix *(5 Punkte)*

In einem n-dimensionalen komplexen Vektorraum ist ein hermitescher Operator $\hat{A}$ gegeben, mit orthonormalen Eigenvektoren $|a_i\rangle$ und Eigenwerten λ_i. Die Darstellung von $\hat{A}$ in der Basis $\{|e_i\rangle\}$ ist eine $n \times n$ Matrix (A_{ij}).
Die Lösungen zu dieser Aufgabe finden Sie zum größten Teil im Vorlesungsskript !

(a) Wie lautet die Spektraldarstellung des Operators $\hat{A}$?
Geben Sie die Matrixdarstellung von $\hat{A}$ in der Eigenbasis $\{|a_i\rangle\}$ an.

(b) Wie lauten allgemein die Koeffizienten von $|a_i\rangle$ und $\hat{A}$ in der Basis $\{|e_i\rangle\}$?

(c) Finden Sie eine Basistransformation der Form

$$\hat{U} \;=\; \sum_l \, |v_l\rangle\langle e_l|$$

mit geeigneten Vektoren $|v_l\rangle$ *so*, dass der Operator $\hat{A}$ mit dieser Transformation diagonalisiert wird, dass also $\hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U}$ *in der Basis* $\{|e_i\rangle\}$ *diagonal* ist. Wie lauten die Matrixelemente dieser Diagonalmatrix ?

(d) Wie lautet $\hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U}$ in Operatorform ? Begründen Sie mit Hilfe der Form des Resultats, warum der Operator in der Basis $\{|e_i\rangle\}$ diagonal ist.

(e) Wie lauten die Matrixelemente von $\hat{U}$ in der Basis $\{|e_i\rangle\}$?
Wo finden Sie in der Matrix (U_{ij}) die Koeffizienten der Eigenvektoren von $\hat{A}$ wieder ?

Aufgabe 9: Eigenvektoren und Eigenwerte *(5 Punkte)*

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} -1 & -2\,\mathrm{i} \\ 2\,\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$.
Die Eigenvektoren sind nur bis auf eine beliebige Phase bestimmt, die Sie frei wählen können.

(b) Geben Sie die Matrix U an, die diese Matrix diagonalisiert (siehe vorige Aufgabe).

(c) Führen Sie die Diagonalisierung explizit durch, d.h. berechnen Sie die Matrix $U^\dagger\, A\, U$.

Aufgabe 10: Delta-Distribution *(4 Punkte)*

(a) Zeigen Sie $\quad x\,\delta(x-y) \;=\; y\,\delta(x-y)$.

(b) Berechnen Sie folgende Integrale für eine Testfunktion $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(b - a\,x^2)\; f(x)\; dx, \qquad a, b > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x)\; f(x)\; dx$$

(c) Berechnen Sie

$$\rho(E) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}k\; \delta(\varepsilon(k) - E)$$

mit $\varepsilon(k) = -2t\cos(k), t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 11: Pauli-Matrizen *(6 Punkte)*

Die Pauli-Matrizen sind definiert als

$$\sigma_x \equiv \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y \equiv \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z \equiv \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen hermitesch sind, und dass $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ gilt.

b) Verifizieren Sie anhand von zumindest zwei Beispielen (mit $i = j$ und mit $i \neq j$), dass

$$\boxed{\sigma_i\,\sigma_j \;=\; \delta_{ij}\,\mathbb{1} \;+\; i \sum_k \epsilon_{ijk}\;\sigma_k}$$

$(i, j = 1, 2, 3)$, wobei $\epsilon_{123} = 1$, $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj}$ ist.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der obigen Beziehung, dass

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})\mathbb{1} \;+\; i\vec{\sigma}(\vec{A} \times \vec{B})$$

für beliebige (auch miteinander nicht-vertauschende) dreikomponentige Objekte $\vec{A}$,$\vec{B}$ gilt, sofern diese mit den Pauli-Matrizen vertauschen. *Anleitung:* Schreiben Sie $(\vec{\sigma}\cdot\vec{A}) = \sum_i \sigma_i A_i$, und $(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \sum_j \sigma_j B_j$, um die obige Beziehung verwenden zu können.

d) Berechnen Sie mit Hilfe der eingerahmten Beziehung die Kommutatoren $[\sigma_i, \sigma_j] \equiv \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i$ $(i, j = 1, 2, 3)$ in symbolischer Schreibweise mit dem ϵ-Tensor.