4.1. Die Heavisidesche Sprungfunktion

aus Mathemat. Hilfsmittel - - Studienbücherei V

①

In der Elektrotechnik bedient man sich zur mathematischen Beschreibung von Ein- und Ausschaltvorgängen der Funktion $\theta(x)$. Sie ist definiert durch

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \\ & \text{für} \\ 1 & \end{cases} \begin{matrix} x < 0 \\ \\ x > 0, \end{matrix} \tag{4,1}$$

wobei $\theta(0)$ beliebig gewählt sei. Die Wahl des Funktionswertes $\theta(0)$ ist für die weiteren Ausführungen ohne Bedeutung. In Abb. 4.1 ist $\theta(x)$ dargestellt.

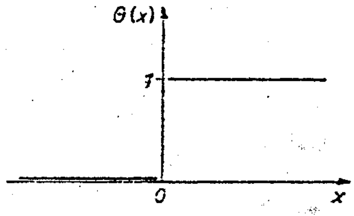

Abb. 4.1
Sprungfunktion

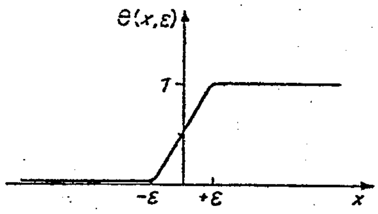

Abb. 4.2
$\theta(x, \varepsilon)$-Funktion

Für einige Überlegungen ist es zweckmäßig, anstelle der Sprungfunktion $\theta(x)$ eine auch in $x = 0$ stetige und differenzierbare Ersatzfunktion $\theta(x, \varepsilon)$, wie sie qualitativ in Abb. 4.2 wiedergegeben ist, zu betrachten.

Der spezielle Verlauf der Ersatzfunktion $\theta(x, \varepsilon)$ im Intervall $-\varepsilon$ bis $+\varepsilon$ ist für das Folgende ohne Bedeutung, jedoch nimmt man einen hinreichend glatten Verlauf der die beiden Kurventeile der θ-Funktion verbindenden Kurve an.

Der Definitionsgleichung (4,1) der θ-Funktion entnimmt man folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\theta(x) + \theta(-x) &= 1 \quad \text{für} \quad |x| > 0, \\
\theta(x) - \theta(-x) &= \begin{cases} -1 & x < 0 \\ & \text{für} \\ 1 & x > 0, \end{cases} \\
\theta(x)\,\theta(-x) &= 0 \quad \text{für} \quad |x| > 0, \\
\theta(x-a)\,\theta(x-b) &= \theta(x-a) \quad \text{für} \quad a \geqq b.
\end{aligned} \tag{4,2}$$

Aus der letzten Beziehung folgt für $a = b = 0$

$$\theta(x)\,\theta(x) = \theta(x) \quad \text{für} \quad |x| > 0.$$

4.2. Die Diracsche Deltafunktion

In der Physik der Felder und bei Kontinuumsbetrachtungen hat man häufig Punktmassen, Punktladungen und ähnliche „Singularitäten“ in einem sonst stetigen und differenzierbaren Feld zu beschreiben. Das erfolgt durch eine nicht im üblichen Sinne erklärbare Funktion, die Diracsche δ-Funktion. Die strenge mathematische Behandlung der δ-Funktion gehört in die Theorie der Distributionen, die von L. Schwartz erarbeitet wurde, worauf wir hier verzichten wollen. Die δ-Funktion läßt sich formal als Ableitung der θ-Funktion erklären.

$$\delta(x) := \frac{d\theta(x)}{dx} \quad \text{bzw.} \quad \theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x')\, dx' \tag{4,3}$$

Entscheidend für den in (4,3) gegebenen Zusammenhang ist der Begriff der Ableitung der θ-Funktion, den wir über die folgende Integralbeziehung erklären wollen.

Es sei $f(x)$ eine stetig differenzierbare und $\varphi(x)$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion. Die Funktion $\varphi(x)$ und ihre Ableitungen sollen für $|x| \to \infty$ so stark gegen Null konvergieren, daß die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

existieren. Nach der partiellen Integrationsmethode ist dann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\,\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

woraus die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \tag{4,4}$$

folgt. Da $\theta(x)$ nur in $x = 0$ eine Sprungstelle besitzt, existiert das Integral auf der rechten Seite von (4,4), wenn $f(x)$ durch $\theta(x)$ ersetzt wird, und wir erhalten formal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4,5}$$

In diesem Zusammenhang bekommt die Ableitung der θ-Funktion trotz der Singularität in $x = 0$ einen wohl definierten Sinn, und in der Definitionsgleichung (4,3) für die δ-Funktion soll $\theta'(x)$ stets in einem der Beziehung (4,5) entsprechendem Zusammenhang verstanden werden.

Berücksichtigen wir auf der linken Seite von (4,5) die Beziehung (4,3) und rechts die Eigenschaften (4,1) der θ-Funktion, so folgt schrittweise

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -[\varphi(x)]_0^{\infty}\\ &= \varphi(0).\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0). \tag{4,6}$$

Analog dazu erhält man aus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi'(0). \tag{4,7}$$

Weitere Eigenschaften der δ-Funktion leiten wir aus den leicht zu beweisenden Integralbeziehungen (4,8) und (4,9) ab.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{d}x, \tag{4,8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x')\,\varphi(x')\,\mathrm{d}x' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(x - t)\,\mathrm{d}t. \tag{4,9}$$

Unterscheiden wir hier die beiden Fälle $a > 0$ und $a < 0$ und wählen wir die Integrationsgrenzen stets so, daß die untere Grenze gegen $-\infty$ und die obere gegen $+\infty$ geht, so lassen sich beide Fälle zusammenfassen zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{|a|}\int_{-t/|a|}^{+t/|a|} f(y)\varphi\left(\frac{y}{a}\right)\mathrm{d}y.$$

Durch Umbenennung der Integrationsvariablen auf der rechten Seite folgt (4,8).
Aus der Integralbeziehung (4,8) folgt für $a \neq 0$ und $f(ax) = \delta(ax)$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{|a|} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{|a|}\, \varphi\left(\frac{0}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{|a|}\, \varphi(0).$$

Andererseits ist

$$\varphi(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x,$$

so daß wir

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(ax)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|}\, \delta(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

erhalten. Diese Gleichung gilt für jede erlaubte Funktion $\varphi(x)$, also muß

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\, \delta(x) \tag{4,10}$$

sein. Hieraus lesen wir eine weitere Eigenschaft ab:

$$\delta(-x) = \delta(x) \qquad (a = -1). \tag{4,11}$$

Setzen wir in Gl. (4,9) $f(x) = \delta(x)$, so erhalten wir

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x')\, \varphi(x')\, \mathrm{d}x' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(x - t)\, \mathrm{d}t.$$

Mit $\psi(t) := \varphi(x - t)$ wird daraus

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, \varphi(x - t)\, \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, \psi(t)\, \mathrm{d}t = \psi(0) = \varphi(x);$$

somit gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x')\, \varphi(x')\, \mathrm{d}x' = \varphi(x). \tag{4,12}$$

Schließlich entnehmen wir aus Gl. (4,6), wenn wir $\varphi(x)$ durch $x \cdot \varphi(x)$ ersetzen, die Beziehung

$$x\delta(x) = 0. \tag{4,13}$$

Die dreidimensionale δ-Funktion $\delta(\boldsymbol{r}) := \delta(x, y, z)$ wird durch die Gleichung

$$\delta(\boldsymbol{r}) := \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z)$$

definiert. Sie hat ebenfalls die bekannte Eigenschaft

$$\int F(\boldsymbol{r})\, \delta(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = F(\boldsymbol{0}),$$

wobei die Integration über den gesamten Raum zu erstrecken ist.

Abschließend soll noch eine für die Physik besonders wichtige *Fourier-Integraldarstellung der δ-Funktion* angegeben werden. Man schreibt die Fouriersche Integralformel (Abschn. 3.2.3.) in der Form

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'\, f(x') \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x - x')}$$

und vergleicht mit (4,12). Es ergibt sich die Integraldarstellung

$$\delta(x - x') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x - x')}. \tag{4,14}$$

Die dreidimensionale Form lautet

$$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,.$$

Die folgenden, häufig verwendeten Darstellungen der δ-Funktion können als Beispiele dienen:

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2x^2} \qquad \rightarrow \quad \Theta(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(nx) \right] \tag{7.14}$$

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} n\, e^{-\pi x^2 n^2} \qquad \rightarrow \quad \Theta(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}(x \cdot n\sqrt{\pi}) \right] \tag{7.15}$$

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} \left(\frac{\sin nx}{nx} \right)^2 . \tag{7.16}$$

Spaltet man das Integral über x in drei Teile auf, $\int_{\dots}^{-\epsilon} + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} + \int_{+\epsilon}^{\dots}$, so spielt offensichtlich jeweils nur $\varphi(x)$ bei $x \approx 0$ eine Rolle, dort kann man $\varphi(0)$ herausziehen und die Limites als Darstellung des δ-Funktionals nachweisen.

Aus (7.14) folgt mit $\epsilon = \frac{1}{n} \to 0$ die wichtige Darstellung

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} . \qquad \rightarrow \quad \Theta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \tag{7.17}$$

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{+n} e^{ikx}\, dk . \tag{7.19}$$

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} . \qquad \rightarrow \quad \Theta(x) = \text{Fu (Integralsinus)} \tag{7.20}$$

Hier wie in den vorigen Beispielen ist zu beachten, daß dieser Limes eben **n i c h t** punktweise zu verstehen ist, sondern **n a c h** Integrieren über Testfunktionen $\varphi(x)$, eben als Distributionslimes! Das gilt auch im folgenden Beispiel:

In der folgenden Tabelle sind die Eigenschaften des δ-Funktionals für den praktischen Gebrauch zusammengestellt [1].

$l_{\delta_{x_0}}(\varphi) \equiv \int \delta(x-x_0)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(x_0)$
$\delta(x)$ gerade "Funktion" von x
$\delta(x) = \frac{d}{dx}\theta(x)$
$\varphi(x)\,\delta(x-x_0) = \varphi(x_0)\,\delta(x-x_0)$
$x\delta(x) = 0$
$\delta(ax) = \frac{1}{\lvert a\rvert}\delta(x)$
$\delta(f(x)) = \frac{1}{\lvert f'(x_0)\rvert}\delta(x-x_0)$
(sofern eine einfache Nullstelle x_0 im Integrationsbereich liegt)
$\delta(x^2-x_0^2) = \frac{1}{2\lvert x_0\rvert}(\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0))$
$\lvert x\rvert\,\delta(x^2) = \delta(x)$
$-x\,\delta'(x) = \delta(x)$
$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$

$$\delta\left[(x-x_1)(x-x_2)\right] = \frac{1}{\lvert x_1-x_2\rvert}\left[\delta(x-x_1)+\delta(x-x_2)\right] \quad \text{für } x_1 \neq x_2$$

Beweis → Beiblatt

$$\delta(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(x\cdot\Theta(x)\right) \qquad ?$$

Aus: Großmann: Funktionalanalysis I

(4)