# Anhang E

## E.1 Die Dirac Gleichung

Die Gleichung (D.19) - die Klein-Gordon Gleichung - ist nicht prozessdefinierend. Man kann also nicht aus der Kenntnis des Zustandes $\psi(\mathbf{r}, t_0)$ in eindeutiger Weise auf den Zustand $\psi(\mathbf{r}, t)$ $(t_0 \neq t)$ schließen. Dies wäre nur dann möglich, wenn die Gleichung, so wie etwa die Schrödingergleichung, von erster Ordnung in der Zeitableitung ist. Es besteht also die Aufgabe, eine Lorentz-invariante Wellengleichung aufzufinden, welche in der Zeitableitung von erster Ordnung ist. Da aber die Zeit- und Raumkoordinaten Komponenten eines Vierervektors $(x^\mu)$ sind, so wird die gesuchte Gleichung auch von erster Ordnung in den Ortsableitungen sein.

Wir führen zunächst den Differentialoperator

$$L^2 = (p_\mu p^\mu - m_0^2)$$

ein und erhalten die Klein-Gordon Gleichung in der Form

$$L^2 \psi(x^\mu) = 0.$$

Gefordert ist aber die Form:

$$L^1 \psi(x^\mu) = 0, \tag{E.1}$$

mit einem Lorentz-invarianten Differentialoperator erster Ordnung $L^1$. Dieser wird folgende allgemeine Form haben:

$$L^1 = a_\mu p^\mu - b m_0, \tag{E.2}$$

mit $a^\mu$ einem Vierervektor und $b$ einem Lorentz-Skalar. Beide sind wegen der Homogenität des Raumes konstant und nicht von $(x^\mu)$ abhängig.

Wir formen für $b \neq 0$ um:

$$\begin{aligned} a_\mu p^\mu - b m_0 &= b\left(\frac{1}{b} a_\mu p^\mu - m_0\right) \\ &= b\left(\gamma_\mu p^\mu - m_0\right). \end{aligned}$$

Es ist dann wegen (E.1):

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m_0\right)\psi(x^\mu) = 0 \tag{E.3}$$

zu erfüllen. Es muß dann weiters

$$\left(\gamma_\mu p^\mu\right)^2 = m_0^2 = p_\mu p^\mu \tag{E.4}$$

gelten (siehe Gleichungen (D.10) und (D.15)). Dies führt aber zu:

$$\begin{aligned} \left(\gamma_0 p^0 + \gamma_1 p^1 + \gamma_2 p^2 + \gamma_3 p^3\right)\left(\gamma_0 p^0 + \gamma_1 p^1 + \gamma_2 p^2 + \gamma_3 p^3\right) &= p_\mu p^\mu \\ \left(\gamma_0 p^0\right)^2 + \gamma_0\gamma_1 p^0 p^1 + \gamma_0\gamma_2 p^0 p^2 + \gamma_0\gamma_1 p^0 p^3 & \\ +\gamma_1\gamma_0 p^1 p^0 + \left(\gamma_1 p^1\right)^2 + \gamma_1\gamma_2 p^1 p^2 + \gamma_1\gamma_3 p^1 p^3 & \\ +\gamma_2\gamma_0 p^2 p^0 + \gamma_2\gamma_1 p^2 p^1 + \left(\gamma_2 p^2\right)^2 + \gamma_2\gamma_3 p^2 p^3 & \\ +\gamma_3\gamma_0 p^3 p^0 + \gamma_3\gamma_1 p^3 p^1 + \gamma_3\gamma_2 p^3 p^2 + \left(\gamma_3 p^3\right)^2 &= p_\mu p^\mu \\ &= g_{\mu\nu} p^\nu p^\mu. \end{aligned}$$

Dies ist aber nur erfüllt, wenn

$$\gamma_\mu^2 = g_{\mu\mu}$$

und

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 0, \quad \mu \neq \nu$$

gilt. Wir fassen dies zusammen und erhalten das Ergebnis, daß die $\gamma_\mu$ den Antikommutator

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 g_{\mu\nu} \tag{E.5}$$

erfüllen müssen. Dies ist aber durch Zahlen $\gamma_\mu$ nicht zu erreichen, was letztlich die Konsequenz daraus ist, daß wir versuchten die Dispersionsrelation (D.12) zu linearisieren. Mit der Quantisierungsregel

$$p^\mu \quad \longrightarrow \quad -i\partial_\mu$$

folgt schließlich mit

$$\left(i\gamma_\mu\partial_\mu + m_0\right)\psi(x^\mu) = 0, \tag{E.6}$$

die *Dirac Gleichung*.

Die Beziehung (E.5) erinnert stark an die Algebra der Paulimatrizen, welche durch eine Vertauschungsrelation

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{i,j}, \quad i,j = 1,2,3$$

gekennzeichnet ist. Man wird also hoffen können, auch die $\gamma_\mu$ durch quadratische Matrizen darstellen zu können.

Zunächst finden wir aber noch aus (E.5):

$$\begin{aligned}
\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= 2g_{\mu\nu} \\
g_{\mu\rho}\{\gamma^\rho, \gamma_\nu\} &= 2g_{\mu\rho}g^\rho{}_\nu \\
g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\{\gamma^\rho, \gamma^\sigma\} &= 2g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}g^{\rho\sigma} \\
\{\gamma^\rho, \gamma^\sigma\} &= 2g^{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Wir versuchen nun folgenden Ansatz für die $\gamma$-Matrizen:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \\
\gamma_0^2 &= \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \\
&= 1 = g_{00}, \\
\gamma_i &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma_i^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sigma_i^2 & 0 \\ 0 & -\sigma_i^2 \end{pmatrix} \\
&= -1 = g_{ii},
\end{aligned}$$

womit die erste Bedingung für die $\gamma$-Matrizen erfüllt ist. Es gilt weiters:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_i\gamma_j &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_i\sigma_j \end{pmatrix} \\
+ \\
\gamma_j\gamma_i &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sigma_j\sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_j\sigma_i \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} = -\begin{pmatrix} \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \gamma_0\gamma_i & = & \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ + & & \\ \gamma_i\gamma_0 & = & \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} = 0,$$

womit (E.5) vollständig erfüllt wurde. Es gilt also:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \tag{E.8}$$

womit eine von vielen möglichen Darstellungen der $\gamma$-Matrizen aufgefunden wurde. Aus der Minkovski-Metrik folgt weiter:

$$g^{\mu\nu}\gamma_\nu = \gamma^\mu \quad \rightarrow \quad \gamma^0 = \gamma_0, \quad \gamma^i = -\gamma_i.$$

Dies führt weiters zu

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \tag{E.9}$$

Wir erhalten auch

$$\left(\gamma^0\right)^{-1} = \gamma^0, \qquad (\gamma_0)^{-1} = \gamma_0. \tag{E.10}$$

Wir formen nun Gleichung (E.6) weiter um:

$$\begin{aligned} \left(i\gamma_\mu\partial_\mu + m_0\right)\psi(x^\mu) &= 0 \\ \left(ig_{\mu\nu}\gamma^\nu\partial_\mu + m_0\right)\psi(x^\mu) &= 0 \\ \left(i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^i\partial_i + m_0\right)\psi(x^\mu) &= 0 \\ i\gamma_0\partial_0\psi(x^\mu) &= \left(i\gamma^i\partial_i - m_0\right)\psi(x^\mu) \\ i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x^\mu) &= \left(i\gamma^0\gamma^i\partial_i - \gamma^0 m_0\right)\psi(x^\mu), \end{aligned} \tag{E.11}$$

wobei wir Gleichung (E.10) verwendet haben. Sehr häufig wird die Dirac Gleichung (E.6) auch in folgender Form angeschrieben:

$$i\frac{\partial\psi(x^\mu)}{\partial t} = \left[\boldsymbol{\alpha}(-i\nabla) + \beta m_0\right]\psi(x^\mu), \tag{E.12}$$

und wir identifizieren durch Vergleich:

$$\beta = -\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} \tag{E.13}$$

and

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} &= -\gamma^0(\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3) \\
&= \beta(\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3) \\
\alpha^i &= \beta\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{E.14}
$$

Wir setzen nun $\tilde{\gamma}^0 = -\gamma^0$ und $\tilde{\gamma}^i = \gamma^i$ und erkennen durch Ausrechnen, daß das neue System $\tilde{\gamma}^\mu$ ebenfalls die Bedingung (E.5) erfüllt. Damit ergibt sich aus (E.12):

$$
i\frac{\partial\psi(x^\mu)}{\partial t} = \left[-i\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^i\partial_i + \tilde{\gamma}^0 m_0\right]\psi(x^\mu)
\tag{E.15}
$$

oder

$$
i\tilde{\gamma}^0\partial_0\psi(x^\mu) + i\tilde{\gamma}^i\partial_i\psi(x^\mu) - m_0\psi(x^\mu) = 0,
$$

mit der endgültigen Schreibweise:

$$
\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0\right)\psi(x^\mu) = \left(i\,\not{\partial} - m_0\right)\psi(x^\mu) = 0,
\tag{E.16}
$$

wobei wir nun die Schlange über den $\gamma$-Matrizen weggelassen haben, da (E.16) zusammen mit (E.13) and (E.14) der üblichen kovarianten Schreibweise der Dirac Gleichungen entspricht. Um (E.16) zu entsprechen, muß $\psi(x^\mu)$ ein vierkomponentiges Objekt sein, welches *Bispinor* genannt wird.

(Daß $\boldsymbol{\alpha}$ und $\beta$, bzw. $\gamma$, zumindest vierdimensionale Matrizen sein müssen, folgt aus folgender Überlegung: die Matrizen $\alpha^i$ und $\beta$ haben wegen (E.5) die Eigenwerte $\pm 1$; für $i \neq j$ ist dann $\det\{\alpha^i\alpha^j\} = \det\{-\alpha^j\alpha^i\} = (-1)^d\det\{\alpha^i\alpha^j\}$; daraus folgt, daß die Dimension der Matrizen gerade sein muß. Für $d = 2$ existieren nur drei antikommutierende Matrizen - die Paulimatrizen, also muß $d \geq 4$ sein!)

Die Hermitezitätsbedingungen für die $\gamma$-Matrizen sind

$$
{\gamma^0}^\dagger = \gamma^0; \qquad {\gamma^j}^\dagger = -\gamma^j,
$$

oder

$$
(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0.
\tag{E.17}
$$

Wir definieren noch

$$
\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,
\tag{E.18}
$$

mit den Eigenschaften

$$
\left\{\gamma^\mu,\gamma^5\right\} = 0; \qquad \left(\gamma^5\right)^2 = 1; \qquad \left(\gamma^5\right)^\dagger = \gamma^5.
\tag{E.19}
$$

Zusammengefaßt erhalten wir damit folgendes Matrizensystem:

$$\begin{array}{cccccc} E & \gamma^\mu & \gamma^\mu\gamma^\nu & \gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu & \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 & \\ & & (\mu < \nu) & (\sigma < \mu < \nu) & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & = 16 \end{array}$$

Dieses System bildet eine Basis einer Algebra von $4 \times 4$ Matrizen. Die $\gamma^\mu$ sind die Erzeuger dieser Algebra - *Clifford Algebra*.

Aus Gleichung (E.15) folgt schließlich der Hamiltonoperator der Dirac-Gleichung mit

$$\hat{H} = \gamma^0\gamma^i\,(-i\partial_i) + m_0\gamma^0. \tag{E.20}$$

Damit dieser Hamiltonoperator hermitesch ist, müssen offensichtlich die Beziehungen (E.17) erfüllt sein, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Wir definieren nun das adjungierte Feld mit

$$\bar{\psi}(x^\mu) = \psi^\dagger(x^\mu)\gamma^0, \tag{E.21}$$

welches zur adjungierten Dirac Gleichung

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x^\mu) - m_0\psi(x^\mu) &= 0 \\ [i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x^\mu)]^\dagger - m_0\psi^\dagger(x^\mu) &= 0 \\ [\gamma^\mu\,(i\partial_\mu)\,\psi(x^\mu)]^\dagger - m_0\psi^\dagger(x^\mu) &= 0 \\ -\psi^\dagger(x^\mu)\left(i\overleftarrow{\partial}_\mu\right)\gamma^{\mu\dagger} - m_0\psi^\dagger(x^\mu) &= 0 \\ \psi^\dagger(x^\mu)\left(i\overleftarrow{\partial}_\mu\right)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 + m_0\psi^\dagger(x^\mu) &= 0 \quad | \quad \gamma^0 \\ \bar{\psi}(x^\mu)\left(i\overleftarrow{\partial}_\mu\right)\gamma^\mu + m_0\bar{\psi}(x^\mu) &= 0 \\ \bar{\psi}(x^\mu)\left[i\overleftarrow{\not{\partial}} + m_0\right] &= 0 \end{aligned} \tag{E.22}$$

erfüllt. Die Gleichungen (E.16) und (E.22) kann man aus der Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x^\mu)\,[i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0]\,\psi(x^\mu) \tag{E.23}$$

durch Variation des Wirkungsintegrales (2.2) unabhängig nach den Feldkomponenten $\psi_\alpha(x^\mu)$ bzw. $\bar{\psi}_\alpha(x^\mu)$ erhalten. Es folgen dann die zu $\psi_\alpha(x^\mu)$ und $\bar{\psi}_\alpha(x^\mu)$ konjugierten Felder mit

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(x^\mu) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_\alpha} = i\psi^\dagger_\alpha(x^\mu), \\ \bar{\pi}_\alpha(x^\mu) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}_\alpha} = 0. \end{aligned} \tag{E.24}$$

Aus (2.45) und (2.46) folgt weiter:

$$\begin{aligned}
P^0 &= H \\
&= \int d^3r \, \left[\pi(x^\mu)\partial_0\psi(x^\mu) - \mathcal{L}g^{00}\right] \\
&\left[\begin{array}{rcl} \pi(x^\mu)\partial_0\psi(x^\mu) &=& i\psi^\dagger(x^\mu)\gamma_0\partial_0\psi(x^\mu) \\ &=& i\psi^\dagger(x^\mu)\gamma^0\gamma^0\psi(x^\mu) \\ &=& i\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^0\partial_0\psi(x^\mu) \end{array}\right] \\
&= \int d^3r \, \left[i\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^0\partial_0\psi(x^\mu) - \mathcal{L}\right].
\end{aligned}$$

Nun gilt aber nach (E.23):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}(x^\mu)\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0\right]\psi(x^\mu) \\
&= \bar{\psi}(x^\mu)\left[i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m_0\right]\psi(x^\mu),
\end{aligned}$$

und wir erhalten weiter:

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3r \, \left[i\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^0\partial_0\psi(x^\mu) - i\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^0\partial_0\psi(x^\mu)\right. \\
&\quad \left. - i\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^i\partial_i\psi(x^\mu) + m_0\bar{\psi}(x^\mu)\psi(x^\mu)\right] \\
&= \int d^3r \, \bar{\psi}(x^\mu)\left[-i\gamma^i\partial_i + m_0\right]\psi(x^\mu).
\end{aligned} \tag{E.25}$$

Da weiters $g^{0i} = 0$ für alle $i$, folgt weiters aus (2.45):

$$\begin{aligned}
P^j &= i\int d^3r \, \psi^\dagger(x^\mu)\partial^j\psi(x^\mu) \\
&= -i\int d^3r \, \psi^\dagger(x^\mu)\partial_j\psi(x^\mu).
\end{aligned} \tag{E.26}$$

Wir kombinieren nun die Gleichungen (E.16) mit (E.22):

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(x^\mu)\left(i\overrightarrow{\partial\!\!\!/} - m_0\right)\psi(x^\mu) &= 0 \\
\bar{\psi}(x^\mu)\left(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m_0\right)\psi(x^\mu) &= 0 \\
\bar{\psi}(x^\mu)\left(\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + \overrightarrow{\partial\!\!\!/}\right)\psi(x^\mu) &= 0 \\
\left(\partial_\mu\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\mu\right)\psi(x^\mu) + \bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x^\mu) &= 0,
\end{aligned}$$

oder

$$\partial_\mu\left[\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\mu\psi(x^\mu)\right] = 0. \tag{E.27}$$

Interpretiert man nun (E.27) als Kontinuitätsgleichung, so ist offensichtlich $\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\mu\psi(x^\mu)$ ein Kandidat für einen Viererstrom

$$j^\mu = \bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\mu\psi(x^\mu) = \left\{ \begin{array}{lcl} j^0 & = & \bar{\psi}(x^\mu)\gamma^0\psi(x^\mu) = \psi^\dagger(x^\mu)\psi(x^\mu) \\ j^i & = & \bar{\psi}(x^\mu)\gamma^i\psi(x^\mu) = \psi^\dagger(x^\mu)\alpha^i\psi(x^\mu) \end{array} \right. . \tag{E.28}$$

Da die Lagrangedichte (E.23) unter Transformationen (2.25) invariant ist, folgt aus (2.27) für die Ladung

$$Q = q\int d^3r\, \psi^\dagger(x^\mu)\psi(x^\mu) \tag{E.29}$$

womit $j^0$ nach (E.28) tatsächlich die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho$ beschreiben könnte. Es ist aber noch zu zeigen, daß $j^\mu$ tatsächlich ein Viererverktor ist.

## E.2 Relativistische Kovarianz

Es bestehe eine Lorentz-Transformation $\Lambda$ und wir beschreiben das System in einem Bezugssystem durch Zustandsfunktionen $\psi(x^\mu)$ und in einem transformierten Bezugssystem durch Zustandsfunktionen $\psi'(x'^\mu)$. Es ist dann zu fordern:

$$\begin{array}{rcll} i\,\partial\!\!\!/\psi(x^\mu) - m_0\psi(x^\mu) & = & 0 & \quad\text{(E.30a)} \\ i\,\partial\!\!\!/'\psi'(x'^\mu) - m_0\psi'(x'^\mu) & = & 0, \qquad (x'^\mu) = \Lambda(x^\mu). & \quad\text{(E.30b)} \end{array}$$

Zwischen $\psi(x^\mu)$ und $\psi'(x'^\mu)$ muß also eine lokale Beziehung bestehen, welche es gestattet $\psi'(x'^\mu)$ zu berechnen, wenn $\psi(x^\mu)$ bekannt ist. Diese Beziehung sei linear:

$$\psi'(x'^\mu) = S(\Lambda)\psi(x^\mu), \tag{E.31}$$

wobei $S(\Lambda)$ eine nicht singuläre $4 \times 4$ Matrix ist. Damit folgt:

$$\begin{array}{rcl} x'^\mu & = & \Lambda^\nu{}_\mu x^\nu \\ x^\nu & = & \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu x'^\mu \\ \dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} & = & \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu . \end{array}$$

Dies ergibt zusammen mit (E.31) angewendet auf (E.30b):

$$\begin{array}{rcl} i\gamma^\mu \dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}S(\Lambda)\psi(x^\mu) - m_0 S(\Lambda)\psi(x^\mu) & = & 0 \\ i\gamma^\mu\left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu \partial_\nu S(\Lambda)\psi(x^\mu) - m_0 S(\Lambda)\psi(x^\mu) & = & 0. \end{array}$$

Andererseits muß aber (E.30a) gelten:

$$i\gamma^\nu \partial_\nu \psi(x^\mu) - m_0 \psi(x^\mu) = 0.$$

Es folgt somit unmittelbar durch Vergleich:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu S(\Lambda) &= S(\Lambda)\gamma^\nu \\ \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu \gamma^\mu &= S(\Lambda)\gamma^\nu S^{-1}(\Lambda), \end{aligned} \tag{E.32}$$

oder

$$\gamma^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda). \tag{E.33}$$

Analog zu (E.31) gilt dann noch für den adjungierten Bispinor:

$$\bar{\psi}(x^\mu) \quad \longrightarrow \quad \bar{\psi}'(x'^\mu) = \bar{\psi}(x^\mu) S^{-1}(\Lambda). \tag{E.34}$$

Wir finden nun etwa das folgende Transformationsverhalten:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x'^\mu)\psi'(x'^\mu) &= \bar{\psi}(x^\mu) S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) \psi(x^\mu) \\ &= \bar{\psi}(x^\mu)\psi(x^\mu) \end{aligned}$$

und somit ist $\bar{\psi}(x^\mu)\psi(x^\mu)$ ein *Lorentz-Skalar.*

Wir müssen noch die explizite Form der Transformation (E.31) bzw. (E.34) für infinitesimale Lorentz-Transformation auffinden. Aus (2.34) folgt:

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \varepsilon_{\mu\nu} x^\nu \\ &= g_{\mu\nu} x^\nu + \varepsilon_{\mu\nu} x^\nu \\ &= \left(g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}\right) x^\nu \\ &= \Lambda_{\mu\nu} x^\nu, \end{aligned}$$

mit $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$. Für Gleichung (2.35) erhalten wir damit:

$$\psi_\alpha(x^\mu) \quad \longrightarrow \quad \psi'_\alpha(x'^\mu) = \sum_\beta S_{\alpha\beta}\psi_\beta(x^\mu) = \sum_\beta \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\right)\psi_\beta(x^\mu),$$

oder in Matrixform

$$\psi(x^\mu) \quad \longrightarrow \quad \psi'(x'^\mu) = S\psi(x^\mu) = \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right)\psi(x^\mu), \tag{E.35}$$

mit antisymmetrischem $S^{\mu\nu}$. Wir formen nun die linke Seite von (E.32) um, wobei wir (E.35) verwenden und nur Terme erster Ordnung in $\varepsilon_{\mu\nu}$ behalten:

$$\begin{aligned} S &= \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \\ S^{-1} &= \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\gamma^\lambda\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right) &= \gamma^\lambda+\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\gamma^\lambda-\frac{1}{2}\gamma^\lambda\varepsilon_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \\
&= \gamma^\lambda+\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\left[S^{\mu\nu},\gamma^\lambda\right].
\end{aligned}
$$

Ferner haben wir noch die rechte Seite von Gleichung (E.32) umzuformen:

$$
\begin{aligned}
\left(\Lambda^{-1}\right)^\lambda{}_\nu\gamma^\nu &= \left(g^\lambda{}_\nu-\varepsilon^\lambda{}_\nu\right)\gamma^\nu \\
&= \gamma^\nu g^\lambda{}_\nu-g^{\lambda\mu}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\nu \\
&= \gamma^\lambda-g^{\lambda\mu}\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\mu\nu}-\varepsilon_{\nu\mu}\right)\gamma^\nu \\
&= \gamma^\lambda-\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\nu+\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\varepsilon_{\nu\mu}\gamma^\nu \\
&= \gamma^\lambda-\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\nu+\frac{1}{2}g^{\lambda\nu}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\mu \\
&= \gamma^\lambda+\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\left(g^{\lambda\nu}\gamma^\mu-g^{\lambda\mu}\gamma^\nu\right),
\end{aligned}
$$

und zusammengefaßt finden wir:

$$
\left[S^{\mu\nu},\gamma^\lambda\right]=\gamma^\mu g^{\lambda\nu}-\gamma^\nu g^{\lambda\mu},
$$

mit der Lösung

$$
S^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu, \tag{E.36}
$$

was durch direktes Ausrechnen unmittelbar beweisbar ist, wenn man die Vertauschungsrelation zwischen den $\gamma$-Matrizen beachtet.

Wir führen nun die Matrizen

$$
\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right] \tag{E.37}
$$

ein und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu-\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\nu\gamma^\mu \\
&= \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu+\frac{i}{2}\varepsilon_{\nu\mu}\gamma^\nu\gamma^\mu \\
&= \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu+\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu \\
&= i\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu.
\end{aligned}
$$

Wir setzen nun (E.36) in (E.35) ein und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\psi'(x'^{\mu}) &= \left(1+\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right)\psi(x^{\mu}) \\
&= \left(1+\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\frac{1}{2}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)\psi(x^{\mu}) \\
&= \left(1+\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)\psi(x^{\mu}) \\
&= \left(1-\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\psi(x^{\mu}), \qquad \text{(E.38)}
\end{aligned}
$$

womit das Transformationsgesetz für die Bispinoren aufgefunden wurde. Ganz offensichtlich ist dies *nicht* das Transformationsverhalten eines Vierervektors.

Wir finden weiters die Kommutatoren:

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu},\mathbf{1}\right] &= 0; \qquad \text{(E.39a)} \\
\left[\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu},\gamma^{5}\right] &= \left\{\{\gamma^{\mu},\gamma^{5}\}=0;\quad \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{5}=\gamma^{5}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right\}=0; \qquad \text{(E.39b)} \\
\frac{1}{i}\left[\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu},\gamma^{\gamma}\right] &= \frac{1}{4}\left[[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}],\gamma^{\lambda}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}),\gamma^{\lambda}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}-\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right) \\
&\quad \left[\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}=2g^{\mu\nu},\quad \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2g^{\mu\nu}-\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}-2g^{\mu\nu}\gamma^{\lambda}+\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\right. \\
&\quad \left.-\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+2g^{\mu\nu}\gamma^{\lambda}-\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}-\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}-\left(2g^{\lambda\mu}-\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\right)\gamma^{\nu}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}-2g^{\lambda\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}-2g^{\lambda\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\mu}2g^{\lambda\nu}-\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\right) \\
&= g^{\lambda\nu}\gamma^{\mu}-g^{\lambda\mu}\gamma^{\nu}; \qquad \text{(E.39c)} \\
\frac{1}{i}\left[\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu},\gamma^{\lambda}\gamma^{5}\right] &= g^{\lambda\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{5}-g^{\lambda\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{5}, \qquad \text{(E.39d)}
\end{aligned}
$$

und schließlich

$$\frac{1}{i}\left[\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu},\frac{1}{2}\sigma^{\lambda\rho}\right] = g^{\nu\lambda}\frac{1}{2}\sigma^{\mu\rho} - g^{\mu\lambda}\frac{1}{2}\sigma^{\nu\rho} + g^{\nu\rho}\frac{1}{2}\sigma^{\lambda\mu} - g^{\mu\rho}\frac{1}{2}\sigma^{\lambda\nu}. \qquad \text{(E.39e)}$$

Diese letzte Beziehung ist besonders interessant: setzen wir $\mu = 2, \nu = 3, \lambda = 3$ und $\rho = 1$, so folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\left[\frac{1}{2}\sigma^{23},\frac{1}{2}\sigma^{31}\right] &= g^{33}\frac{1}{2}\sigma^{21} - g^{23}\frac{1}{2}\sigma^{31} + g^{31}\frac{1}{2}\sigma^{32} - g^{21}\frac{1}{2}\sigma^{33} \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^{21} = \frac{1}{2}\sigma^{12}. \qquad \text{(E.39f)}\end{aligned}$$

Scheiben wir nun für $\sigma^{12} \triangleq \sigma^3$, $\sigma^{23} \triangleq \sigma^1$ und $\sigma^{31} \triangleq \sigma^2$, so erhalten wir

$$\frac{1}{i}\left[\frac{1}{2}\sigma^{1},\frac{1}{2}\sigma^{2}\right] = \frac{1}{2}\sigma^3, \qquad \text{(E.39g)}$$

und dies ist offensichtlich die Vertauschungsrelation für Generatoren der dreidimensionalen Drehgruppe. Damit sind die $\sigma^{\mu\nu}/2$ Objekte, welche sich wie Generatoren der homogenen Lorentz-Gruppe verhalten.

Die Gleichungen (E.39a) und (E.39b) zeigen, daß $\mathbf{I}$ und $\gamma^5$ wie Skalare transformieren, während die $\gamma^\mu$ bzw. $\gamma^\mu\gamma^5$ wie Vierervektoren unter den Operationen der $\sigma^{\mu\nu}$ transformieren. Wir untersuchen nun:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'(x'^\mu)\gamma^\mu\psi'(x'^\mu) &= \bar{\psi}(x^\mu)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x^\mu) \\ &= \bar{\psi}(x^\mu)\left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu\gamma^\nu\psi(x^\mu) \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\nu\psi(x^\mu). \qquad \text{(E.39h)}\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (A.24) zeigt, daß $\bar{\psi}(x^\mu)\gamma^\nu\psi(x^\mu)$ und damit $(j^\mu)$ wie ein Vierervektor transformiert.

Wir betrachten noch die Raumumkehr als spezielle Lorentz-Transformation:

$$x'^\mu = (x^0, -\mathbf{r}) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu.$$

Es ist also $\Lambda^0{}_0 > 0$ und $\det\Lambda^\mu{}_\nu = \pm 1$. Somit wird also die Zeit nicht umgekehrt, die Transformation kann aber räumliche Inversion enthalten (oder auch nicht). Es ist dann immer möglich eine nicht singuläre Matrix der Form (E.33) zu konstruieren, für welche

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0$$

ist. Wir erhalten weiter, daß $S(\Lambda) = \gamma^0$, und damit gilt für obige Transformation

$$\psi'(x'^\mu) = \gamma^0\psi(x^\mu).$$

Wir verwenden dies nun dazu um zu zeigen, daß

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'(x'^{\mu})\gamma^5\psi(x^{\mu}) &= \bar{\psi}(x^{\mu})S^{-1}(\Lambda)\gamma^5 S(\Lambda)\psi(x^{\mu}) \\
&= \bar{\psi}(x^{\mu})\gamma^0\gamma^5\gamma^0\psi(x^{\mu}) \\
&= -\bar{\psi}(x^{\mu})\gamma^5\gamma^0\gamma^0\psi(x^{\mu}) \\
&= -\bar{\psi}(x^{\mu})\gamma^5\psi(x^{\mu})
\end{aligned}$$

ist, und damit ist $\bar{\psi}'(x'^{\mu})\gamma^5\psi(x^{\mu})$ ein *Pseudoskalar*. Weiters gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'(x'^{\mu})\gamma^5\gamma^{\nu}\psi(x^{\mu}) &= \bar{\psi}(x^{\mu})S^{-1}(\Lambda)\gamma^5\gamma^{\nu} S(\Lambda)\psi(x^{\mu}) \\
&= \bar{\psi}(x^{\mu})\gamma^0\gamma^5\gamma^{\mu}\gamma^0\psi(x^{\mu}) \\
&= -\bar{\psi}(x^{\mu})\gamma^5\gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0\psi(x^{\mu}) \\
&= -\bar{\psi}(x^{\mu})\gamma^5 S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda)\psi(x^{\mu}) \\
&= -\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^{\mu}\psi(x^{\mu})
\end{aligned}$$

und damit ist $\bar{\psi}(x^{\mu})\gamma^5\gamma^{\mu}\psi(x^{\mu})$ ein *Pseudoviererverktor*. Auf idente Weise findet man schließlich noch, daß $\bar{\psi}(x^{\mu})\sigma^{\mu\nu}\psi(x^{\mu})$ wie ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe transformiert.

## E.3 Lösungen der Dirac-Gleichung

Es liegt nahe zur Lösung der Dirac-Gleichung einen Ansatz zu machen, welcher ebenen Wellen entspricht. Wir untersuchen zunächst Lösungen negativer Frequenz und verwenden den Ansatz

$$\psi(x^{\mu}) = u(p^{\mu})e^{-ip_{\mu}x^{\mu}}$$

und dieser führt (E.16) in

$$(\not{p} - m_0)\, u(p^{\mu}) = 0 \tag{E.40}$$

über. Um leicht einen Überblick über mögliche Lösungen erhalten zu können untersuchen wir zunächst Lösungen für ruhende Teilchen, also Teilchen mit $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ und setzen

$$p_R{}^{\mu} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

für den Ruheviererimpuls, da ja $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2}$ gelten muß. Damit ergibt aber (E.40):

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & -2m_0 \end{array}\right) u(p_R) = 0. \tag{E.41}$$

(In Gleichung (E.41) haben wir eine ‘Spinor-Schreibweise’ eingeführt.) Wir zerlegen nun $u(p_R)$ in zwei Spinoren

$$u(p_R) = \begin{pmatrix} \xi(p_R) \\ \eta(p_R) \end{pmatrix},$$

und erkennen unmittelbar, daß die Lösungen $\eta(p_R)$ verschwinden, während beliebige Lösungen $\xi(p_R)$ Gleichung (E.41) befriedigen. Wir wählen folgende Lösungen:

$$u_r(p_R) = \sqrt{2m_0} \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = \pm\frac{1}{2} \tag{E.42}$$

mit

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{E.43}$$

Für einen allgemeinen Viererimpuls $p^\mu$ erweitern wir obigen Ansatz zu

$$u(p^\mu) = \begin{pmatrix} \xi(p^\mu) \\ \eta(p^\mu) \end{pmatrix}$$

mit den Spinoren $\xi(p^\mu)$ und $\eta(p^\mu)$. Gleichung (E.40) hat nun folgende explizite Gestalt:

$$\left(p^0\gamma^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} - m_0\right) u(p^\mu) = 0.$$

Hier wurde $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ eingeführt. Wir erhalten weiters in Spinorschreibweise

$$\left(\begin{array}{c|c} p^0 - m_0 & -\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} \\ \hline \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & -p^0 - m_0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \xi(p^\mu) \\ \eta(p^\mu) \end{pmatrix} = 0, \tag{E.44}$$

was unmittelbar aus der Definition der $\gamma$-Matrizen nach (E.9) folgt, wenn man weiters $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ einführt. Wir lösen (E.44) auf

$$\left(p^0 - m_0\right) \xi(p^\mu) - (\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\eta(p^\mu) = 0 \tag{E.45a}$$
$$(\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\xi(p^\mu) - \left(p^0 + m_0\right) \eta(p^\mu) = 0, \tag{E.45b}$$

und erhalten aus der zweiten Gleichung die Beziehung:

$$\eta(p^\mu) = \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{p^0 + m_0}\xi(p^\mu).$$

Dieses Ergebnis befriedigt auch bereits Gleichung (E.45a), wovon man sich durch unmittelbares Einsetzen leicht überzeugen kann. Es ist somit auch in diesem Fall die Wahl des Spinors $\xi(p^\mu)$ völlig beliebig. Man wählt folgende Lösung:

$$u_r(p^\mu) = \sqrt{p^0 + m_0} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \dfrac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{p^0 + m_0}\chi_r \end{pmatrix}, \quad r = \pm\frac{1}{2}. \tag{E.46}$$

Völlig analog sucht man nun nach den Lösungen positiver Frequenz unter Verwendung des Ansatzes

$$\psi(x^\mu) = v(p^\mu) e^{ip_\mu x^\mu},$$

was wiederum zu

$$(\not{p} + m_0)\, v(p^\mu) = 0$$

führt. Es gibt, wie schon zuvor, zwei linear unabhängige Lösungen, welche praktischer Weise wie folgt gewählt werden:

$$v_r(p^\mu) = -\sqrt{p^0 + m_0} \begin{pmatrix} \dfrac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{p^0 + m_0} \varepsilon \chi_r \\ \varepsilon \chi_r \end{pmatrix}, \quad r = \pm\frac{1}{2}. \tag{E.47}$$

Hier ist:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus den beiden Lösungen $u_r(p^\mu) = u_r(\mathbf{p})$ und $v_r(p^\mu) = v_r(\mathbf{p})$ ist ersichtlich, daß nur longitudinale Spinkomponenten parallel oder antiparallel zur Ausbreitungsrichtung $\mathbf{p}$ zu den Lösungen beitragen.