Anhang D

D.1 Die Klein-Gordon Gleichung

Es wurde bereits auf die Invarianz des Skalarproduktes

$$x^\mu x_\mu = t^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

unter Lorentztransformationen hingewiesen. Damit ist aber weder der Ortsvektor $\mathbf{r}$ ein lorentzinvarianter Vektor noch die Zeit t ein Lorentz-Skalar. Wir untersuchen noch das Wegelement:

$$\begin{aligned}
ds &= (dx_\mu dx^\mu)^{\frac{1}{2}} = \left[dt^2 - d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(dt^2 - \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d\mathbf{r}}{dt}dtdt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\left(1 - \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) dt^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\left(1 - \mathbf{v}^2\right) dt^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= dt\sqrt{1 - v^2}.
\end{aligned}$$

Mit

$$\gamma^{-1} = \sqrt{1 - v^2}; \qquad d\tau = \gamma^{-1} dt$$

erhalten wir schließlich

$$ds = d\tau, \tag{D.1}$$

was offensichtlich ein Skalar ist, und damit ist auch die Eigenzeit τ ein Skalar.

Wir führen nun die *Vierergeschwindigkeit* v^μ ein:

$$\begin{aligned} x^\mu &= (t, \mathbf{r}) \\ \frac{dx^\mu}{d\tau} &= \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \\ &= \gamma\left(1, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \\ v^\mu &= \gamma(1, \mathbf{v}), \end{aligned} \tag{D.2}$$

und daraus folgt unmittelbar der *Viererimpuls* p^μ:

$$\begin{aligned} p^\mu &= m_0 v^\mu = m_0\gamma(1, \mathbf{v}) = m(1, \mathbf{v}) \\ &= (m, \mathbf{p}). \end{aligned} \tag{D.3}$$

m_0 ist dabei die *Ruhmasse* und m die *bewegte Masse* des Teilchens. Damit folgt weiters:

$$\begin{aligned} v^\mu v_\mu &= \gamma^2 \left[1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right] \\ &= \frac{1-v^2}{1-v^2} = konst. \end{aligned} \tag{D.4}$$

und

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 \gamma^2 \left[1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right] = m_0^2 = konst. \tag{D.5}$$

Wir übertragen nun das Newtonsche Gesetz

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

in die Lorentz kovariante Form

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu, \tag{D.6}$$

wobei mit F^μ die *Vierer- oder Minkovskikraft* eingeführt wurde. Aus (D.5) folgt weiter:

$$p_\mu \underbrace{\frac{d}{d\tau} p^\mu}_{=F^\mu} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(p^\mu p_\mu\right) = 0 \tag{D.7}$$

$$= p_\mu F^\mu = m_0 v_\mu F^\mu = 0. \tag{D.8}$$

In der Elektrodynamik ist die Viererkraft durch

$$F^\mu = \gamma(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}, \mathbf{F}) \tag{D.9}$$

gegeben, mit $\mathbf{F}$ der Lorentzkraft. Die nullte Komponente der Bewegungsgleichung (D.6) führt damit zu

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}p^0 &= F^0 \\
\frac{d}{d\tau}m &= \gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \\
\int_{t_0}^{t} dt\,\frac{dm}{dt} &= [m(t)-m(t_0)] = \int_{t_0}^{t} dt\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \\
[m(t)-m(t_0)] &= \int_{t_0}^{t} dt\,\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} \\
&= A = T(t)-T(t_0) = \Delta T.
\end{aligned}$$

ΔT ist die Differenz in der kinetischen Energie des Teilchens beim Durchlaufen seiner Bahn im Zeitintervall $t-t_0$ unter der Wirkung der Kraft $\mathbf{F}$. Wir wählen nun die *Ruhenergie* $E_0 = m_0$ als Nullpunkt und damit folgt:

$$T = m - m_0 = E - E_0. \tag{D.10}$$

Somit können wir für den Viererimpuls auch

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}) \tag{D.11}$$

schreiben, da in (D.3) $p^0 = m$ war. Wegen (D.5) folgt weiter:

$$p_\mu p^\mu = m_0^2\gamma^2 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = E^2 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} \overset{(D.5)}{=} m_0^2 = E_0^2,$$

oder

$$E = \pm\sqrt{m_0^2 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}, \tag{D.12}$$

das *relativistische Dispersionsgesetz* des freien Teilchens.

Im Limes $|\mathbf{v}| \ll 1$ folgt für die kinetische Energie T die klassische Beziehung

$$T = E - E_0 = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{2m_0}. \tag{D.13}$$

Eine Hamiltonsche Formulierung der relativistischen Mechanik kann nun erfolgen, wenn man einen Lorentzskalar H auffindet, welcher die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{dx^\mu}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial p^\mu} \\
\frac{dp^\mu}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial x^\mu}
\end{aligned} \tag{D.14}$$

erfüllt.

Für ein *freies Teilchen* erfüllt (entsprechend (D.13))

$$H = \frac{p_\mu p^\mu}{2m_0} = \frac{E_0}{2} \tag{D.15}$$

diese Bedingung, und wegen (D.5) ist H tatsächlich ein Lorentzskalar. Wir erhalten weiter:

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial p^\mu} = \frac{\partial}{\partial p^\mu}\left(\frac{p_\mu p^\mu}{2m_0}\right) \\ &= \frac{p^\mu}{2m_0}\left(\frac{\partial p_\mu}{\partial p^\mu}\right) + \frac{p_\mu}{2m_0}. \end{aligned}$$

Nun gilt aber:

$$\frac{\partial p_\mu}{\partial p^\mu} = \frac{\partial}{\partial p^\mu} g_{\alpha\mu} p^\alpha = g_{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial p^\mu} p^\alpha = g_{\mu\mu},$$

und es folgt weiter:

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\tau} &= \frac{g_{\mu\mu} p^\mu}{2m_0} + \frac{p_\mu}{2m_0} \\ &= \frac{g_{\mu\mu} p^\mu}{2m_0} + \frac{g_{\alpha\mu} p^\alpha}{2m_0}. \end{aligned}$$

In Komponenten aufgeschlüßelt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{d\tau} &= \frac{g_{00}p^0}{2m_0} + \frac{g_{\alpha 0}p^\alpha}{2m_0} = \frac{p^0}{m_0}, \\ \frac{dx^1}{d\tau} &= \frac{g_{11}p^1}{2m_0} + \frac{g_{\alpha 1}p^\alpha}{2m_0} = -\frac{p^1}{m_0}, \\ &\vdots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Dies ergibt wieder zusammengefaßt für die erste Gleichung von (D.14):

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{p^\mu}{m_0}, \tag{D.16a}$$

und das Teilchen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. Die zweite Gleichung von (D.14) ergibt wiederum

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} = 0, \tag{D.16b}$$

da das freie Teilchen keinen Kräften ausgesetzt ist.

Die Quantisierung kann nun in gewohnter Weise ausgeführt werden:

$$\mathbf{p} \quad \rightarrow \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\nabla,$$

oder in kovarianter Form:

$$p^\mu \quad \rightarrow \quad \hat{p}^\mu = -i\partial_\mu, \tag{D.17}$$

was für $\mu = 1, 2, 3$ ganz offensichtlich Bekanntem entspricht. Die Nullkomponente ergibt:

$$p^0 = E \quad \rightarrow \quad \hat{p}^0 = -i\partial_0$$

oder

$$E \quad \rightarrow \quad -i\partial_0.$$

Somit folgt mit (D.17) und (A.31) aus (D.15):

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m_0}\partial^\mu\partial_\mu = \frac{E_0}{2}. \tag{D.18}$$

Der Teilchenzustand wird durch eine Wellenfunktion $\phi(x^\mu)$ im Raum-Zeitkontinuum beschrieben. (D.18) führt dann zu

$$\begin{aligned} \hat{H}\phi(x^\mu) &= \frac{E_0}{2}\phi(x^\mu) \\ \left(\frac{1}{2m_0}\partial^\mu\partial_\mu + \frac{m_0}{2}\right)\phi(x^\mu) &= 0, \end{aligned}$$

oder

$$\left(\partial^\mu\partial_\mu + m_0^2\right)\phi(x^\mu) = 0. \tag{D.19}$$

Dies ist die *Klein-Gordon Gleichung.*

Die Interpretation von (D.19) als Einteilchengleichung führt zu Schwierigkeiten, da die Dispersionsrelation (D.12) auch Teilchen negativer Energie zuläßt. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft relativistischer Einteilchengleichungen, welche hier aber nicht weiter behandelt werden soll, da die relativistische Dispersionsrelation im Rahmen der Quantenfeldtheorie nicht zu Problemen führt.