Kapitel 4

Das Dirac Feld

4.1 Ansatz zur Quantisierung

Um eine Quantisierung des Diracfeldes durchführen zu können, wird das Feld nach dem vollständigen Satz von Lösungen der Diracgleichung entwickelt und danach werden den Entwicklungskoeffizienten passende Vertauschungsrelationen aufgeprägt. Es ist daher zunächst notwendig den orthonormalen Satz von Lösungen der Diracgleichung (E.16) aufzusuchen.

Wir betrachten wieder ein kubisches Volumen Ω mit periodischen Randbedingungen. Man kann dann wieder einen vollständigen Satz von Zuständen ebener Wellen definieren: für jeden Impuls $\mathbf{p}$, welcher von den periodischen Randbedingungen zugelassen ist, und welcher die positive Energie

$$p^\mu = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}), \qquad p_0 = E_{\mathbf{p}} = +\sqrt{m_0^2 + \mathbf{p}^2}$$

hat. Für solche besitzt die Diracgleichung vier unabhängige Lösungen

$$u_r(\mathbf{p})\frac{1}{\sqrt{\Omega}}e^{-ip_\mu x^\mu}, \qquad v_r(\mathbf{p})\frac{1}{\sqrt{\Omega}}e^{ip_\mu x^\mu}, \quad r = 1, 2, \tag{4.1}$$

wobei $u_r(\mathbf{p})$ und $v_r(\mathbf{p})$ konstante Bispinoren sind, welche folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\,\psi(x^\mu) &= 0 \\
\psi(x^\mu) &= \text{konst}\left\{\begin{array}{c} u_r(\mathbf{p}) \\ v_r(\mathbf{p}) \end{array}\right\} e^{\pm ip_\mu x^\mu} \\
(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\,u_r(\mathbf{p})e^{-ip_\mu x^\mu} &= 0 \\
(i\gamma^\mu(-i)p_\mu - m_0)\,u_r(\mathbf{p}) &= 0 \\
(\gamma^\mu p_\mu - m_0)\,u_r(\mathbf{p}) &= 0 \\
(\not{p} - m_0)\,u_r(\mathbf{p}) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

erfüllen, und analog

$$(\not{p} + m_0)\, v_r(\mathbf{p}) = 0 \tag{4.3}$$

für $r = 1, 2$ gehorchen. Die Lösungen (4.1) werden aufgrund ihrer Zeitabhängigkeit als die Lösungen positiver und negativer Energie bezeichnet. Dies wird aber rein zur Bezeichnung der Lösungen verwendet. Auf die tiefergehende Analyse Diracs soll hier nicht eingegangen werden.

Die zweifache Entartung der zwei Lösungen für positive und negative Energien für ein gegebenes $\mathbf{p}$ folgen aus der möglichen Spinorientierung. Für die Diracgleichung sind nur longitudinale Spinkomponenten (der Spin ist parallel zu $\pm\mathbf{p}$) Konstante der Bewegung und wir wählen diese Spinzustände für die Lösungen (4.1)

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}; \qquad \boldsymbol{\sigma} = \left(\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}\right), \tag{4.4}$$

mit $\sigma^{\mu\nu}$ aus (E.37). Wir wählen dann die Spinoren mit

$$\left.\begin{array}{rcl} \sigma_{\mathbf{p}} u_r(\mathbf{p}) & = & (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}) \\ \sigma_{\mathbf{p}} v_r(\mathbf{p}) & = & (-1)^r v_r(\mathbf{p}) \end{array}\right\} \quad r = 1, 2 \tag{4.5}$$

Die hier willkürlich eingeführte Asymmetrie in den u- und v-Spinoren wird sich noch bewähren, wenn die Spineigenschaften der durch diese Spinoren beschriebenen Teilchen und Antiteilchen untersucht werden.

Wir normieren schließlich noch die Spinoren:

$$u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m_0}; \tag{4.6}$$

sie gehorchen dann den Orthonormalitätsrelationen:

$$\begin{array}{rcl} u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) & = & \frac{E_{\mathbf{p}}}{m_0} \delta_{r,s} \\ u_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(-\mathbf{p}) & = & 0, \end{array} \tag{4.7a}$$

womit dann (4.1) tatsächlich ein vollständiger, orthonormalen Satz von Lösungen der freien Diracgleichung ist, welche auf $E_{\mathbf{p}}/m_0$ im Volumen Ω normiert sind.

Wir finden noch die wichtigen Beziehungen:

$$\begin{array}{rcl} \bar{u}_r(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) & = & \delta_{r,s} \\ \bar{u}_r(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) = \bar{v}_r(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) & = & 0, \end{array} \tag{4.7b}$$

und die Vollständigkeitsrelation:

$$\sum_{r=1}^{2} \left[u_{r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) - v_{r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p}) \right] = \delta_{\alpha,\beta}. \tag{4.7c}$$

4.2 Quantisierung des Diracfeldes

Um das Diracfeld quantisieren zu können, entwickeln wir es nach dem vollständigen Satz ebener Wellen (4.1) und schreiben:

$$\begin{aligned}\psi(x^\mu) &= \psi^+(x^\mu) + \psi^-(x^\mu) \\ &= \sum_{r,\mathbf{p}} \left(\frac{m_0}{\Omega E_\mathbf{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + d^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{ip_\mu x^\mu}\right],\end{aligned} \tag{4.8a}$$

und

$$\begin{aligned}\bar\psi(x^\mu) &= \psi^\dagger\gamma^0 \\ &= \bar\psi^+(x^\mu) + \bar\psi^-(x^\mu) \\ &= \sum_{r,\mathbf{p}} \left(\frac{m_0}{\Omega E_\mathbf{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[d_r(\mathbf{p}) \bar v_r(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + c^\dagger(\mathbf{p}) \bar u_r(\mathbf{p}) e^{ip_\mu x^\mu}\right],\end{aligned} \tag{4.8b}$$

mit

$$\bar u_r(\mathbf{p}) = u_r^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0, \quad \ldots$$

Die Gleichungen (4.8) sind den Entwicklungen des komplexen Klein-Gordon Feldes sehr ähnlich, wir beschreiben aber hier Spin 1/2 Teilchen. Diese befolgen das Pauli Prinzip und wir postulieren daher folgende Vertauschungsrelationen:

$$\left\{\hat c_r(\mathbf{p}), \hat c_s^\dagger(\mathbf{p}')\right\} = \left\{\hat d_r(\mathbf{p}), \hat d_s^\dagger(\mathbf{p}')\right\} = \delta_{r,s}\delta_{p,p'}, \tag{4.9}$$

alle anderen Antikommutatoren verschwinden.

Wir definieren noch die Operatoren

$$\hat n_r(\mathbf{p}) = \hat c_r^\dagger(\mathbf{p})\hat c_r(\mathbf{p}), \quad \hat{\bar n}_r(\mathbf{p}) = \hat d_r^\dagger(\mathbf{p})\hat d_r(\mathbf{p}), \tag{4.10}$$

und die Interpretation all dieser Operatoren als Vernichtungs-, Erzeugungs- und Teilchenzahloperatoren für zwei Arten von Fermionen folgt unmittelbar. Der Vakuumzustand ist schließlich durch

$$\hat c_r(\mathbf{p})\left|0\right\rangle = \hat d_r(\mathbf{p})\left|0\right\rangle = 0, \quad \forall\, \mathbf{p}, r = 1, 2 \tag{4.11}$$

definiert, oder analog durch

$$\hat\psi^+(x^\mu)\left|0\right\rangle = \hat{\bar\psi}^+(x^\mu)\left|0\right\rangle = 0, \quad \forall\,(x^\mu). \tag{4.12}$$

Durch Wirkung von Erzeugungsoperatoren auf den so definierten Vakuumzustand können dann neue Zustände generiert werden, welche Teilchen enthalten.

Für Fermionen müssen wir die Definition des Normalproduktes modifizieren. Im Normalprodukt wurden die Bosonenoperatoren so arrangiert, als würden alle Kommutatoren verschwinden. Für Fermionen gilt gleiches, nur daß man nun so vorgeht, als würden die Antikommutatoren verschwinden. Wir verwenden also:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}\left[\hat{\psi}_\alpha(x^\mu)\hat{\psi}_\beta(x'^\mu)\right] &= \mathcal{N}\left\{\left[\hat{\psi}^+_\alpha(x^\mu)+\hat{\psi}^-_\alpha(x^\mu)\right]\left[\hat{\psi}^+_\beta(x'^\mu)+\hat{\psi}^-_\beta(x'^\mu)\right]\right\} \\
&= \hat{\psi}^+_\alpha(x^\mu)\hat{\psi}^+_\beta(x'^\mu)+\hat{\psi}^+_\alpha(x^\mu)\hat{\psi}^+_\beta(x'^\mu) \\
&\quad +\hat{\psi}^-_\alpha(x^\mu)\hat{\psi}^-_\beta(x'^\mu)+\hat{\psi}^-_\alpha(x^\mu)\hat{\psi}^-_\beta(x'^\mu) \\
&= \hat{\psi}^+_\alpha(x^\mu)\hat{\psi}^+_\beta(x'^\mu)-\hat{\psi}^+_\beta(x'^\mu)\hat{\psi}^+_\alpha(x^\mu) \\
&\quad +\hat{\psi}^-_\alpha(x^\mu)\hat{\psi}^+_\beta(x'^\mu)+\hat{\psi}^-_\alpha(x^\mu)\hat{\psi}^-_\beta(x'^\mu),
\end{aligned} \tag{4.13}$$

was mit Gleichung (3.19) zu vergleichen ist. Besondere Vorsicht ist dann am Platze, wenn Operatoren $\hat{\psi}$ und $\hat{\bar{\psi}}$ auftreten.

Im nächsten Schritt werden die Konstanten der Bewegung untersucht und mit Hilfe der Teilchenoperatoren angeschrieben. Wir verwenden Gleichung (E.25) und erhalten für den Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = \int d^3r\, \mathcal{N}\left\{\hat{\bar{\psi}}(x^\mu)\left[-i\gamma^j\partial_j + m_0\right]\hat{\psi}(x^\mu)\right\}. \tag{4.14}$$

Will man nun $\hat{H}$ unter Verwendung der Operatoren $\hat{c}$ und $\hat{d}$ ausdrücken, so muß man die Entwicklung (4.8) in (4.14) einsetzen. Wir beginnen mit der Bestimmung des Ausdruckes:

$$\begin{aligned}
\left[-i\gamma^j\partial_j + m_0\right]e^{ip_\mu x^\mu} &= \left[-i\gamma^j(ip_j)+m_0\right]e^{ip_\mu x^\mu} \\
&= \left[\gamma^j p_j + m_0\right]e^{ip_\mu x^\mu} \\
&= \left[\gamma^\mu p_\mu + m_0 - \gamma^0 p_0\right]e^{ip_\mu x^\mu} \\
&= \left[\not{p} + m_0 - \gamma^0 p_0\right]e^{ip_\mu x^\mu}
\end{aligned}$$

Wir bestimmen dann etwa:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\bar{\psi}}^{+}\left[-i\gamma^{j}\partial_{j}+m_{0}\right]\hat{\psi}^{-}= \\
&= \sum_{r,s,\mathbf{p}}\left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}}}\right)\hat{d}_r(\mathbf{p})\bar{v}_r(\mathbf{p})e^{-ip_\mu x^\mu}\left[\ldots\right]\hat{d}_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{ip_\mu x^\mu} \\
&= \sum_{r,s,\mathbf{p}}\left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}}}\right)\hat{d}_r(\mathbf{p})\bar{v}_r(\mathbf{p})e^{-ip_\mu x^\mu}\left[\not{p}+m_0-\gamma^0 p_0\right]\hat{d}_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})e^{ip_\mu x^\mu} \\
&\overset{(4.3)}{=} \sum_{r,s,\mathbf{p}}\left(\frac{m_0}{\Omega E_{\mathbf{p}}}\right)\hat{d}_r(\mathbf{p})\bar{v}_r(\mathbf{p})\left[-\gamma^0 p_0\right]\hat{d}_s^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) \\
&\qquad\left[\bar{v}_r(\mathbf{p})=v_r^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0;\quad \gamma^0\gamma^0=1;\quad v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})=\frac{E_{\mathbf{p}}}{m_0}\delta_{r,s}\right] \\
&= \sum_{r,\mathbf{p}}\frac{1}{\Omega}\hat{d}_r(\mathbf{p})\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\left[-p_0\right] \\
&= \frac{1}{\Omega}\sum_{r,\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\hat{d}_r(\mathbf{p}).
\end{aligned}
$$

Die Beträge proportional zu $\hat{\bar{\psi}}^{+}(x^\mu)\left[\ldots\right]\hat{\psi}^{-}(x^\mu)$ und zu $\hat{\bar{\psi}}^{-}(x^\mu)\left[\ldots\right]\hat{\psi}^{-}(x^\mu)$ liefern keinen Beitrag, da man hier die Eigenschaft $\bar{u}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p})=0$ ausnützen kann. Schließlich liefert noch

$$
\hat{\bar{\psi}}^{-}(x^\mu)\left[\ldots\right]\hat{\psi}^{+}(x^\mu)=\frac{1}{\Omega}\sum_{r,\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\hat{c}_r(\mathbf{p}),
$$

und wir erhalten zusammengefaßt:

$$
\hat{H}=\sum_{r,\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}}\left[\hat{n}_r(\mathbf{p})+\hat{\bar{n}}_r(\mathbf{p})\right]. \tag{4.15}
$$

Aus Gleichung (2.47) folgt dann mit (E.24):

$$
\hat{\mathbf{P}}=i\int d^3r\,\hat{\psi}^\dagger(x^\mu)\nabla\hat{\psi}(x^\mu),
$$

und damit erhält man unter Verwendung der früheren Ergebnisse:

$$
\hat{\mathbf{P}}=\sum_{r,\mathbf{p}}\mathbf{p}\left[\hat{n}_r(\mathbf{p})+\hat{\bar{n}}_r(\mathbf{p})\right]. \tag{4.16}
$$

Schließlich ist die Lagrangedichte (E.23) invariant gegenüber Transformationen vom Typ (2.25) und damit führt die Gleichung (2.27) zur Erhaltung der

Ladung:

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= q\int d^3r\,\hat{\psi}^\dagger(x^\mu)\hat{\psi}(x^\mu) \\ &= -e\sum_{r,\mathbf{p}}\left[\hat{n}_r(\mathbf{p}) - \hat{\bar{n}}_r(\mathbf{p})\right],\end{aligned} \tag{4.17}$$

wie man sich durch Einsetzen von (4.8) unmittelbar überzeugen kann. Haben nun beide Teilchensorten die Masse m, so können wir die Teilchen, welche mit den $\hat{c}$- bzw. den $\hat{d}$-Operatoren beschrieben werden, als *Elektronen* bzw. *Positronen* identifizieren.

Unter Verwendung von (E.38) findet man für den Raumanteil von (2.51):

$$\hat{\mathbf{M}} = \int d^3r\,\hat{\psi}^\dagger(x^\mu)\left[\mathbf{r}\times(-i\nabla)\right]\hat{\psi}(x^\mu) + \int d^3r\,\hat{\psi}^\dagger(x^\mu)\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\hat{\psi}(x^\mu), \tag{4.18}$$

mit $\boldsymbol{\sigma}$ aus (4.4). Ganz offensichtlich beschreibt $\hat{\mathbf{M}}$ nach (4.18) den Bahn- und Spindrehimpuls von Teilchen mit Spin 1/2. Aus dem zweiten Teil von Gleichung (4.18) isolieren wir den Operator

$$\hat{S}_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\int d^3r\,\mathcal{N}\left[\hat{\psi}^\dagger(x^\mu)\sigma_{\mathbf{p}}\hat{\psi}(x^\mu)\right], \tag{4.19}$$

mit $\sigma_{\mathbf{p}}$ aus (4.4). Damit folgt dann aus (4.5):

$$\begin{aligned}\hat{S}_{\mathbf{p}}\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\left|0\right\rangle &= (-1)^{r+1}\frac{1}{2}\,\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\left|0\right\rangle \\ \hat{S}_{\mathbf{p}}\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\left|0\right\rangle &= (-1)^{r}\frac{1}{2}\,\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\left|0\right\rangle.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Aus diesem Ergebnis ist zu ersehen, daß sowohl der Elektronenzustand $\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\left|0\right\rangle$, als auch der Positronenzustand $\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\left|0\right\rangle$ die Spinkomponente in Bewegungsrichtung mit dem Wert 1/2 für $r=1$ und $-1/2$ für $r=2$ hat. Wir sprechen daher von parallelen bzw. antiparallelen Spinzuständen, welche positive bzw. negative *Helizität* haben. Man bezeichnet den Operator $\hat{S}_{\mathbf{p}}$ of auch als den *Helizitätsoperator*.

4.3 Kovariante Vertauschungsrelationen

Wir stehen nun wieder vor der Aufgabe die Vertauschungsrelation

$$\left\{\hat{\psi}_\alpha(x^\mu), \hat{\bar{\psi}}_\beta(y^\mu)\right\} = ?$$

zu bestimmen, wobei α und β Bispinorindizes sind, welche von eins bis vier laufen. Dazu bestimmen wir zunächst unter Verwendung von (4.8):

$$
\begin{aligned}
&\left\{\hat{\psi}_\alpha^{(+)}(x^\mu), \hat{\bar{\psi}}_\beta^{(-)}(y^\mu)\right\} = \\
&= \hat{\psi}_\alpha^{(+)}(x^\mu)\hat{\bar{\psi}}_\beta^{(-)}(y^\mu) + \hat{\bar{\psi}}_\beta^{(-)}(y^\mu)\hat{\psi}_\alpha^{(+)}(x^\mu) \\
&= \sum_{r,s,\mathbf{p},\mathbf{p}'} N_\mathbf{p} N_{\mathbf{p}'} \underbrace{\left[\hat{c}_r(\mathbf{p})\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}') + \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}')\hat{c}_r(\mathbf{p})\right]}_{=\delta_{r,s}\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}} u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{s\beta}(\mathbf{p}')e^{-ip_\mu x^\mu} e^{ip'_\mu y^\mu} \\
&\qquad \longrightarrow \quad N_\mathbf{p} = N_{\mathbf{p}'}, \quad E_\mathbf{p} = E_{\mathbf{p}'}, \quad p^0 = p'^0 \\
&= \sum_{r,\mathbf{p}} \frac{m_0}{\Omega E_\mathbf{p}} u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p})e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Eine weitere Umformung ist unmittelbar nicht möglich, da wir erst weitere Eigenschaften der Bispinoren abzuleiten haben. Dazu führen wir die Projektionsoperatoren

$$\hat{\Lambda}^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m_0}\left(\pm \not{p} + m_0\right) \tag{4.22}$$

ein. Daß dies tatsächlich Projektionsoperatoren sind, läßt sich unmittelbar zeigen:

$$
\begin{aligned}
\hat{\Lambda}^+(\mathbf{p})\hat{\Lambda}^+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{4m_0^2}\left(\not{p} + m_0\right)\left(\not{p} + m_0\right) \\
&= \frac{1}{4m_0^2}\left(\not{p}\,\not{p} + 2\,\not{p} m_0 + m_0^2\right).
\end{aligned}
$$

Weiters gilt ganz allgemein:

$$
\begin{aligned}
\not{A}\,\not{B} &= 2AB - \not{B}\,\not{A} \\
\rightarrow \quad A = B: \not{A}\,\not{A} &= 2A^2 - \not{A}\,\not{A} \\
\rightarrow \not{A}\,\not{A} &= A^2,
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
p^\mu &= (E_\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \left(p^0, \mathbf{p}\right) \\
p^0 &= \sqrt{m_0^2 + \mathbf{p}^2} \\
(p^0)^2 &= m_0^2 + \mathbf{p}^2 \\
(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 &= (p^\mu)^2 = m_0^2.
\end{aligned}
$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
\hat{\Lambda}^{+}(p^{\mu})\hat{\Lambda}^{+}(p^{\mu}) &= \frac{1}{4m_0^2}\left(m_0^2 + 2\not{p}m_0 + m_0^2\right) \\
&= \frac{1}{4m_0^2} 2m_0\left(m_0 + \not{p}\right) \\
&= \frac{\not{p} + m_0}{2m_0},
\end{aligned}
$$

oder

$$
\hat{\Lambda}^{+}(p^{\mu})\hat{\Lambda}^{+}(p^{\mu}) = \left[\hat{\Lambda}^{+}(p^{\mu})\right]^2 = \hat{\Lambda}^{+}(p^{\mu}), \tag{4.23}
$$

mit einem analogen Ergebnis für $\hat{\Lambda}^{-}(p^{\mu})$. Weiters folgt:

$$
\begin{aligned}
\hat{\Lambda}^{+}(p^{\mu})v_r(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2m_0}\left(\not{p} + m_0\right)v_r(\mathbf{p}) \overset{(4.4)}{=} 0, \\
\hat{\Lambda}^{-}(p^{\mu})u_r(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2m_0}\left(-\not{p} + m_0\right)u_r(\mathbf{p}) \\
&= -\frac{1}{2m_0}\left(\not{p} - m_0\right)u_r(\mathbf{p}) \overset{(4.1)}{=} 0 \\
\hat{\Lambda}^{+}(p^{\mu})u_r(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2m_0}\left(\not{p} + m_0\right)u_r(\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{2m_0}\left(\not{p} - m_0 + 2m_0\right)u_r(\mathbf{p}) = u_r(\mathbf{p}) \\
\hat{\Lambda}^{-}(p^{\mu})\hat{v}_r(\mathbf{p}) &= v_r(\mathbf{p}).
\end{aligned}
$$

Schließlich erhalten wir noch:

$$
\begin{aligned}
\hat{\Lambda}^{+}(p^{\mu}) + \hat{\Lambda}^{-}(p^{\mu}) &= \frac{1}{2m_0}\left(\not{p} + m_0\right) + \frac{1}{2m_0}\left(-\not{p} + m_0\right) \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

und durch Vergleich mit (4.7c) finden wir unmittelbar

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{+}_{\alpha\beta}(p^{\mu}) &= \sum_r u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) \\
\Lambda^{-}_{\alpha\beta}(p^{\mu}) &= -\sum_r v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p}).
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

Dies ergibt in (4.21):

$$
\begin{aligned}
\left\{\hat{\psi}^{(+)}_{\alpha}(x^{\mu}), \hat{\psi}^{(-)}_{\beta}(y^{\mu})\right\} &= \frac{m_0}{\Omega}\sum_{\mathbf{p}} \frac{\Lambda^{+}_{\alpha\beta}(p^{\mu})}{E_{\mathbf{p}}} e^{-ip_{\mu}(x^{\mu}-y^{\mu})} \\
&= \frac{m_0}{\Omega}\sum_{\mathbf{p}} \frac{\left(\not{p} + m_0\right)_{\alpha\beta}}{2m_0 E_{\mathbf{p}}} e^{-ip_{\mu}(x^{\mu}-y^{\mu})}.
\end{aligned}
$$

Nun ist aber

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m_0)\, e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} = (\not p + m_0)\, e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)},$$

und wir erhalten weiter:

$$\begin{aligned}
&\left\{\hat\psi_\alpha^{(+)}(x^\mu), \hat{\bar\psi}_\beta^{(-)}(y^\mu)\right\} = \\
&= \frac{1}{2\Omega}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu + m_0)_{\alpha\beta} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^3}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu + m_0)_{\alpha\beta} \int d^3p\, \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} e^{-ip_\mu(x^\mu-y^\mu)}.
\end{aligned}$$

Wir verwenden nun Gleichung (3.39) und erhalten schließlich:

$$\left\{\hat\psi_\alpha^{(+)}(x^\mu), \hat{\bar\psi}_\beta^{(-)}(y^\mu)\right\} = i\,(i\gamma^\mu\partial_\mu + m_0)_{\alpha\beta}\, \Delta^+\left(x^\mu - y^\mu\right), \tag{4.25}$$

und analog

$$\left\{\hat\psi_\alpha^{(-)}(x^\mu), \hat{\bar\psi}_\beta^{(+)}(y^\mu)\right\} = i\,(i\gamma^\mu\partial_\mu + m_0)_{\alpha\beta}\, \Delta^-\left(x^\mu - y^\mu\right), \tag{4.26}$$

oder als Matrixgleichung

$$\left\{\hat\psi^{(\pm)}(x^\mu), \hat{\bar\psi}^{(\mp)}(y^\mu)\right\} = iS^\pm\left(x^\mu - y^\mu\right), \tag{4.27}$$

mit

$$S^\pm(x^\mu) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m_0)\, \Delta^\pm(x^\mu). \tag{4.28}$$

Wir führen nun noch

$$\begin{aligned}
S(x^\mu) &= S^+(x^\mu) + S^-(x^\mu) \\
&= (i\gamma^\mu\partial_\mu + m_0)\left[\Delta^+(x^\mu) + \Delta^-(x^\mu)\right] \\
&= (i\gamma^\mu\partial_\mu + m_0)\, \Delta(x^\mu)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

ein, was zur Vertauschungsrelation

$$\left\{\hat\psi(x^\mu), \hat{\bar\psi}(y^\mu)\right\} = iS\left(x^\mu - y^\mu\right) \tag{4.30}$$

führt. Verwenden wir noch (3.51), so finden wir:

$$S^\pm(x^\mu) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} d^4p\, \frac{\not p + m_0}{p^2 - m_0^2} e^{-ip_\mu x^\mu}, \tag{4.31}$$

wobei die Pfade $C^{\pm}$ in der komplexen p^0-Ebene im Gegenuhrzeigersinn geschlossen werden. Sie umschließen die Pole $p^0 = \pm E_{\mathbf{p}}$. Da nun

$$(\not{p} \pm m_0)(\not{p} \mp m_0) = p^2 - m_0^2$$

ist, so findet man auch häufig die symbolische Schreibweise

$$S^{\pm}(x^\mu) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int\limits_{C^{\pm}} d^4p \, \frac{e^{-ip_\mu x^\mu}}{\not{p} - m_0}. \tag{4.32}$$

4.4 Der Fermi Propagator

Wie schon in Kapitel 3.4 führen wir nun den Fermionen Propagator ein. Wir definieren den Vakuumerwartungswert

$$\left\langle 0 \middle| \mathcal{T}\left\{\hat{\psi}(x^\mu)\hat{\bar{\psi}}(x'^\mu)\right\} \middle| 0 \right\rangle \tag{4.33}$$

mit dem zeitgeordneten Produkt

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\left\{\hat{\psi}(x^\mu)\hat{\bar{\psi}}(x'^\mu)\right\} &= \theta(t-t')\hat{\psi}(x^\mu)\hat{\bar{\psi}}(x'^\mu) - \theta(t'-t)\hat{\bar{\psi}}(x'^\mu)\hat{\psi}(x^\mu) \\ &= \begin{cases} \hat{\psi}(x^\mu)\hat{\bar{\psi}}(x'^\mu) & \text{für} \quad t > t' \\ -\hat{\bar{\psi}}(x'^\mu)\hat{\psi}(x^\mu) & \text{für} \quad t' > t. \end{cases} \end{aligned}$$

Um wiederum (4.33) bestimmen zu können, untersuchen wir den Vakuumerwartungswert

$$\begin{aligned} &\left\langle 0 \middle| \hat{\psi}(x^\mu)\hat{\bar{\psi}}(x'^\mu) \middle| 0 \right\rangle = \\ &= \left\langle 0 \middle| \left(\hat{\psi}^+(x^\mu) + \hat{\psi}^-(x^\mu)\right)\left(\hat{\bar{\psi}}^+(x'^\mu) + \hat{\bar{\psi}}^-(x'^\mu)\right) \middle| 0 \right\rangle \\ &= \left\langle 0 \middle| \hat{\psi}^+(x^\mu)\hat{\bar{\psi}}^+(x'^\mu) + \hat{\psi}^+(x^\mu)\hat{\bar{\psi}}^-(x'^\mu) + \hat{\psi}^-(x^\mu)\hat{\bar{\psi}}^+(x'^\mu) + \hat{\psi}^-(x^\mu)\hat{\bar{\psi}}^-(x'^\mu) \middle| 0 \right\rangle \\ &= \left\langle 0 \middle| \hat{\psi}^+(x^\mu)\hat{\bar{\psi}}^-(x'^\mu) \middle| 0 \right\rangle \\ &= \left\langle 0 \middle| \hat{\psi}^+(x^\mu)\hat{\bar{\psi}}^-(x'^\mu) \middle| 0 \right\rangle + \left\langle 0 \middle| \hat{\bar{\psi}}^-(x'^\mu)\hat{\psi}^+(x^\mu) \middle| 0 \right\rangle \\ &= \left\langle 0 \middle| \left\{\hat{\psi}^+(x^\mu), \hat{\bar{\psi}}^-(x'^\mu)\right\} \middle| 0 \right\rangle \\ &= iS^+(x^\mu - x'^\mu), \end{aligned} \tag{4.34}$$

und analog

$$\left\langle 0 \middle| \hat{\bar{\psi}}(x'^\mu)\hat{\psi}(x^\mu) \middle| 0 \right\rangle = iS^-(x^\mu - x'^\mu). \tag{4.35}$$

Daraus definieren wir den Fermionen Propagator:

$$iS_F(x^\mu - x'^\mu) = \Big\langle 0 \Big| \mathcal{T}\left\{\hat{\psi}(x^\mu)\hat{\bar{\psi}}(x'^\mu)\right\} \Big| 0 \Big\rangle, \tag{4.36}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} S_F(x^\mu) &= \theta(t)S^+(x^\mu) - \theta(-t)S^-(x^\mu) \\ &= (i\gamma^\mu\partial_\mu + m_0)\,\Delta_F(x^\mu), \end{aligned} \tag{4.37}$$

und schließlich

$$S_F(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, \frac{(\not{p} + m_0)e^{-ip_\mu x^\mu}}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon}. \tag{4.38}$$

4.5 Transformationen des Dirac-Feldes

Dieser Abschnitt hat die Aufgabe Invarianzeigenschaften des freien Dirac-Feldes zu untersuchen.

4.5.1 Die Paritätstransformation

Wir betrachten dabei den Übergang von einem räumlichen kartesischen Rechts- zu einem Linkssystem. Dazu führen wir den *Paritätsoperation* P ein:

$$\begin{aligned} P: \qquad t &\rightarrow t' = t \\ \mathbf{r} &\rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r} \end{aligned} \tag{4.39}$$

Wir untersuchen nun, ob und in welchem Sinn das Dirac-Feld unter solchen Transformationen invariant ist. Aufgrund unserer bisherigen Erfahrungen mit Lorentztransformationen machen wir folgenden Ansatz

$$\psi'(\mathbf{r}', t') = S(P)\psi(\mathbf{r}, t),$$

und fragen uns, ob man $S(P)$ so wählen kann, daß für $\psi'(\mathbf{r}', t)$ wieder Gleichung (E.16) gilt, also

$$(i\,\not{\partial}' - m_0)\,\psi'(\mathbf{r}', t') \stackrel{?}{=} 0.$$

Wegen $\gamma'^\mu = S^{-1}(P)\gamma^\mu S(P)$ gilt weiter

$$S^{-1}(P)\left(i\gamma^0\partial_0' + i\gamma^j\partial_j' - m_0\right)S(P)\psi(\mathbf{r}, t) \stackrel{?}{=} 0,$$

und mit Hilfe von (7.52) erhalten wir:

$$S^{-1}(P)\left(i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^j\partial_j - m_0\right)S(P)\psi(\mathbf{r},t) \stackrel{?}{=} 0. \tag{4.40}$$

Daraus folgt offensichtlich, daß sich für

$$\begin{aligned} S^{-1}(P)\gamma^0 S(P) &= \gamma^0 \\ S^{-1}(P)\gamma^i S(P) &= -\gamma^i \end{aligned}$$

Gleichung (7.53) wieder als Diracgleichung für $\psi(\mathbf{r},t)$ schreibt. Wir setzen:

$$S(P) = \gamma^0. \tag{4.41}$$

Es folgt dann:

$$\begin{aligned} \gamma^0\gamma^0\gamma^0 &= \gamma^0 \\ \gamma^0\gamma^i\gamma^0 &= \left(\gamma^i\right)^\dagger = -\gamma^i, \end{aligned}$$

entsprechend (E.17). Damit erfüllt (7.54) offensichtlich die aufgestellte Forderung. Wir schreiben daher für den paritätstransformierten Dirac-Spinor:

$$\psi'(\mathbf{r}',t') = \gamma^0\psi(\mathbf{r},t) = \gamma^0\psi(-\mathbf{r}',t'). \tag{4.42}$$

Interpretiert man nun $\psi'(\mathbf{r}',t')$ als Feldoperator, so ist unmittelbar einzusehen, daß $\hat{\psi}'(\mathbf{r}',t')$ dieselbe Bewegungsgleichung und dieselben Vertauschungsrelationen erfüllen wird wie die Operatoren $\hat{\psi}(\mathbf{r},t)$. Man kann also vermuten, daß die beiden Operatoren $\hat{\psi}'(\mathbf{r},t)$ und $\hat{\psi}(\mathbf{r},t)$ einander äquivalent sind, also durch eine unitäre Transformation im Zustandsraum ineinander überführbar sind. Wir suchen daher den unitären Operator $\hat{U}(P)$, welcher

$$\hat{U}(P)\hat{\psi}(\mathbf{r},t)\hat{U}^{-1}(P) \stackrel{?}{=} \hat{\psi}'(\mathbf{r},t) = \gamma^0\hat{\psi}(-\mathbf{r},t). \tag{4.43}$$

erfüllt. Wir setzen die Entwicklung (4.8) ein:

$$\begin{aligned} \sum_{r,\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}} \Big[& \hat{U}(P)\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\hat{U}^{-1}(P)u_r(\mathbf{p})e^{-ip_\mu x^\mu} \\ & + \hat{U}(P)\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\hat{U}^{-1}(P)v_r(\mathbf{p})e^{ip_\mu x^\mu}\Big] \\ \stackrel{?}{=} & \sum_{r,\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}}\left[\hat{c}_r^\dagger(-\mathbf{p})\gamma^0 u_r(p'^\mu)e^{ip_\mu x^\mu} + \gamma^0\hat{d}_r^\dagger(-\mathbf{p})v_r(p'^\mu)e^{ip_\mu x^\mu}\right] \end{aligned}$$

mit $p'^\mu = (p^0, -\mathbf{p})$. Aus der expliziten Gestalt der Spinoranteile

$$\begin{aligned} u_r(\mathbf{p}) &= \sqrt{p^0+m_0}\begin{pmatrix} \chi_r \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{p^0+m_0}\chi_r \end{pmatrix}, \quad r = \pm\frac{1}{2} \\ v_r(\mathbf{p}) &= -\sqrt{p^0+m_0}\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{p^0+m_0}\varepsilon\chi_r \\ \varepsilon\chi_r \end{pmatrix}, \quad r = \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

mit

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_r = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & r = \frac{1}{2}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & r = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

folgen die allgemeinen Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \gamma_0 u_r(p'^\mu) &= u_r(\mathbf{p}) \\ \gamma_0 v_r(p'^\mu) &= -v_r(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

und es muß gelten:

$$\begin{aligned} \hat{U}(P)\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\hat{U}^{-1}(P) &= \hat{c}_r^\dagger(-\mathbf{p}) \\ \hat{U}(P)\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\hat{U}^{-1}(P) &= -\hat{d}_r^\dagger(-\mathbf{p}). \end{aligned} \tag{4.44}$$

Wir fordern schließlich noch die Invarianz des Vakuumzustandes unter Paritätstransformationen:

$$\hat{U}(P)\left|0\right\rangle \stackrel{!}{=} \left|0\right\rangle.$$

Auf diese Weise haben wir tatsächlich mit (4.44) einen unitären Operator im Raum der Elektron-Positron-Zustände definiert. Für Einteilchenzustände gilt also:

$$\begin{aligned} \hat{U}(P)\left|e^-(\mathbf{p},r)\right\rangle &= \left|e^-(-\mathbf{p},r)\right\rangle \\ \hat{U}(P)\left|e^+(\mathbf{p},r)\right\rangle &= -\left|e^+(-\mathbf{p},r)\right\rangle. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Elektron und Positron haben daher zueinander eine *negative* Parität. $\hat{U}(P)$ ist somit ein Paritätsoperator mit den Eigenwerten ± 1, er ist weiter eine Systemerhaltungsgröße und die Erhaltung der Parität führt zu beobachtbaren Auswahlregeln bei radioaktiven Prozessen. Experimentelle Verifikation: Zerfall des wasserstoffähnlichen Bindungszustandes e^+ und e^- (Positronium) in zwei Photonen (γ-Quanten).

Daraus folgt physikalisch: zu jedem Zustand freier Elektronen oder Positronen gibt es einen paritätstransformierten Zustand, in welchem die Teilchenimpulse umgedreht sind, die Spins aber unverändert bleiben (siehe auch Abb. 4.1). Für jedes Positron tritt weiters ein Faktor (-1) auf. Wir können daher durch Beobachtung an einem System freier Elektronen und Positronen ein räumliches kartesisches Rechtssystem von einem Linkssystem *nicht* unterscheiden.

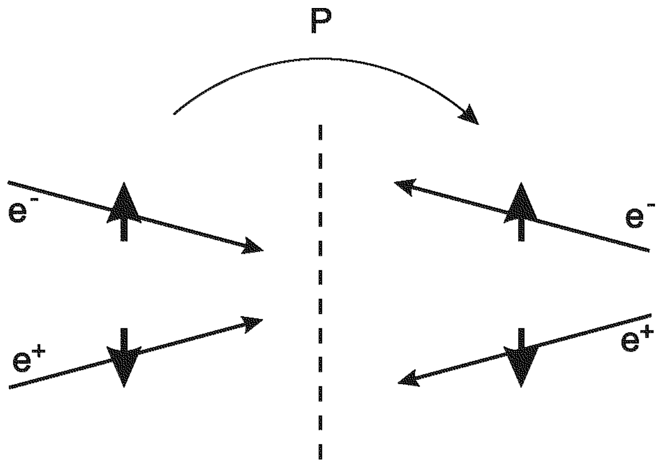

Abbildung 4.1: Paritätstransformation eines Elektron-Positronzustandes. Die dünn gezeichneten Pfeile deuten die Impulsrichtungen an, die dick dargestellten Pfeile die Spinorientierung.

4.5.2 Die Ladungskonjugationstransformation

Es stellt sich nun die Frage: findet der Beobachter, wenn er die Rolle von Elektron und Positron vertauscht, andere Gesetze für das Verhalten der freien Teilchen? Um diese Frage beantworten zu können konstruieren wir eine *Ladungskonjugationstransformation.*

Aus (4.8) wissen wir, daß der Operator $\hat{\psi}(x^\mu)$ Elektronen vernichtet oder Positronen erzeugt, während der Operator $\hat{\bar{\psi}}(x^\mu)$ genau die umgekehrte Wirkung hat. Man wird also nach einer Invarianz der Dirac-Gleichung suchen, welche $\psi(x^\mu)$ mit $\bar{\psi}(x^\mu)$ vertauscht. Aus den Eigenschaften der Dirac-Matrizen γ folgt zunächst für ihre Transponierten:

$$\gamma'^\mu = (-\gamma^\mu)^T, \tag{4.46}$$

wie man aus (E.8) unmittelbar ersieht. Damit befolgen auch die transponierten Matrizen die Vertauschungsrelationen

$$\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = 2g^{\mu\nu}.$$

Nun gilt für die adjungierten Spinoren $\bar{\psi}(x^\mu)$ die Diracgleichung (E.22) und damit gilt auch:

$$\left[i\left(-\gamma^\mu\right)^T \partial_\mu - m_0\right] \bar{\psi}^T(x^\mu) = 0. \tag{4.47}$$

Wir können nun erwarten, daß es eine Äquivalenztransformation der Form

$$S^{-1}(C)\gamma^\mu S(C) = (-\gamma^\mu)^T \tag{4.48}$$

gibt, welche Gleichung (4.47) unverändert läßt. Eine solche Transformation ist durch

$$S(C) = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir erhalten dann mit (4.48) für (4.47):

$$S^{-1}(C)\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0\right]S(C)\bar{\psi}^T(x^\mu) = 0. \tag{4.49}$$

Wir bezeichen nun mit

$$\psi^C(x^\mu) = S(C)\bar{\psi}^T(x^\mu) \tag{4.50}$$

den ladungskonjugierten Spinor, welcher ebenfalls die Diracgleichung erfüllt. Es ist nun leicht nachzuweisen, daß nach der Quantisierung die Operatoren $\hat{\psi}^C(x^\mu)$ dieselben Vertauschungsrelationen befriedigen wie die Operatorn $\hat{\psi}(x^\mu)$.

Um nun die Äquivalenz von Positronen und Elektronen in einer Theorie freier Felder zeigen zu können, müssen wir einen Operator $\hat{U}(C)$ aufsuchen, welcher die Feldoperatoren $\hat{\psi}(x^\mu)$ und $\hat{\psi}^C(x^\mu)$ ineinander überführt:

$$\hat{U}(C)\hat{\psi}(x^\mu)\hat{U}^{-1}(C) \stackrel{?}{=} \hat{\psi}^C(x^\mu) = S(C)\hat{\bar{\psi}}^T(x^\mu). \tag{4.51}$$

Wir setzen wieder die Entwicklung der Feldoperatoren ein und finden unter Benützung von

$$\begin{aligned} S(C)\bar{u}_r^T(\mathbf{p}) &= v_r(\mathbf{p}) \\ S(C)\bar{v}_r^T(\mathbf{p}) &= u_r(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

daß

$$\begin{aligned} \hat{U}(C)\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\hat{U}^{-1}(C) &= \hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p}) \\ \hat{U}(C)\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\hat{U}^{-1}(C) &= \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}) \end{aligned} \tag{4.52}$$

gelten muß. Fordern wir schließlich noch die Invarianz des Vakuumzustandes gegenüber Transformationen vom Typ $\hat{U}(C)$, also

$$\hat{U}(C)\left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle,$$

so haben wir wieder eine unitäre Transformation aufgefunden, welche (4.51) erfüllt. Es werden also Elektronen und Positronen vertauscht, ohne daß Impuls- oder Spinvariable vertauscht werden (siehe auch Abb. 4.2). Somit ist eine Unterscheidung zwischen Elektronen und Positronen rein willkürlich.

Diese Ladungskonjugationsinvarianz ist in der Natur nicht streng erfüllt. Sie wird durch die schwache Wechselwirkung verletzt.

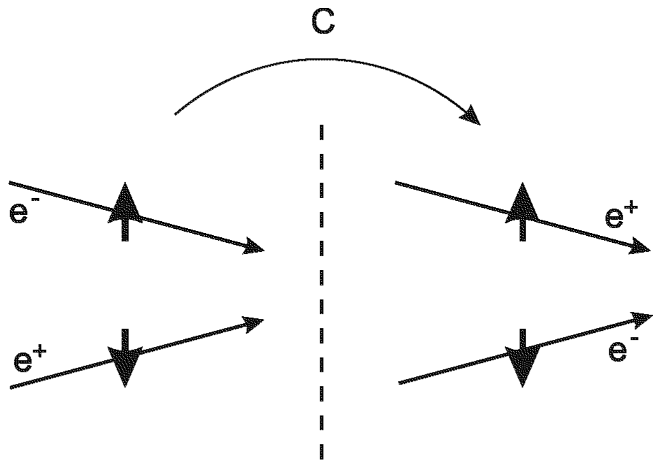

Abbildung 4.2: Ladungskonjugationstransformation eines Elektron-Positronzustandes. Sonst wie Abb. 4.1

4.5.3 Die Zeitumkehrtransformation

Wir wollen folgende physikalische Frage beantworten: können wir durch Beobachtung am freien Dirac-Feld die positive von der negativen Zeitrichtung unterscheiden? (Wenn wir also einen Film von freien Diracteilchen drehen und ihn dann rückwärts laufen lassen, sehen wir dann einen physikalisch möglichen oder einen physikalisch unmöglichen Ablauf der Ereignisse?)

Wir untersuchen daher die Auswirkungen der Zeitumkehrtransformation:

$$T: \qquad \begin{aligned} t &\rightarrow t' = -t \\ \mathbf{r} &\rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Es gilt die Dirac-Gleichung

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} - m_0\right] \psi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

und entsprechend obiger Transformation gilt:

$$\left[i(-\gamma^0) \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} - m_0\right] \psi(\mathbf{r}, -t) = 0.$$

Es ist wieder die Frage zu stellen, ob eine Transformation

$$\begin{aligned} S'^{-1}\gamma^0 S' &\stackrel{?}{=} -\gamma^0 \\ S'^{-1}\gamma^i S' &\stackrel{?}{=} \gamma^i, \quad \forall\, i \end{aligned} \tag{4.53}$$

existiert. Ausrechnen zeigt, daß (4.53) von

$$S' = \gamma_5 \gamma^0,$$

befriedigt wird, und daraus folgt:

$$S'^{-1} \left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} - m_0 \right] S' \psi(\mathbf{r}, -t) = 0.$$

Wie bereits in den zuvor besprochenen Fällen kann man auch hier schließen, daß der Spinor

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = S' \psi(\mathbf{r}, -t)$$

die Dirac-Gleichung erfüllt. Man kann schließlich noch zeigen, daß $\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$ dieselben Eigenschaften wie $\psi(\mathbf{r}, t)$ hat. Da wir im vorigen Kapitel die Ladungskonjugationsinvarianz gezeigt haben, muß ferner

$$\begin{aligned} \psi'(\mathbf{r}, t) &= S' \psi^C(\mathbf{r}, -t) \\ &= S(T) \bar{\psi}^T(\mathbf{r}, -t) \end{aligned} \tag{4.54}$$

gelten, mit

$$\begin{aligned} S(T) &= S' S(C) = i\gamma_5 \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \\ &= i\gamma_5 \left(\gamma^2\right)^\dagger = -i\gamma_5 \gamma^2 = i\gamma^2 \gamma_5 \end{aligned} \tag{4.55}$$

wegen

$$\gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma^\mu = 0.$$

Also erfüllt auch $\psi'(\mathbf{r}, t)$ die Dirac-Gleichung. Wir wollen $\psi'(\mathbf{r}, t)$ als den *zeitumgekehrten* Spinor bezeichnen. Er erfüllt natürlich auch die üblichen Beziehungen, welche für Spinoren gelten. Im quantisierten System gehorchen die Feldoperatoren $\hat{\psi}'(x^\mu)$ denselben Vertauschungsrelationen wie die Operatoren $\hat{\psi}(x^\mu)$.

Im quantisierten System müssen wir nun die Frage untersuchen, ob es eine unitäre Transformation

$$\hat{U}(T) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \hat{U}^{-1}(T) \stackrel{?}{=} \hat{\psi}'(\mathbf{r}, t) = \hat{S}(T) \hat{\bar{\psi}}^T(\mathbf{r}, -t)$$

gibt, so wie wir bereits früher ähnliche Transformationen aufgefunden haben. Man findet aber einen Widerspruch, wenn man noch die Forderung nach der Invarianz des Vakuums unter den Transformationen $\hat{U}(T)$ fordert.

Man kann aber eine *antiunitäre* Transformation auffinden, welche $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ in $\psi'(\mathbf{r}, t)$ überführt und gleichzeitig den Vakkumzustand unverändert läßt.

Zunächst ist der Operator $\hat{V}$ *antilinear*, wenn für alle Zustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$, und alle komplexen Zahlen c_1 und c_2 die Bedingung

$$\hat{V}(c_1 |a\rangle + c_2 |b\rangle) = c_1^\star \hat{V} |a\rangle + c_2^\star \hat{V} |b\rangle \tag{4.56}$$

erfüllt ist. Den zu $\hat{V}$ hermitesch konjugierten Operator $\hat{V}^\dagger$ definieren wir durch

$$\left\langle a \middle| \hat{V}^\dagger \middle| b \right\rangle = \left\langle b \middle| \hat{V} \middle| a \right\rangle, \tag{4.57}$$

und damit ist $\hat{V}^\dagger$ auch antilinear. $\hat{V}$ ist auch antiunitär, wenn

$$\hat{V}^\dagger \hat{V} = \hat{V} \hat{V}^\dagger = \hat{1} \tag{4.58}$$

gilt und $\hat{V}$ antilinear ist. Wir finden weiters:

$$|a'\rangle = \hat{V} |a\rangle, \qquad |b'\rangle = \hat{V} |b\rangle, \tag{4.59}$$

und daraus ergibt sich wieder:

$$\begin{aligned} \langle a' \,|\, b' \rangle &= \left\langle a' \middle| \hat{V} \middle| b \right\rangle \\ &\stackrel{(4.57)}{=} \left\langle b \middle| \hat{V}^\dagger \middle| a' \right\rangle = \left\langle b \middle| \hat{V}^\dagger \hat{V} \middle| a \right\rangle \\ &= \langle b \,|\, a \rangle = \langle a \,|\, b \rangle^*. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Man muß also gegenüber einer unitären Transformation noch zusätzlich komplex konjugieren, oder den “bra” mit dem “ket” Vektor vertauschen. Dies bedeutet aber physikalisch, daß der Anfangs- mit dem Endzustand zu vertauschen ist.

Ist nun $\hat{A}$ ein beliebiger linearer Operator, und $\hat{V}$ ein antiunitärer Operator, so definieren wir den zu $\hat{A}$ antiunitär transformierten Operator durch

$$\hat{A}' = (\hat{V} \hat{A} \hat{V}^{-1})^\dagger, \tag{4.61}$$

und daraus folgt für die Matrixelemente

$$\begin{aligned} \left\langle a \middle| \hat{A} \middle| b \right\rangle &= \left\langle a \middle| \hat{A} \hat{V}^{-1} \middle| b' \right\rangle \\ &= \left\langle b' \middle| \left(\hat{A} \hat{V}^{-1}\right)^\dagger \middle| a \right\rangle \\ &= \left\langle b' \middle| \left(\hat{A} \hat{V}^{-1}\right)^\dagger \hat{V}^{-1} \middle| a' \right\rangle \\ &\quad \left[\quad \hat{V} \hat{V}^\dagger = \hat{1} \quad \to \quad \hat{V}^{-1} = \hat{V}^\dagger \quad \right] \\ &= \left\langle b' \middle| \left(\hat{A} \hat{V}^{-1}\right)^\dagger \hat{V}^\dagger \middle| a' \right\rangle \\ &= \left\langle b' \middle| \left(\hat{V} \hat{A} \hat{V}^{-1}\right)^\dagger \middle| a' \right\rangle \\ &= \left\langle b' \middle| \hat{A}' \middle| a' \right\rangle. \end{aligned} \tag{4.62}$$

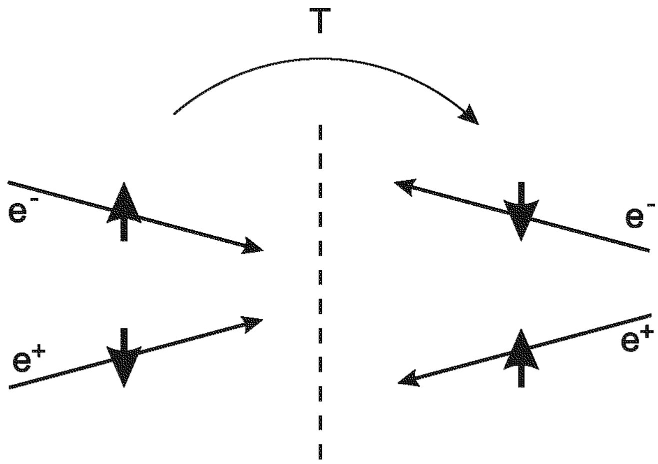

Abbildung 4.3: Zeitumkehrtranstransformation eines Elektron-Positronzustandes. Sonst wie Abb. 4.1

Die Matrixelemente bleiben somit durch die Transformation unverändert und damit auch das physikalische Geschehen.

Existiert nun eine solche antiunitäre Transformation

$$\left[\hat{V}(T)\hat{\psi}(\mathbf{r},t)\hat{V}^{-1}(T)\right]^{\dagger} \stackrel{?}{=} \hat{\psi}'(\mathbf{r},t) = \hat{S}(T)\hat{\bar{\psi}}^{T}(\mathbf{r},-t)$$

überhaupt? Man findet sie, indem man die Entwicklung der Feldoperatoren einsetzt, es gilt dann

$$\left.\begin{array}{rcl} S(T)\bar{u}_r^T(p^\mu) & = & (-1)^{r+\frac{1}{2}}u_{-r}(p'^\mu) \\ S(T)\bar{v}_r^T(p^\mu) & = & (-1)^{r+\frac{1}{2}}v_{-r}(p'^\mu) \end{array}\right\} p'^\mu = (p^0, -\mathbf{p}), \quad r = \pm\frac{1}{2},$$

und damit folgt für die Teilchenzahloperatoren:

$$\begin{aligned} \hat{V}(T)\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\hat{V}^{-1}(T) &= (-1)^{r-\frac{1}{2}}\hat{c}_{-r}^\dagger(-\mathbf{p}) \\ \hat{V}(T)\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\hat{V}^{-1}(T) &= (-1)^{r-\frac{1}{2}}\hat{d}_{-r}^\dagger(-\mathbf{p}) \qquad (4.63) \\ \hat{V}(T)\,|0\rangle &= |0\rangle\,. \qquad (4.64) \end{aligned}$$

Die hier eingeführte Transformation dreht also die Impulse und die Spins um. Dieses Ergebnis ist physikalisch durchaus brauchbar: dem Anfangszustand $|a\rangle$ des einen Beobachters entspricht dem "Endzustand" $\langle a'|$ des anderen Beobachters, für welchen die Zeit rückwärts läuft. Der Observablen $\hat{A}$ des einen Beobachters ist offensichtlich die Observable $\hat{A}'$ des anderen Beobachters zugeordnet. Er ist aus den Feldoperatoren $\hat{\psi}'(x^\mu)$ aufgebaut, und dieser Aufbau ist ident zum Aufbau des Operators $\hat{A}$ aus den Feldoperatoren $\hat{\psi}(x^\mu)$. Das Meßergebnis ist für beide Beobachter ident, siehe Gleichung (4.62). Damit ist die Zeitinvarianz nachgewiesen.

All dies entspricht der Tatsache, daß die im klassischen zeitumgekehrte Lösung auch erhalten werden kann, indem man das elektrische Feld, die Geschwindigkeiten, das Ladungsvorzeichen und die Richtung der Stromdichte umdreht. Das magnetische Feld bleibt hingegen unverändert.

In der Natur sind die Invarianzen C, P und T verletzt:

P: die schwache Wechselwirkung hebt die Äquivalenz von Rechts- und Linkssystemen auf.

C: auch diese Invarianz wird durch die schwache Wechselwirkung verletzt.

T: diese Invarianz wird beim Zerfall neutraler K-Mesonen verletzt.

Theorem 4.1 *In einer relativistischen Feldtheorie mit beliebiger Wechselwirkung, muß das Produkt* $\Theta = CPT$ *eine Invarianztransformation sein.*

In allen bisher bekannten Experimenten konnte dieses Theorem bestätigt werden.

Schwache Wechselwirkung (eigentlich elektroschwache Wechselwirkung): Diese Theorie erlaubt es, daß in einem weiteren Prozess bei der Elektron-Positron Anihilation das virtuelle Austauschphoton durch ein Z-Boson ersetzt wird. (Das Z-Boson wurde erst vor wenigen Jahren experimentell am CERN nachgewiesen.)