III. Grundlösungen gewisser partieller Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

1) Einführung von Grundlösungen

Sei $f \in \mathcal{S}$. (Wie schon früher bemerkt, ist es für die Anwendbarkeit der hier verwendeten Sätze hinreichend, wenn $f \in L^1_o$ ist.) Ferner sei

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}, \quad P \neq \mathbb{O} \tag{3.1}$$

der Differenzialausdruck einer linearen partiellen Differenzialgleichung (PDGl) mit konstanten Koeffizienten. Gesucht sei $T \in \mathcal{S}'$, so dass für $f \in \mathcal{S}$ (L^1_o) gilt :

$$P(D)T = T_f \tag{3.2}$$

Es soll nun unter gewissen einschränkenden Annahmen für das Polynom $P(t)\,(t \in \mathbb{R}^n)$ mit den bisher erarbeiteten Hilfsmitteln eine Darstellung einer Lösung von (3.2) aufgefunden werden.

Die Anwendung von $\mathcal{F}$ auf (3.2) ergibt mit (2.60)

$$\mathcal{F}(P(D)T) = P(ik) \cdot \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(T_f) \quad . \tag{3.3}$$

Daraus folgt formal mit Verwendung der Konsistenzbeziehung (2.55)

$$\mathcal{F}(T) = \frac{1}{P(ik)} \cdot T_{\mathcal{F}(f)} \tag{3.4}$$

in Verallgemeinerung von Sk S. 77 f. Da $T \in \mathcal{S}'$ vorausgesetzt wurde und daher auch $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'$ gilt, sind an dieser Stelle Überlegungen anzustellen, welche Polynome $P(ik)$ zugelassen werden können, damit (3.4) und somit auch der Übergang von (3.3) auf (3.4) in $\mathcal{S}'$ einen Sinn hat. Die allgemeine Abhandlung dieser Frage geht weit über den Rahmen dieser LV hinaus und kann hier kaum auch nur umrissen werden. Falls $\frac{1}{P(ik)} \notin L^1_{loc}$ ist, erzeugt diese Funktion keine reguläre vF und es muss ihr durch ein Regularisierungsverfahren erst ein (dann nicht eindeutiger) Sinn gegeben werden.

Voraussetzung : Hier werden nur solche PDGl betrachtet werden, für die mit $g(k) := \frac{1}{P(ik)}$ $g \in L^1_{loc}$ gilt.

Beachte : Der Kehrwert eines Polynoms ohne reelle Nullrichtungen ist immer im Unendlichen polynomial beschränkt. Im Sinne der in II.C. 2 a) gemachten Anmerkung zur erweiterten Auffassung von Produkten von regulären vFn mit geeigneten Funktionen kann man die rechte Seite von (3.4) als $\mathcal{F}(f) \cdot T_{g(.)}$ lesen, wenn man für das f in der Anmerkung $\mathcal{F}(f)$ setzt. (Wenn $f \in L^1_o$ ist, ist diese Sichtweise auch noch möglich, da $\mathcal{F}(f) \in C^\infty$ polynomial beschränkt ist.) Dann ist (3.4) einer Behandlung im Rahmen der hier vorgestellten Theorie zugänglich.

Wegen $g \in L^1_{loc}$ und seiner polynomialen Beschränktheit im Unendlichen (tatsächlich liegt ein Abfall im Unendlichen vor) ist

$$G := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathcal{F}^{-1}(T_{g(.)}) \quad „= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathcal{F}^{-1}(g(.))“ \in \mathcal{S}' \quad . \tag{3.5}$$

Da also $T_{g(.)} = (2\pi)^{n/2} \cdot \mathcal{F}(G)$ ist, wird (3.4) damit zu

$$\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(f) \cdot T_g = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(G) \tag{3.6}$$

Die Anwendung des Faltungssatzes (2.73) auf (3.6) ergibt

$$\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(G * f) \tag{3.7}$$

und die Anwendung von $\mathcal{F}^{-1}$ darauf

$$T = G * f \tag{3.8}$$

Die Bedeutung von (3.8) ist folgende : Falls es gelingt, die $\mathcal{F}$-Umkehrtransformation von $g = \frac{1}{P}$ im Sinne von $\mathcal{S}'$ zu bestimmen, hat man eine Darstellung einer Lösung der inhomogenen linearen PDGl (3.2) gefunden. Die in unseren Fällen immer regulären, als T_γ darstellbaren vFn (3.5) heißen zu $P(D)$ gehörende Grundlösungen. Ferner werden in den hier betrachteten Fällen auch die Lösungen T immer reguläre vFn T_u sein, so dass (3.8), wegen der nach (2.72) angeführten Konsistenzbeziehung $T_f * \varphi = T_{f*\varphi}$ als

$$T_u = T_\gamma * f = T_{\gamma * f} \quad \text{oder für die erz. Funktionen} \quad u = \gamma * f \tag{3.9}$$

geschrieben, dann eine Integraldarstellung der (klassischen oder schwachen) Lösung u bedeutet, also als eine Gleichung von Funktionen gelesen werden kann, wenngleich ein Einsetzen der nicht notwendig klassischen Lösung u in (3.2) im Allgemeinen erfordert, sie dort als T_u aufzufassen.

2) <u>Beispiele für Grundlösungen</u>

a) Potenzialgleichung (Poisson-Gleichung) im $\mathbb{R}^3$

Diese Gleichung lautet bekanntlich

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = f \quad . \tag{3.10}$$

Es ist hier also

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} D_i^2 \tag{3.11}$$

und demnach

$$P(ik) = -\sum_{i=1}^{3} k_i^2 =: -k^2 \tag{3.12}$$

Die Bedingung $\frac{1}{P(ik)} \in L^1_{loc}$ ist also erfüllt. Zu berechnen ist nach (3.5)

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}^{-1}(T_{-1/k^2}), \varphi > = < T_{-1/k^2}, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) > = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{k^2} \left(\int e^{i(k,x)} \varphi(x) dm_x \right) dm_k = \\ -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \lim_{R\to\infty} \int_{|k|\le R} \frac{1}{k^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{i(k,x)} \varphi(x) dm_x \right) dm_k = \\ -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{|k|\le R} \frac{1}{k^2} e^{i(k,x)} \varphi(x) dm_k \right) dm_x \end{aligned}$$

Das innere Integral über x in der vorletzten Zeile konvergiert wegen $\varphi \in \mathcal{S}$ gleichmäßig, das äußere Integral wird über dessen Produkt mit einer L^1-Funktion auf $K(0,R)$ erstreckt. Für das innere k-Integral ist $x \in \mathbb{R}^3$ ein Parameter. Man wählt im k-Raum Polarkoordinaten ρ, ϑ, ψ so, dass die Polarachse in die x-Richtung zeigt. Dann gilt $(k,x) = |x|\rho\cos\vartheta$. Damit wird das innere Integral wegen der Unabhängigkeit des Integranden von ψ zu

$$\int_{|k|\le R} \frac{1}{k^2} e^{i(k,x)} dm_k = 2\pi \int_0^R \left(\int_0^\pi \frac{1}{\rho^2} e^{i|x|\rho\cos\vartheta} \sin\vartheta \rho^2 d\vartheta \right) d\rho$$

Mit $s = \cos\vartheta$, $\quad \sin\vartheta d\vartheta = -d\cos\vartheta = -ds$ werden die Integrationsgrenzen zu $\vartheta = 0 \ : \ s = 1$; $\vartheta = \pi \ : \ s = -1$. Damit wird das Obige zu :

$$2\pi \int_0^R \left(-\int_1^{-1} e^{i|x|\rho s} ds \right) d\rho = 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{i|x|\rho} e^{i|x|\rho s}|_{s=-1}^{+1} \right) d\rho = 2\pi \int_0^R \frac{1}{i|x|\rho} \left(e^{i|x|\rho} - e^{-i|x|\rho} \right) d\rho$$

Geht man im verbliebenen inneren Integral auf die Veränderliche $t = |x|\rho$ über und führt den $\lim_{R\to\infty}$ aus, erhält man

$$< \mathcal{F}^{-1}(T_{-1/k^2}), \varphi >= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_0^\infty \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} dt \right) \frac{1}{|x|} \varphi(x) dm_x \quad .$$

Wegen

$$\int_0^\infty \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} dt = 2 \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

(s. (2.7)) verbleibt schließlich

$$< \mathcal{F}^{-1}(T_{-1/k^2}), \varphi >= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int \frac{1}{|x|} \varphi(x) dm_x \tag{3.13}$$

oder mit der Bezeichnung von (3.5)

$$G = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{F}^{-1}(T_{-1/k^2}) = -\frac{1}{4\pi} T_{1/|x|} \quad , \quad \gamma = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} \tag{3.14}$$

Dies ist die in Sk, S. 55f erstmals aufgetretene Distributionslösung der Potenzialgleichung. Die Gleichung (3.10) hat also nach der allgemeinen Formel (3.8) eine Lösung u mit der Darstellung

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|x-y|} f(y) dm_y \quad . \tag{3.15}$$

b) Schwingungsgleichung (Helmholtz-Glg) im $\mathbb{R}^3$

Diese Gleichung lautet bekanntlich

$$\Delta u - \lambda u = f \tag{3.16}$$

Hier ist

$$P(D) = \sum_{i=1}^3 D_i^2 - \lambda \tag{3.17}$$

und demnach

$$P(ik) = -(k^2 + \lambda) \quad . \tag{3.18}$$

Die Bedingung $1/P(ik) \in L^1_{loc}$ ist nur für $\lambda \geq 0$ erfüllt, da für $\lambda < 0 \quad P(ik)$ die Nullstellenmenge $|k| = \sqrt{-\lambda}$, also eine Kugelfläche im $\mathbb{R}^3$ hat. Wie man sich überzeugt, ist $1/P(ik)$ in der Umgebung dieser Fläche nicht integrierbar. Es sei also im Folgenden $\lambda = \mu^2 > 0$ vorausgesetzt. (Der Fall $\lambda = 0$ ist der des Laplace-Operators.) Zu berechnen ist, wie vorhin, mit dem gleichen Weg zum Zwischenergebnis

$$\begin{aligned} &< \mathcal{F}^{-1}(T_{-1/(k^2+\mu^2)}), \varphi >= < T_{-1/(k^2+\mu^2)}, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) >= \\ &-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \lim_{R\to\infty} \int \left(\int_{|k|\leq R} \frac{1}{k^2 + \mu^2} e^{i(k,x)} dm_k \right) \varphi(x) dm_x \end{aligned} \tag{3.19}$$

Durch den Übergang auf die gleichen Polarkoordinaten im k-Raum wie vorhin erhält man für das innere Integral nach Ausführung der Integration über s, wenn man in einem zweiten Schritt im Integral über den zweiten Summanden von ρ auf $\tilde{\rho} = -\rho$ übergeht und dann die beiden Integrale über den nun gleichen Integranden zusammenfasst

$$\int_{|k|\leq R} \frac{1}{k^2+\mu^2} e^{i(k,x)} dm_k = 2\pi \int_0^R \frac{1}{i|x|\rho} (e^{i|x|\rho} - e^{-i|x|\rho}) \frac{\rho^2}{\rho^2+\mu^2} d\rho =$$
$$2\pi \frac{1}{i|x|} \left(\int_0^R e^{i|x|\rho} \frac{\rho}{\rho^2+\mu^2} d\rho - \int_0^{-R} e^{i|x|\tilde{\rho}} \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}^2+\mu^2} d\tilde{\rho} \right) = 2\pi \frac{1}{i|x|} \int_{-R}^R e^{i|x|\rho} \frac{\rho}{\rho^2+\mu^2} d\rho$$

Führt man nun den $\lim_{R\to\infty}$ aus, dann kann man das Integral über den Residuensatz berechnen, wenn man den Integrationsweg durch einen Halbkreis in der oberen Halbebene schließt, den man mit $R \to \infty$ ins Unendliche verschiebt:

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{1}{i|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|x|\rho} \frac{\rho}{\rho^2+\mu^2} d\rho &= \pi \frac{1}{i|x|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i|x|\rho} \left(\frac{1}{\rho + i|\mu|} + \frac{1}{\rho - i|\mu|} \right) d\rho = \\ \frac{2\pi^2 i}{i|x|} e^{-|\mu||x|} &= 2\pi^2 \frac{e^{-|\mu||x|}}{|x|} \end{aligned}$$

Dies in (3.19) eingesetzt ergibt schließlich

$$< \mathcal{F}^{-1}(T_{-1/(k^2+\mu^2)}), \varphi >= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int \frac{1}{|x|} e^{-|\mu||x|} \varphi(x) dm_x \tag{3.20}$$

oder mit der Bezeichnung aus (3.5)

$$G = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{F}^{-1}(T_{-1/(k^2+\mu^2)}) = -\frac{1}{4\pi} T_{e^{-|\mu||x|}/|x|} \quad , \quad \gamma = -\frac{1}{4\pi|x|} e^{-|\mu||x|} \tag{3.21}$$

In Entsprechung zum vorigen Falle hat also die Gleichung (3.16) aufgrund von (3.8) eine Lösung mit der Darstellung

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|x-y|} e^{-|\mu||x-y|} f(x) dm_y \tag{3.22}$$

c) Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^{n+1}$

Diese Gleichung lautet

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = 0 \quad . \tag{3.23}$$

Bezeichnet man die den x_i durch $\mathcal{F}$ zugeordneten Veränderlichen wieder mit k_i und die t entsprechende Veränderliche mit τ, so ist das zu

$$P(D_x, D_t) = D_t - \sum_{i=1}^n D_i^2 \tag{3.24}$$

gehörende Polynom

$$P(ik, i\tau) = i\tau + k^2 \quad . \tag{3.25}$$

Die Bedingung $1/P(ik, i\tau) \in L^1_{lok}(\mathbb{R}^{n+1})$ ist wieder efüllt. Der Einfachheit halber wird hier, wie auch sonst im Schrifttum vielfach üblich, das Ergebnis der $\mathcal{F}$-Rücktransformation von $1/P(\ )$, also die Grundlösung, angegeben und gezeigt, dass dessen $\mathcal{F}$-Transformation gerade $1/P(\ )$ ist. Zur Verringerung der Schreibarbeit soll diese $\mathcal{F}$-Transformation dieses Mal unter

Weglassung der Integration über das Produkt mit einer Grundfunktion berechnet werden, obwohl man sich immer vor Augen halten muss, dass die auftretenden Ausdrücke auch hier nur im Sinne von vF eine Bedeutung haben, genau so wie in a) und b).

Der Ansatz für die Grundlösung von (3.23) ist

$$\gamma(x,t) = \Theta(t)(4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{3.26}$$

Diese Funktion wurde früher (anlässlich Sk S. 45) als Beispiel für eine für $t \to 0$ gegen die δ-Distribution konvergierende Funktionenschar angeführt. Aus diesem Zugang folgt, dass das Integral von (3.26) über x unabhängig von t gleich 1 ist, weswegen diese Funktion in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ liegt. Die $\mathcal{F}$-Transformationen $\mathcal{F}_x$ bezüglich $x \in \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{F}_t$ bezüglich t werden nacheinander ausgeführt und daher in der folgenden Bezeichnungsweise geschachtelt angeschrieben :

$$\mathcal{F}_{t,x}(\Theta(t)(4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{x^2}{4t}})(\tau,k) = \mathcal{F}_t[\Theta(t)(4\pi t)^{-n/2}\mathcal{F}_x(e^{-\frac{x^2}{4t}})(t,k)](\tau,k) \quad . \tag{3.27}$$

Nun gilt, wie früher gezeigt,

$$\mathcal{F}(e^{-x_i^2/2})(k) = e^{-k_i^2/2} \quad . \tag{3.28}$$

Die Regel für die Vertauschung von $\mathcal{F}$ und linearen Koordinatentransformationen (Sk S. 73), auf den Fall $x \in \mathbb{R}^n$ verallgemeinert, lautet

$$\mathcal{F}(f(ax))(k) = \frac{1}{|a|^n}\mathcal{F}(f)(\frac{k}{a}) \quad . \tag{3.29}$$

(3.28) und (3.29) ergeben zusammen für die innere Transformation in (3.27) rechts ($a = \frac{1}{\sqrt{2t}}$)

$$\mathcal{F}_x(\exp(-\frac{x^2}{4t})) = \mathcal{F}_x\left(\exp(-\frac{1}{2}\sum_i(\frac{x_i}{\sqrt{2t}})^2)\right) = (2t)^{n/2}\exp(-\frac{1}{2}\sum_i(\sqrt{2t}k_i)^2) = (2t)^{n/2}e^{-tk^2} \tag{3.30}$$

Damit erhält man für (3.27)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{t,x}(\gamma)(\tau,k) = \mathcal{F}_t\left(\Theta(t)\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-tk^2}\right)(\tau,k) \quad &= \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-i\tau t - tk^2}dt = \\ \frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}}\cdot\frac{1}{i\tau+k^2} = \frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}}\frac{1}{P(ik,i\tau)}\end{aligned} \tag{3.31}$$

3) Grundlösungen als Lösungen im Sinne verallgemeinerter Funktionen

Es wurde früher (Sk S. 55f) gezeigt, dass für die in (3.14) erhaltene Grundlösung der Laplace-Gleichung in $\mathcal{D}'$ $\Delta G = \delta$ gilt. Es wurde damals auch schon angemerkt, dass vFn G, die eine solche Gleichung erfüllen, Grundlösungen der entsprechenden partiellen Differenzialgleichung heißen. Es erhebt sich daher die Frage, ob nicht auch die anderen vorhin bestimmten Grundlösungen im Sinne von $\mathcal{D}'$ oder $\mathcal{S}'$ Lösungen von $P(D)G = \delta$ ihrer zugehörigen Gleichungen sind. Unter der in 1) gemachten Voraussetzung $g(k) = 1/P(ik) \in L^1_{loc}$ lässt sich diese Frage im Rahmen von $\mathcal{S}'$ bejahen. Die Anwendung von (2.60) auf die in $\mathcal{S}'$ aufgestellte Gleichung

$$P(D)U = \delta \tag{3.32}$$

ergibt mit (2.58)

$$P(ik) \cdot \mathcal{F}(U) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} T_1 \quad . \tag{3.33}$$

Da eine Lösung dieser Gleichung in $\mathcal{S}'$ gesucht ist, ist $\mathcal{F}(U)$ nur bis auf eine Lösung $S \in \mathcal{S}'$ der homogenen Gleichung $P(ik) \cdot S = 0$ festgelegt. Falls die Nullstellenmenge $N_P = \{k \in \mathbb{R}^n | P(ik) = 0\}$ nicht leer ist, sind dies gewisse durch diese homogene Gleichung eingeschränkte vFn, deren Träger in N_P liegt. Diese Beobachtungen sind eine Verallgemeinerung der Ergebnisse, die bei der Untersuchung der Gleichung $x^n \cdot T = 0$ in $\mathcal{D}'$ erhalten wurden. (Sk, S. 31 und Ergänzung dazu.) In jedem Falle ist aber

$$\mathcal{F}(U) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} g \cdot T_1 \tag{3.34}$$

eine Lösung von (3.33) , die durch dieselben Überlegungen, die in 1) vor (3.5) angestellt wurden, in

$$\mathcal{F}(U) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot T_g \tag{3.35}$$

übergeführt werden kann. Also gilt nach (3.5) für diese partikuläre Lösung von (3.33) $U = G$.

Aus dem Bestehen der Gleichung (3.32) für G folgt für T aus (3.8) mit (2.74) in II.7. ii.a) und (2.75)

$$P(D)T = P(D)(G * f) = (P(D)G) * f = \delta * f = T_f \tag{3.36}$$

Damit ist also nochmals, unter Verwendung der für Grundlösungen bestehenden Gleichung (3.32), gezeigt, dass T Lösung von (3.2) ist. Unter den hier immer zutreffenden Annahmen der Regularität der Lösungen, $T = T_u$, wird u durch (3.9) dargestellt.

Die Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung als deren vF-Lösung

Es wird im Folgenden stellvertretend für andere partielle Differenzialgleichungen gezeigt, dass die Grundlösung (3.26) der Wärmeleitungsgleichung im Sinne von vF die Gleichung $P(D)G = \delta$ erfüllt. Der Beweis solcher Ergebnisse wird üblicherweise in $\mathcal{D}'$ geführt, da dort die Rechenschritte besonders problemlos sind. Er lässt sich aber auch in $\mathcal{S}'$ führen, da die Beiträge von γ und seinen Ableitungen zum Integranden im Unendlichen polynomial beschränkt sind und daher auch für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ die Randterme der partiellen Integrationen verschwinden.

Es ist nicht nur $\gamma(x,t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, sondern sogar $\gamma(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. Man überprüft leicht, dass für $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \prod_1^n e^{-x_i^2/4t} = -\frac{1}{2t} x_j \prod_1^n e^{-x_i^2/4t} \qquad ; \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \prod_1^n e^{-x_i^2/4t} = -\frac{1}{2t} \prod_1^n e^{-x_i^2/4t} + \frac{1}{4t^2} x_j^2 \prod_1^n e^{-x_i^2/4t}$$

$$\begin{aligned} \Delta \prod_1^n e^{-x_i^2/4t} &= -\frac{n}{2t} \prod_1^n e^{-x_i^2/4t} + \frac{|x|^2}{4t^2} \prod_1^n e^{-x_i^2/4t} \\ \frac{\partial}{\partial t}\gamma(x,t) &= -\frac{n}{2t} (4\pi t)^{-n/2} \prod_1^n e^{-x_i^2/4t} + \frac{|x|^2}{4t^2} (4\pi t)^{-n/2} \prod_1^n e^{-x_i^2/4t} \quad , \end{aligned}$$

zusammengefasst also

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\gamma(x,t) = 0 \quad . \tag{3.37}$$

Für $\varphi \in \mathcal{S}$ $(\mathcal{D})$ bedeutet die Anwendung des partiellen Differenzialausdrucks der Wärmeleitungsgleichung auf die reguläre vF G

$$
\begin{aligned}
&< (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)G, \varphi >= - < G, (\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)\varphi >= \\
= -\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} &\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^{n/2}} e^{-|x|^2/4t} (\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)\varphi(x,t) dm_x \right) dt = \\
-\lim_{\epsilon \to 0} &\int_\epsilon^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x,t) (\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)\varphi(x,t) dm_x \right) dt =: -\lim_{\epsilon \to 0} J_\epsilon(\varphi)
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Diese Darstellung ist wegen $\gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ in $\mathcal{S}$ (oder $\mathcal{D}$) sinnvoll möglich. Für $\epsilon > 0$ kann man bezüglich t partiell integrieren und erhält

$$
\begin{aligned}
J_\epsilon(\varphi) = &\int_\epsilon^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x,t)(\Delta\varphi)(x,t) dm_x \right) dt + \int_\epsilon^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x,t) \partial_t \varphi(x,t) dm_x \right) dt = \\
&\int_\epsilon^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\gamma(x,t)\varphi(x,t) dm_x \right) dt + \int_{\mathbb{R}^n} \left(\gamma(x,t)\varphi(x,t)|_{t=\epsilon}^{t=\infty} \right) dm_x - \\
&- \int_\epsilon^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t \gamma(x,t)] \varphi(x,t) dm_x \right) dt \quad ,
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

wobei für die Überwälzung des Δ-Operators der Greensche Satz verwendet wurde. Zusammenfassen des ersten und dritten Gliedes ergibt wegen des Verschwindens von $\varphi(x,t)$ für $t \to \infty$

$$
J_\epsilon(\varphi) = \int_\epsilon^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} (-\partial_t + \Delta)\gamma(x,t)\varphi(x,t) dm_x \right) dt - \int_{\mathbb{R}^n} (\gamma(x,\epsilon)\varphi(x,\epsilon))\, dm_x \quad . \tag{3.40}
$$

Wegen (3.37) verschwindet der erste Summand und damit das Integral für alle $\epsilon > 0$, und es verbleibt

$$
< (\partial_t - \Delta)G, \varphi >= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x,\epsilon)\varphi(x,\epsilon) dm_x = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\epsilon^{n/2}} e^{-|x|^2/4\epsilon} \varphi(x,\epsilon) dm_x \tag{3.41}
$$

Die folgende Rechnung ähnelt der am Ende von II.B gebrachten; der Unterschied besteht in der Verallgemeinerung auf den $\mathbb{R}^n$ sowie darin, dass in φ an der Stelle von t, das hier die Rolle eines Parameters spielt, noch zusätzlich ϵ vorkommt. Der Integrand ist die bei der Besprechung von Sk S. 45 dort nicht angeführte, zusätzlich vorgestellte δ-Schar. Mit $y_i := \frac{x_i}{\sqrt{\epsilon}}$ wird aus (3.41)

$$
\begin{aligned}
< (\partial_t - \Delta)G, \varphi >= \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/4} \varphi(\sqrt{\epsilon}\, y, \epsilon) dm_y = \\
\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/4} [\varphi(0,0) + (\varphi(\sqrt{\epsilon}\, y, \epsilon) - \varphi(0,0))] dm_y
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

Da das uneigentliche Integral wegen der Exponentialfunktion problemlos konvergiert, gilt wegen der Konvergenz von $\varphi(\sqrt{\epsilon}\, y, \epsilon)$ gegen $\varphi(0,0)$

$$
\lim_{\epsilon \to \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/4} [\varphi(\sqrt{\epsilon}\, y, \epsilon) - \varphi(0,0)] dm_y \right| = 0 \tag{3.43}
$$

und daher wegen

$$
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/4} dm_y = (2\sqrt{\pi})^n
$$

$$< (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)G, \varphi >= \varphi(0,0) =< \delta, \varphi > \tag{3.44}$$

4) Eine Grundlösung der Wellengleichung im $\mathbb{R}^2$

Die Wellengleichung lautet bekanntlich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad . \tag{3.45}$$

Es ist also

$$P(D_x, D_t) = D_t^2 - D_x^2 \quad , \quad P(ik, i\tau) = k^2 - \tau^2 \quad , \tag{3.46}$$

und somit $\frac{1}{P(.)} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Daher ist das vorhin angebene Verfahren zur Konstruktion einer Grundlösung nicht anwendbar. Es wird nun im Folgenden gezeigt, dass die in der klassischen Theorie im $\mathbb{R}^2$ angegebene Grundlösung G dies auch im Sinne der vF ist. γ ist gegeben durch

$$\gamma(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für} \quad t > |x| \\ 0 & \text{für} \quad t \le |x| \end{cases} \quad . \tag{3.47}$$

Es ist offensichtlich

$$\gamma(t,x) = \frac{1}{2}\chi_Q \quad , \tag{3.48}$$

wobei Q das Gebiet $t > |x|$ in der (x,t)-Ebene ist. Es ist $\gamma \notin C^2(\mathbb{R}^2)$, aber $\gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, weswegen es in der Gleichung (3.45) nur als reguläre vF T_γ betrachtet werden kann. Man geht nun auf das bekannte, gegen das (t,x)-Koordinatensystem um $\pi/4$ gedrehte (ξ,η)-System über:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) & \xi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x) \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) & \eta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x) \end{aligned} \tag{3.49}$$

Das heißt, dass die positive η-Achse die linke Grenze von Q ist und die positive ξ-Achse deren rechte Grenze. Anders ausgedrückt, ist in den neuen Koordinaten $Q = \{(\xi,\eta) |\, \xi > 0 \wedge \eta > 0\}$. Die auf die neuen Koordinaten transformierte Funktion γ ist also

$$\overline{\gamma}(\xi,\eta) = \gamma(t(\xi,\eta), x(\xi,\eta)) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für} \quad \xi > 0 \wedge \eta > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad . \tag{3.50}$$

Der Differenzialausdruck (3.45) geht dann bekanntlich in

$$2\overline{u}_{\xi\eta} = 0 \quad . \tag{3.51}$$

über. Wegen der Kettenregel für die Verknüpfung von affinen Transformationen und Ableitungen von vF (s. Ergänzung: „Begriffe aus der Lehre von Funktionen … “ (6)) geht dann auch der Differenzialausdruck von (3.45) für eine auf (ξ,η) transformierte (hier reguläre) vF in den von (3.51) über. Es soll nun $2(T_{\overline{\gamma}})_{\xi\eta}$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} < 2(T_{\overline{\gamma}})_{\xi\eta}, \varphi >= 2 < T_{\overline{\gamma}}, \varphi_{\xi\eta} > &= \int_0^\infty (\int_0^\infty \varphi_{\xi\eta} d\eta) d\xi = -\int_0^\infty \varphi_\xi(\xi,0) d\xi = \\ \varphi(0,0) &= < \delta, \varphi > \end{aligned} \tag{3.52}$$

$\overline{G} = T_{\overline{\gamma}}$ ist also tatsächlich eine Grundlösung von (3.51) und damit G eine solche von (3.45).

5) Ergänzung: Grundlösungen gewöhnlicher linearer DGln mit konstanten Koeffizienten in $\mathcal{D}'$
(Nach Fischer/Kaul, M für Φer 2, S.316; oder Wladimirow, S. 84f, 138f))

Ein gewöhnlicher linearer Differenzialausdruck hat die Gestalt

$$P(d) = \sum_{l=0}^{n} a_l d_x^l \quad a_l \in \mathbb{R} \quad . \tag{3.53}$$

Zur Ermittlung einer Grundlösung benötigt man den
Hilfssatz (Leibniz-Regel für $a \cdot T$):
Für $a \in C^\infty$ und $T \in \mathcal{D}'$ gilt

$$(a \cdot T)^{(n)} = \sum_{l+m=n} \frac{n!}{l!m!} d_x^l a \cdot d_x^m T \quad . \tag{3.54}$$

Für $n = 1$ ist dies die Produktregel (5) in der Ergänzung: „Begriffe aus der Lehre von Funktionen … “ . Die Behauptung für beliebiges n folgt daraus genau so durch Induktion wie für gewöhnliche Funktionen.

Bsp.: Sei $a(0) = 0$. Nach der Bemerkung in Sk, S. 21, vor 5 ist $a \cdot \delta = a(0) \cdot \delta$. Ferner ist nach Sk, S. 23 $T'_H = \delta$. Dann ergibt die Produktregel

$$(a \cdot T_H)' = a' \cdot T_H + a \cdot \delta = a' \cdot T_H + a(0)\delta = a' \cdot T_H \quad .$$

Es gilt nun der Satz:
Es sei $u(x)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$P(d)u = 0, \quad u^{(k)}(0) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq k \leq n-2, \quad u^{(n-1)}(0) = 1\,.$$

Dann ist

$$G(x) = u(x)H(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 \quad \text{für} & x < 0 \end{cases} \tag{3.55}$$

eine Grundlösung für $P(d)$, die bis auf eine Lösung der homogenen Gleichung bestimmt ist.
Beweis: Nach einem grundlegenden Satz der Lehre von den GDgln ist $u \in C^\infty(\mathbb{R})$. Daher ist $T_G = u \cdot T_H \in \mathcal{D}'$. Aus dem Beispiel folgt durch Induktion mit der Leibnizregel wegen $u^{(k)}(0) = 0$ für $k \leq n-2$

$$T_G^{(l)} = (u \cdot T_H)^{(l)} = u^{(l)} \cdot T_H \quad l \leq n-1 \quad ,$$

$$T_G^{(n)} = u^{(n)} \cdot T_H + u^{(n-1)}\delta = u^{(n)} \cdot T_H + u^{(n-1)}(0)\delta = u^{(n)} \cdot T_H + \delta$$

und damit

$$P(d)T_G = \sum_{l=0}^{n} a_l (u \cdot T_H)^{(l)} = (\sum_{l=0}^{n} a_l u^{(l)}) \cdot T_H + \delta = \delta \tag{3.56}$$