II. Die Fourier-Transformation ($\mathcal{F}$-Transformation)

A. Die $\mathcal{F}$-Transformation von Funktionen

1) Die $\mathcal{F}$-Transformation in einer Veränderlichen

Mit $L^1(\mathbb{R})$ sei der lineare Raum der zusammen mit ihrem Absolutbetrag über $\mathbb{R}$ integrierbaren Funktionen bezeichnet. Der Buchstabe L erinnert daran, dass für den Aufbau einer in sich geschlossene Theorie der Fouriertransformation die Integrierbarkeit im allgemeinen Lebesgueschen Sinne schon hinreichend ist. Da für unsere Zwecke die Klasse der Riemann-integrierbaren, absolut integrierbaren Funktionen allgemein genug ist, werden wir immer mit dem bekannten Riemannschen Integral das Auslangen finden; die Bezeichnung für die $\mathcal{F}$-transformierbaren Funktionen wird aber beibehalten.

Def. 1 : Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ sei

$$(\mathcal{F}f)(k) := \tilde{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} dx \tag{2.1}$$

Da $\tilde{f}$ auch für reelle f im allgemeinen komplexwertig sein wird, lässt man aus Symmetriegründen auch für f komplexwertige Funktionen zu. Aus $f \in L^1(\mathbb{R})$ folgt wegen $|f(x) \cdot e^{-ikx}| = |f(x)| \cdot |e^{-ikx}| = |f(x)|$

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{R}} |\tilde{f}(k)| \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x)| dk < \infty \tag{2.2}$$

Da die Fouriertransformation auf dem linearen Raum $L^1(\mathbb{R})$ definiert ist, ist sie eine lineare Abbildung desselben in die beschränkten Funktionen. Darüber hinaus kann man zeigen :

Lemma von Riemann-Lebesgue : $\tilde{f}$ ist immer eine stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion.

2a) Symmetrie- und Konjugationseigenschaften von $\mathcal{F}$-Transformierten : Sk S. 73f

2b) Lineare Transformationen der unabhängig Veränderlichen : Sk S. 73

3) Umkehrung der $\mathcal{F}$-Transformation :

Satz 1 : Es seien f und $\tilde{f} \in L^1$. Dann gilt

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \tag{2.3}$$

in allen Stetigkeitspunkten von f. (Beweis: S. C.4)

Da $f(-x) = \mathcal{F}(\tilde{f})(x)$, gilt für $\tilde{f} \in L^1$ die Aussage des Lemmas von Riemann-Lebesgue auch für die Rücktransformierte f. Daraus folgt, dass z. B. für ein $f \in L^1$, das mit Ausnahme einer Sprungstelle überall stetig ist, $\tilde{f} \notin L^1$ gelten muss.
Satz 1 gilt aber auch noch für eine Klasse von Funktionen, die nur um eine Stufe spezieller sind als jene, für die die Ausgangstransformation (2.1) eingeführt wurde, wenn man das Integral als Cauchy-Hauptwertintegral auffasst. Allerdings geschieht dies jetzt nicht in Bezug auf eine (nicht notwendig vorhandene) singuläre Stelle des Integranden, sondern in Bezug auf die gegen Unendlich strebenden Integrationsgrenzen. (Vgl. die Definition der $\mathcal{F}$-Reihe

durch $f(x) = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=-l}^{k=+l} e^{ikx} \hat{f}(k)$.) Und zwar ist die zugelassene Klasse von Funktionen die der stückweise glatten integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Eine Funktion heißt auf $\mathbb{R}$ stückweise glatt, wenn jedes beschränkte Intervall aus $\mathbb{R}$ so in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden kann, dass die Funktion in jedem dieser Intervalle stetig differenzierbar ist und die Randwerte der Ableitungen vorhanden sind. Für solche Funktionen gilt der

Satz 2 : Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und stückweise glatt. Dann gilt für jedes x

$$\frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk. \tag{2.4}$$

In allen Stetigkeitspunkten von f ist der obige Ausdruck einfach gleich $f(x)$.

Zur Auffassung des Integrals als Cauchyscher Hauptwert:
Ein gewöhnliches uneigentliches Integral ist durch

$$\lim_{A,B\to\infty} \int_{-A}^{B} g(x)dx$$

erklärt, wobei die beiden Grenzübergänge unabhängig voneinander durchzuführen sind.

Da an den Sprungstellen von f das CH-Integral im Satz 2 unabhängig von der Festsetzung des Wertes von f an solchen Stellen immer gegen den Mittelwert der beiden einseitigen Grenzwerte konvergiert, kann man von der Rückgewinnung von f aus $\tilde{f}$ durch (2.4) nur sprechen, wenn man die Gleichheit von Funktionen weiter fasst. Dies ist die Gleichheit fast überall (f. ü.): Zwei Funktionen heißen f. ü. gleich, wenn sie nur auf einer Menge vom Maße Null voneinander verschieden sind; dies sind insbesondere alle abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$. Mit dieser Gleichheitsfestsetzung kann man als Folgerung aus Satz 2 feststellen : Unter seinen Voraussetzungen muss f fast überall mit einer stetigen Funktion übereinstimmen.

Zur Erläuterung des nach Satz 2 zum Cauchyschen Hauptwert Gesagten betrachten wir folgendes
Beispiel: $f(x)$ sei wie in Sk. S. 62 gewählt, aber im Hinblick auf die gerade besprochene fehlende Sinnhaftigkeit von Festlegungen der Funktion in einzelnen Punkten ohne irgendeine Verfügung über seine Werte in $|x| = 1$. $\tilde{f}$ ist a.a.O. bestimmt. Die Rücktransformation der nicht absolut integrierbaren Funktion $(2/\sqrt{2\pi}) \sin k/k$ nach Satz 2 ergibt:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin k}{k} e^{ixk} dk = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{1}{k}(e^{ik} - e^{-ik}) e^{ixk} dk =$$
$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} [\frac{e^{i(x+1)k}}{k} - \frac{e^{i(x-1)k}}{k}] dk. \tag{2.5}$$

Dieses Integral werde an einer Sprungstelle von f untersucht, z.B. für $x = 1$. Wenn man es zur Verdeutlichung der Verhältnisse zunächst einmal nicht als CH-Integral auffasst, sondern als gewöhnliches uneigentliches Integral, dann erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A,B\to\infty} \int_{-A}^{B} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \Big|_{x=1} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A,B\to\infty} \int_{-A}^{B} \frac{e^{i2k} - 1}{k} dk =$$
$$\frac{1}{2\pi} \lim_{A,B\to\infty} \int_{-A}^{B} \frac{\sin(2k)}{k} dk + \frac{1}{2\pi i} \lim_{A,B\to\infty} \int_{-A}^{B} \frac{\cos(2k) - 1}{k} dk \tag{2.6}$$

Es werden beide Integrale für sich betrachtet. Zum ersten ist zu bemerken, dass das uneigentliche Riemann-Integral über jede Halbachse existiert; es ist

$$\lim_{B\to\infty} \int_{0}^{B} \frac{\sin(s)}{s} ds = \frac{\pi}{2} \tag{2.7}$$

(S. ein mathem. Handbuch, z.B. Bronstein/Semendjajev/Musiol/Mühlig : S. 694f.; oder Königsberger: Analysis 1, 16.3) Wegen der Geradheit des Integranden ergibt der erste Summand in (2.6) also 1/2. Der Integrand des zweiten Integrals ist für $k \to 0$ beschränkt, da $\cos(2k) \; -1 \sim -2k^2$ ist. Jedoch gilt $-2 \leq \cos(2k) - 1 \leq 0$ und es heben einander im $\int_0^A$ nicht positive und negative Beiträge des Integranden weg. Das gewöhnliche uneigentliche Integral

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\cos 2k - 1}{k} \; dk$$

divergiert. Da jedoch der Integrand ungerade ist, gilt für alle $A > 0$

$$\int_{-A}^{A} \frac{\cos 2k - 1}{k} \; dk = 0. \tag{2.8}$$

Die Auffassung von (2.4) als CH-Integral ist also schon im Beispiel dieser einfachen Funktion mit kompaktem Träger notwendig, wenn man f auch in seinen Unstetigkeitspunkten rückgewinnen will. Man erhält dann zusammengefasst, dem Satz entsprechend, $f(1) = \frac{1}{2}$.

4) Fouriertransformation und Ableitung

Satz 3 : Es sei f auf $\mathbb{R}$ stetig und stückweise glatt. Ferner sei $f \in L^1, f' \in L^1$. Dann gilt

$$(\mathcal{F}f')(k) = ik \cdot (\mathcal{F}f)(k) \tag{2.9}$$

Beweis :
a) Sei $k \neq 0$. Produktintegration ergibt

$$\int_{-A}^{B} f(x)e^{-ikx}dx = f(x)\frac{e^{-ikx}}{-ik}\Bigg|_{x=-A}^{x=B} - \frac{1}{-ik}\int_{-A}^{B} f'(x)e^{-ikx}dx \tag{2.10}$$

Für $k \neq 0$ trifft die Behauptung zu, wenn man zeigen kann, dass $\lim_{B\to\infty} f(B) = 0$, $\lim_{A\to\infty} f(-A) = 0$ ist. Der Beweis erfolgt durch Widerspruch.
$\lim_{B\to\infty} f(B) = 0$ bedeutet : $\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{B_o} |f(B)| < \epsilon$ für $B > B_o$. Es wird angenommen, dass diese Voraussetzung nicht erfüllt sei. Dann muss f im Unendlichen gar keinen Grenzwert haben. Es gilt dann aber auf jeden Fall : Es gibt nicht zu jedem $\epsilon > 0$ ein B_o, so dass $\bigwedge_{B>B_o} |f(B)| < \epsilon$ ist. Es gibt also ein ϵ, so dass es beliebig große x gibt, für die $|f(x)| > \epsilon$ ist. Man wählt ein solches x_o so, dass

$$|f(x_o)| \; > \epsilon \quad \text{und} \qquad \int_{x_o}^{\infty} |f'(x)|dx < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.11}$$

gilt. Die zweite Ungleichung ist wegen $f' \in L^1$ immer erreichbar. Auf das die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllende f ist der (erweiterte) Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung anwendbar: $f(x) - f(x_o) = \int_{x_o}^{x} f'(s)ds$. Daraus folgt

$$|f(x) - f(x_o)| = \left|\int_{x_o}^{x} f'(s)ds\right| \leq \int_{x_o}^{x} |f'(s)|ds < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.12}$$

und wegen $|f(x_o)| > \epsilon$ ist $|f(x)| > \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \geq x_0$. Dies widerspricht $f \in L^1$. Also muss $\lim_{B\to\infty} \; f(B) = 0$ sein. Entsprechend zeigt man $\lim_{A\to\infty} \; f(-A) = 0$.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass aus der alleinigen Voraussetzung $f \in L^1$ *nicht* $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ folgt. Eine nur integrierbare Funktion muss im Unendlichen gar keinen

Grenzwert haben und kann sogar unbeschränkt sein. Für ein Beispiel siehe z. B. Fischer; Kaul: M für Φer, Bd 1, §12:5.2; 3. Aufl.: S. 262 .

b) Sei $k = 0$. Dann ist zu zeigen :

$$(\mathcal{F}f')(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)dx = 0 \tag{2.13}$$

Das folgt aber aus $\int_A^B f'(x)dx = f(B) - f(A)$ und dem unter a) Bewiesenen.

Für die Fouriertransformation höherer Ableitungen gilt ein entsprechender

Satz 4: Es sei f $(r-1)$ mal stetig differenzierbar und $f^{(r-1)}$ stückweise glatt. Ferner seien f und $f^{(l)}$ für $1 \leq l \leq r$ aus L^1. Dann gilt

$$(\mathcal{F}f^{(r)})(k) = (ik)^r (\mathcal{F}f)(k) \tag{2.14}$$

Beweis : Durch Induktion nach r.

Ähnlich wie den Satz 3 kann man auch zeigen :
Satz 5 : Es sei f stückweise stetig und $f \in L^1, x \cdot f \in L^1$. Dann ist $\tilde{f}(k)$ nach k differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dk}\tilde{f}(k) \;=\; (\mathcal{F}(-ixf))(k) \tag{2.15}$$

Eine Anwendung dieser Sätze ist die Integraldarstellung von Lösungen geeigneter inhomogener linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, s. Sk, S. 77f. Dies ist eine Kostprobe eines Verfahrens, das im dritten Kapitel auf gewisse partielle Differenzialgleichungen angewandt werden wird.

Beispiel: Gesucht ist die Fouriertransformierte $h(s)$ von $u = \exp(-\frac{t^2}{2})$, für welches die Differenzialgleichung

$$u' + tu = \; u' + i(-it)u = 0$$

gilt. Die Fouriertransformation der ganzen Gleichung ergibt nach den vorangehenden Sätzen für h dieselbe Gleichung :

$$ish(s) + ih'(s) = 0 \quad \text{oder} \quad h'(s) + sh(s) = 0,$$

also $h(s) = C\exp(-\frac{s^2}{2})$. Nun gilt ganz allgemein

$$\tilde{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)dx;$$

so dass sich wegen $\int u(t)dt = \sqrt{2\pi}$ (Sk S. 67) die Integrationskonstante zu $C = h(0) = \tilde{u}(0) = 1$ bestimmt. Es ist also $h(s) = \exp(-\frac{s^2}{2})$, $u(t)$ wird somit durch die $\mathcal{F}$-Transformation in sich übergeführt.

5) Die $\mathcal{F}$-Transformation in mehreren Veränderlichen

Es seien $x, y, k \in \mathbb{R}^n$, das Volumselement der Integration werde mit dm bezeichnet; falls das Auftreten mehrerer Veränderlichensätze eine Unterscheidung erfordert, wird es mit dm_x, dm_y

usw. bezeichnet. In unmittelbarer Verallgemeinerung der Definition am Anfang dieses Abschnitts setzt man fest

$$(\mathcal{F}f)(k) := \tilde{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x)e^{-i(k,x)}dm \tag{2.16}$$

Auch hier gilt für $\tilde{f}(k)$ wieder das Lemma von Riemann-Lebesgue.

Für $f, \tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt ebenfalls ein Umkehr-
Satz 1a:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \tilde{f}(k)e^{i(k,x)}dm \tag{2.17}$$

Ein Beweis diese Satzes wird am Ende von Abs. C. 4) nachgetragen. Er stützt sich auf eine später mehrfach verwendetete Beziehung von ansprechender Symmetrie, die

Wälzformel:

$$\int \tilde{f}g\ dm_y = \int f\tilde{g}\ dm_x \tag{2.18}$$

Zum Beweis: Aus den Sätzen über die Auftrennbarkeit und Vertauschbarkeit von uneigentlichen Integralen über den $\mathbb{R}^l$ erhält man als einen Sonderfall folgendes

Lemma: (Fischer; Kaul: M für Φer, Bd 1, §23:6.3; Walter: Analysis 2, S. 243f)
Es sei $u(x,y)$ auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ stetig und es gelte $|u(x,y)| \ \leq |g(x)| \cdot |h(y)|$ mit stetigen Funktionen $g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $u \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$, und es gilt die folgende Auftrennbarkeit mit Vertauschbarkeit der einzelnen Integrationen:

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} u(x,y)dm_x dm_y = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x,y)dm_x \right) dm_y = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x,y)dm_y \right) dm_x \tag{2.19}$$

Beweis der Wälzformel: Da nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ stetig und beschränkt sind, ist $\tilde{f}g \in L^1$ und $f\tilde{g} \in L^1$, so dass die beiden Integrale in der Formel existieren. Für den ausgeschriebenen Integranden des in der Wälzformel steckenden Doppelintegrals ist durch $|f(x)g(y)e^{-i(x,y)}| \ \leq |f(x)| \cdot |g(y)|$ die Voraussetzung des Lemmas erfüllt.Also ist die Rechnung

$$(2\pi)^{n/2} \int \tilde{f}g dm_y = \int g(y) (\int f(x)e^{-i(x,y)}dm_x)dm_y =$$
$$\int f(x) (\int g(y)e^{-i(x,y)}dm_y)dm_x = (2\pi)^{n/2} \int f\tilde{g}dm_x$$

zulässig, die die Formel beweist.

Für das Verhältnis zwischen $\mathcal{F}$-Trafo und Ableitung gilt hier in Verallgemeinerung von Satz 4 ein
Satz 4a:
Es seien $f \in C^r(\mathbb{R}^n)$ und $D^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \leq r$. Dann gilt

$$(\mathcal{F}(D^\alpha f))(k) = (ik)^\alpha (\mathcal{F}f)(k) \tag{2.20}$$

Der Beweis erfolgt ähnlich wie der von Satz 4. Ebenso gilt ein
Satz 5a:
Es seien für $|\alpha| \ \leq r \ \ x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\tilde{f} \in C^r(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\mathcal{F}((-ix)^\alpha f)(k) = D^\alpha \tilde{f}(k) \tag{2.21}$$

$\tilde{f}$ fällt also im Unendlichen umso stärker ab, je höhere Ableitungen von f integrierbar sind, und umgekehrt ist $\tilde{f}$ umso glatter, je höhere Momente von f existieren. (S.a. M f.Φer 2, §12:2.2)

B. $\mathcal{F}$-Transformation und $\mathcal{D}'$

Um die Fouriertransformation von $f \in L^1_{loc}$ aber $f \notin L^1$ zu erklären, liegt es nahe, f als vF T_f in $\mathcal{D}'$ aufzufassen und dann die $\mathcal{F}$-Transformation in $\mathcal{D}'$ einzuführen. Der bisher für verschiedene Rechenoperationen gewählte Weg, nämlich die Überwälzung einer gleichartigen Operation auf $\mathcal{D}$, ist in diesem Falle aber nicht gangbar,weil $\mathcal{F}(\mathcal{D}) \not\subset \mathcal{D}$ ist; es ist sogar$\mathcal{F}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \{0\}$, weswegen $< T, \mathcal{F}(\varphi) >$ im Allgemeinen keinen Sinn hat.

Der Versuch eines Auswegs aus dieser Lage ist in Sk, S. 64 beschrieben. Die dort gebrachte Definition hat insofern Wunschcharakter, als keine allgemein gültigen Voraussetzungen angegeben werden können, unter denen die $\mathcal{F}$-Transformation einer Funktion im Sinne von vF existiert. Man muss dies also in jedem Einzelfall prüfen. Die in der oa. Def. ausgedrückte Auffassung der $\mathcal{F}$-Transformation ist eine Art Brücke zwischen der klassischen $\mathcal{F}$-Transformation von Funktionen und der verallgemeinerten $\mathcal{F}$-Transformation von vF, da gewöhnliche Funktionen in vF abgebildet werden. In der Def. werden offensichtlich nur Funktionen f zugelassen, für die $e^{-\epsilon x^2} f(x) \in L^1$ für $\epsilon > 0$ gilt, also liegen alle Funktionen in dieser Klasse, die im Unendlichen höchstens wie eine Potenz ansteigen. Der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ der $\mathcal{F}$-Transformierten von $e^{-\epsilon x^2} f(x)$ ist im Sinne von vF zu verstehen.

Ein Beispiel : $\mathcal{F}(T_1)$
Für $f(x) \equiv 1$ gilt offensichtlich $f \in L^1_{loc}$, aber $f \notin L^1$. Also erzeugt f zwar eine reguläre vF T_1, aber $\mathcal{F}(1)$ ist als Funktion nicht vorhanden. Versucht man als Ausweg, im o.a. Sinne vorzugehen, ist also nach Sk, S. 64 o. der folgende Ausdruck zu untersuchen:

$$\tilde{f}(k) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - \epsilon x^2} dx \tag{2.22}$$

Es sei

$$\tilde{f}_\epsilon(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx - \epsilon x^2} dx \tag{2.23}$$

Mit $t^2/2 := \epsilon x^2$, also $x = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} t$, und $s := \frac{k}{\sqrt{2\epsilon}}$, somit also $kx = \frac{k}{\sqrt{2\epsilon}} t = st$, wird $\tilde{f}_\epsilon(k)$ zu

$$\tilde{f}_\epsilon(k(s)) = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} h(s), \qquad h(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its - \frac{t^2}{2}} dt \tag{2.24}$$

Nach dem Beispiel am Ende von Abs. A.4) ist $h(s) = \exp(-s^2/2)$ und damit

$$\tilde{f}_\epsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} e^{-\frac{k^2}{4\epsilon}} = \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{k^2}{4\epsilon}} \tag{2.25}$$

Die Funktionenschar $\tilde{f}_\epsilon(k)$ ist demnach gleich $\sqrt{2\pi}$ mal der in Sk S. 45 u. vorgestellten δ-Schar. Der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ hat in diesem Beispiel also nur einen Sinn, wenn man ihn im Sinne von vF auffasst, also alle bisher aufgetretenen Funktionen von k noch als über eine beliebige Grundfunktion integriert betrachtet. In diesem Sinne gilt $\mathcal{F}(1) = \sqrt{2\pi}\delta$.

Erweiterungen des Gültigkeitsbereichs speziell der Beziehung (10) aus Sk, S. 68

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int \tilde{f}_\epsilon(k) \Phi(k) dk = \Phi(0)$$

auf größere Funktionenklassen als $\mathcal{D}$ sind für manche Anwendungen interessant, deswegen soll auch hier eine solche erweiterte Gültigkeit behandelt werden. Abweichend von Sk S. 68

u. ff wird hier dafür eine etwas speziellere Klasse von Funktionen gewählt, die aber immer noch wesentlich allgemeiner ist als $\mathcal{D}$, nämlich die Menge aller im Nullpunkt stetigen, auf $\mathbb{R}$ beschränkten Funktionen. Diese Klasse ist für fast alle Anwendungen allgemein genug. Wir gehen zunächst nach Sk S. 69 o. Hälfte vor. Die Abschätzung des letzten Ausdrucks in der zweiten Zeile des Formelblocks vereinfacht sich hier, wenn man beim Übergang vom linken zum rechten Ausdruck auf $t := \frac{k}{\sqrt{4\epsilon}}$ übergeht :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k^2/4\epsilon}}{\sqrt{4\pi\epsilon}} [\Phi(k) - \Phi(0)]\, dk = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} [\Phi(2\sqrt{\epsilon}t) - \Phi(0)]\, dt \tag{2.26}$$

Nach Voraussetzung ist $|\Phi(k)| \leq C$. Also ist der Integrand betragsmäßig durch $2Ce^{-t^2}$ beschränkt und daher aus L^1. Außerdem konvergiert er wegen der Stetigkeit von Φ in $k = 0$ für $\epsilon \to 0$ gegen 0. Daher verschwindet auch der Grenzwert des Integrals in diesem Limes.

C. Verallgemeinerte Funktionen schwachen Wachstums und $\mathcal{F}$-Transformation

Eine in sich geschlossene Theorie der $\mathcal{F}$-Transformation von vF erfordert die Verwendung eines Raumes von Grundfunktionen, der gegenüber $\mathcal{F}$ invariant ist, damit man die $\mathcal{F}$-Transformation des zugehörigen Dualraumes genau so allgemeingültig durch Überwälzung erklären kann, wie dies für die anderen, in Kap. I eingeführten Rechenvorschriften und Umformungen von vF möglich war. Die einleitenden Feststellungen von II.B aufgreifend erfordert dies offensichtlich, statt $\mathcal{D}$ einen anderen Grundraum zu wählen; dies wird der im Folgenden vorgestellte Grundraum $\mathcal{S}$ sein. Hat man auf $\mathcal{S}$ die Konvergenz von Funktionenfolgen gegen eine Grenzfunktion so erklärt, dass sie auf natürliche Weise zu $\mathcal{S}$ passt, dann kann man vF auf $\mathcal{S}$ genau so wie auf $\mathcal{D}$ als lineare, stetige Funktionale erklären. Der von ihnen gebildete lineare Raum wird mit $\mathcal{S}'$ bezeichnet. Die $\mathcal{F}$-Transformation auf $\mathcal{S}'$ lässt sich dann genau wie vorhin angegeben einführen.

1) **Der Grundraum $\mathcal{S}$**

Def.: Für eine komplexwertige Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ bedeutet

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| \tag{2.27}$$

Def.: Die komplexwertige Funktion $\varphi(x)$ gehört zu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, wenn $\varphi \in C^\infty$ und φ samt allen Ableitungen $D^\alpha\varphi$ (α :Mehrfachindex) für $|x| \to \infty$ stärker gegen Null geht als jede Potenz von $|x|^{-1}$. Eine Grundfunktion erfüllt also $\bigwedge_{\alpha,\beta} \|x^\beta D^\alpha \varphi(x)\|_\infty < \infty$.

Def.: Eine Folge von Grundfunktionen φ_l aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, kurz : $\varphi_l \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, wenn für alle Mehrfachindizes α, β

$$\lim_{l\to\infty} \|x^\beta D^\alpha(\varphi(x)_l - \varphi(x))\|_\infty = 0 \tag{2.28}$$

ist. $\mathcal{S}$ ist offensichtlich ein linearer Raum, und es gilt $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$. Das Beispiel $e^{-x^2} \in \mathcal{S}, e^{-x^2} \notin \mathcal{D}$ zeigt $\mathcal{D} \neq \mathcal{S}$. Aus der Konvergenz einer Folge in $\mathcal{D}$ folgt ihre Konvergenz in $\mathcal{S}$.

Nach der Definition von $\mathcal{S}$ ist für jedes $\gamma \in \mathbb{N}_o^n$ mit φ auch $D^\gamma\varphi \in \mathcal{S}$. Aus $x^\beta D^\alpha(D^\gamma\varphi_l(x) - D^\gamma\varphi(x)) = x^\beta D^{\alpha+\gamma}(\varphi_l(x) - \varphi(x))$ folgt die Stetigkeit aller Abbildungen $D^\gamma : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Genau so folgt die Stetigkeit aller Abbildungen $x^\gamma : \varphi(x) \mapsto x^\gamma \varphi(x)$ auf $\mathcal{S}$.

2) <u>Der Raum $\mathcal{S}'$ der verallgemeinerten Funktionen schwachen Wachstums</u>

Da in $\mathcal{S}$ die Konvergenz von Folgen erklärt wurde, ist die folgende Definition sinnvoll :

Def.: Der lineare Raum $\mathcal{S}'$ der vF schwachen Wachstums.
Unter einer vF aus $\mathcal{S}'$, auch vF schwachen Wachstums oder temperierte Distribution genannt, versteht man ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}'$ ist, wie jede Menge aller linearen Funktionale auf einem linearen Raum, selbst auch wieder ein solcher.

Die für jene Anwendungen, die wir im Auge haben, wichtigsten *regulären* vF aus $\mathcal{S}'$ sind von folgender Art :

Bsp.: Sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ferner gelte für ein gewisses $s \geq 0$

$$\int |f(x)| \, (1+|x|)^{-s} dm < \infty.$$

Dann definiert f eine reguläre verallgemeinerte Funktion aus $\mathcal{S}'$ durch

$$(T_f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x) dm \tag{2.29}$$

Der Beweis erfolgt ähnlich wie für $\mathcal{D}$. Die Bedingung für f wird gefordert, weil die $\varphi \in \mathcal{S}$ im Allgemeinen keinen kompakten Träger haben und ein ungezähmt anwachsendes $f \in L^1_{loc}$ nicht notwendig konvergente Integrale erzeugen würde. Die Bedingung ist jedoch nur hinreichend, aber nicht notwendig; es gibt auch T_f-erzeugende Funktionen f, die im Unendlichen stärker als jedes Polynom anwachsen, z.B. $(\cos(e^x))' \ = -e^x \sin(e^x)$. (Wladimirow, S. 112)

Die Rechenregeln für vF aus $\mathcal{S}'$ werden, ausgehend vom Beispiel der regulären T_f, genau so festgesetzt wie für $T \in \mathcal{D}'$.

a) Die Multiplikation mit einer Funktion $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
Hier muss man wegen der fehlenden Kompaktheit des Trägers von $\varphi \in \mathcal{S}$ verlangen, dass $a(x)$ samt allen Ableitungen im Unendlichen nicht stärker anwächst als eine Potenz von x, die von der Ordnung der Ableitung abhängen darf. Man verlangt also, dass es zu jedem Mehrfachindex α zwei Konstanten $c > 0$ und $s > 0$ gibt, so dass $|D^\alpha a(x)| \ \leq c(1+|x|)^s$ gilt.

<u>Anm.:</u> Die Voraussetzung $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wird im allgemeinen Falle gemacht, um für beliebige, nicht notwendig reguläre vF die Multiplikation auf φ überwälzen zu können. Falls ein reguläres T_f vorliegt, kann man die Multiplikation mit einer Funktion g als $T_{g \cdot f}$ erklären, sofern $g \cdot f$ noch die Wachstumsvoraussetzungen für die Erzeugung einer regulären vF erfüllt. Ist z.B. f eine stetige, beschränkte Funktion und $g \in L^1_{loc}$, dann ist auch $g \cdot f \in L^1_{loc}$, und man kann $g \cdot T_f$ als $T_{g \cdot f} = T_{f \cdot g} = f \cdot T_g$ auffassen. (Vgl. Blanchard/Brüning, S. 49, Bmk. b).)

b) Die Ableitung
Sie wird genau so erklärt wie in $\mathcal{D}'$:

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi > \tag{2.30}$$

Wegen der Linearität und Stetigkeit (s. Ende von 1) von D^α auf $\mathcal{S}$ ist $D^\alpha T \in \mathcal{S}'$.

c) Konvergenz in $\mathcal{S}'$
Auch sie wird formal genau so erklärt wie in $\mathcal{D}'$:

$$T_l \xrightarrow{\mathcal{S}'} T :\Longleftrightarrow \bigwedge_{\varphi \in \mathcal{S}} < T_l, \varphi > \longrightarrow < T, \varphi > \tag{2.31}$$

3) **Die $\mathcal{F}$-Transformation auf $\mathcal{S}$, $\mathcal{F}$ und Ableitungen**

Da $\varphi \in \mathcal{S} \subset L^1$ gilt, aber auch $x^\beta D^\alpha \varphi \in \mathcal{S} \subset L^1$, ist zunächst einmal die $\mathcal{F}$-Transformierte

$$\mathcal{F}(\varphi)(k) =:= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i(k,x)} dm_x \tag{2.32}$$

definiert und stetig; das uneigentliche Integral konvergiert absolut. Wegen der vorangehenden Bemerkung konvergieren aber auch die Integrale, die durch $\mathcal{F}(x^\beta D^\alpha \varphi)(k)$ gegeben sind, absolut für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_o^n$. Deswegen darf man $\mathcal{F}(\varphi)$ unter dem Integralzeichen beliebig oft ableiten, und es gilt für alle $\beta \in \mathbb{N}_o^n$

$$D^\beta \mathcal{F}(\varphi)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (-ix)^\beta \varphi(x) e^{-i(k,x)} dm = \mathcal{F}[(-ix)^\beta \varphi](k) \quad . \tag{2.33}$$

Also gilt $\mathcal{F}(\varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Da für alle $\alpha \in \mathbb{N}_o^n$ $\quad (ix)^\beta D^\alpha \varphi$ dieselben Eigenschaften hat wie $(ix)^\beta \varphi$, gilt andererseits auch die Beziehung

$$\mathcal{F}(D_x^\alpha \varphi)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (D_x^\alpha \varphi) e^{-i(k,x)} dm = (ik)^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(k) \quad , \tag{2.34}$$

die durch mehrfaches Produktintegrieren folgt. Sie sei beispielhaft für eine einzige Ableitung nachgewiesen : Sei $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \in \mathbb{R}, x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

$$\mathcal{F}(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1})(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i(k,x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dm = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(k',x')} \left(\int e^{-ik_1 x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x') dx_1 \right) dm'$$

Das innere Integral kann man wegen des Verschwindens der Randterme ($\varphi \in \mathcal{S}$) durch partielle Integration umformen in

$$- \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_1, x')(-ik_1) e^{-ik_1 x_1} dx_1 \quad .$$

Setzt man dies in den obigen Ausdruck ein, erhält man

$$\mathcal{F}(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1})(k) = ik_1 \mathcal{F}(\varphi)(k) \tag{2.35}$$

(2.34) erhält man, indem man mit jeder in D_x^α stehenden Ableitung genau so verfährt wie mit ∂_{x_1} bei der Herleitung von (2.35). (2.34) ist ein Sonderfall von Satz 4a in Abs. A für $\varphi \in \mathcal{S}$. Es wurde in diesem Rahmen noch einmal gebracht, da insbesondere von der Zugehörigkeit beider Seiten von (2.34) zu $\mathcal{S}$ noch ausdrücklich Gebrauch gemacht werden wird und die obige Ableitung auch als erstes Beispiel für das Arbeiten in $\mathcal{S}$ dient.

Aus (2.33) und (2.34) folgt
Satz 5 :

$$k^\alpha D^\beta \mathcal{F}(\varphi)(k) = (-i)^{|\alpha| \ +|\beta|} \mathcal{F}[D^\alpha (x^\beta \varphi)](k) \quad . \tag{2.36}$$

Da auch $D^\alpha(x^\beta \varphi) \in \mathcal{S} \subset L^1$, ist die linke Seite für alle α, β stetig und beschränkt. Das heißt aber, dass auch $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}$ ist: $\mathcal{S}$ ist gegenüber $\mathcal{F}$ invariant. Das Beispiel am Ende von Abs. A fügt sich auch hier ein, weil $u \in \mathcal{S}$ ist und jetzt nicht überrascht, dass dann auch $h(s) = \mathcal{F}(u)(s) \in \mathcal{S}$ sein muss.

Die Stetigkeit von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}$ (nach Walter: Distributionen, S. 171):
Es sei c in $P(x) = c(1+|x|^2)^k > 0$, ($k \in \mathbb{N}$ fest) so gewählt, dass $\int \frac{1}{P(x)}\, dm = (2\pi)^{n/2}$ ist. Es gilt natürlich $\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow P\varphi \in \mathcal{S}$. Nun ist $|\varphi(x)| \; = \frac{|\varphi(x)P(x)|}{P(x)} \leq \frac{1}{P(x)}\|P\varphi\|_\infty$, woraus durch Integration und Umlegung der Abschätzung (2.2) auf den mehrdimensionalen Fall (2.16) folgt:

$$\|\mathcal{F}(\varphi)\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|P\varphi\|_\infty \int \frac{1}{P(x)}\, dm = \|P\varphi\|_\infty \tag{2.37}$$

Es gelte nun $\varphi_l \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$. Den Bemerkungen am Ende von 1) zufolge folgt daraus mit $\psi_l^{\alpha,\beta} := D^\alpha(x^\beta\varphi_l)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_o^n$: $\psi_l^{\alpha,\beta} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$. Mit (2.36) und (2.37) erhält man dann

$$\bigwedge_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_o^n} \|k^\alpha D^\beta \mathcal{F}(\varphi_l)\|_\infty = \|\mathcal{F}(D^\alpha(x^\beta\varphi_l))\|_\infty \leq \|P\psi_l^{\alpha,\beta}\|_\infty \to 0 \tag{2.38}$$

$\mathcal{F}$ führt also konvergente Folgen in ebensolche über : $\mathcal{F}$ ist auf $\mathcal{S}$ stetig.

4) **Die Umkehrung von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S}$**

Satz 6 : Für $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt mit $\overline{\mathcal{F}}(\psi)(x) := \mathcal{F}(\psi)(-x)$

$$\varphi(x) = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(\varphi))(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \mathcal{F}(\varphi)(k) e^{i(k,x)} dm_k \tag{2.39}$$

Der Beweis soll der Einfachheit halber nur für $n = 1$ vorgeführt werden, er läßt sich auf n Veränderliche übertragen. Es wird eine Hilfsfunktion $\psi \in \mathcal{S}$ gewählt und das folgende Integral gebildet :

$$\int e^{ixk}\psi(k)\mathcal{F}(\varphi)(k)dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ixk}\psi(k)\left[\int \varphi(y)e^{-iyk}dy\right] dk \tag{2.40}$$

Wegen $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ darf man in (2.40) die Integrationsreihenfolge vertauschen und erhält

$$\begin{aligned}\int e^{ixk}\psi(k)\mathcal{F}(\varphi)(k)dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(y)\left[\int \psi(k)e^{-i(y-x)k}dk\right] dy &= \int \varphi(y)\mathcal{F}(\psi)(y-x)dy \\ &= \int \varphi(x+y')\mathcal{F}(\psi)(y')dy' \quad ,\end{aligned}$$

wobei bei der letzten Umformung $y' = y - x$ gesetzt wurde. Nach der Umbennennung von y' in y gilt also zusammengefasst

$$\int e^{ixk}\psi(k)\mathcal{F}(\varphi)(k)dk = \int \varphi(x+y)\mathcal{F}(\psi)(y)dy \tag{2.41}$$

Für $\epsilon > 0$ ist auch $\psi_\epsilon(t) := \psi(\epsilon t) \in \mathcal{S}$, nach den Rechenregeln (Sk S. 73 o.) gilt

$$\mathcal{F}(\psi_\epsilon)(y) = \frac{1}{\epsilon}\mathcal{F}(\psi)(\frac{y}{\epsilon}) \quad .$$

Verwendet man das in (2.41) und geht auf die Veränderliche $z := \frac{y}{\epsilon}$ über, erhält man

$$\int e^{ixk}\psi(\epsilon k)\mathcal{F}(\varphi)(k)dk = \frac{1}{\epsilon}\int \varphi(x+y)\mathcal{F}(\psi)(\frac{y}{\epsilon})dy = \int \varphi(x+\epsilon z)\mathcal{F}(\psi)(z)dz \tag{2.42}$$

Nun wird der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ durchgeführt. Wegen $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ sind die entsprechenden Sätze über Parameterintegrale anwendbar, weswegen der Grenzübergang mit der Integration vertauscht werden darf. Das ergibt

$$\psi(0) \int e^{ixk} \mathcal{F}(\varphi)(k) dk = \varphi(x) \int \mathcal{F}(\psi)(z) dz \tag{2.43}$$

Jetzt wird über das bisher freie ψ verfügt, indem

$$\psi(t) = \exp(-t^2/2) \quad \text{mit} \quad \psi(0) = 1$$

gewählt wird. Das Beispiel aus Abs. A ergab $\mathcal{F}(\psi)(y) = \exp(-y^2/2)$, $\int \exp(-y^2/2) dy = \sqrt{2\pi}$, und somit wird aus (2.43)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ixk} \mathcal{F}(\varphi)(k) dk = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(\varphi))(x) = \varphi(x) \quad . \tag{2.44}$$

(2.39) bedeutet , dass $\overline{\mathcal{F}}$ surjektiv ist. Es sei nun $(S\varphi)(x) := \varphi(-x)$ die Abbildung der Koordinatenspiegelung $S : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, die offensichtlich eine Involution ist: $S^2 = \mathbb{I}$. In Entsprechung zur Notiz von Sk, S. 61 berechnet man mit dem Übergang $y = -x$

$$(\mathcal{F} \circ S)(\varphi)(k) = \mathcal{F}(S\varphi)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(-x) e^{-i(k,x)} dm_x = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{i(k,y)} dm_y,$$

also $\mathcal{F} \circ S = \overline{\mathcal{F}}$. Dies bedeutet aber, dass auch $\mathcal{F}$ surjektiv ist. Die Stetigkeit von $\overline{\mathcal{F}}$ folgt genau so wie die von $\mathcal{F}$ selbst, da beide Abbildungen offensichtlich dieselben analytischen Eigenschaften haben. Mittels desselben Überganges $x \mapsto -x$ wie vorhin zeigt man $(S \circ \mathcal{F})(\varphi)(k) = \mathcal{F}(\varphi)(-k) = \overline{\mathcal{F}}(\varphi)(k)$. Beides zusammengefasst lautet

$$\mathcal{F} \circ S = \overline{\mathcal{F}} = S \circ \mathcal{F} \tag{2.45}$$

Als Abbildungsbeziehung geschrieben, lautet (2.39) mit (2.45)

$$\mathbb{I} = \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F} \tag{2.46}$$

Dies mit Hilfe der gerade erhaltenen Vertauschbarkeit von $\mathcal{F}$ und S weiter umgeformt, ergibt

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathbb{I} = \mathcal{F} \circ S \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ S = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} \tag{2.47}$$

Daraus folgt aber, dass $\mathcal{F}$ und $\overline{\mathcal{F}}$ Bijektionen sind, und dass $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$ gilt. $\mathcal{F}$ ist ein samt seiner Umkehrung stetiger Automorphismus von $\mathcal{S}$, also eine zusammen mit ihrer Umkehrung strukturtreue Selbstabbildung. (2.45) ist nun als $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ S$ zu lesen.

Schließlich ergibt (2.46) durch Iteration und wegen $S \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ S$

$$\mathcal{F}^4 = \mathbb{I} \tag{2.48}$$

Der Beweis des Umkehrsatzes für die $\mathcal{F}$-Transformation auf L^1 kann nun nachgeholt werden. Seien $f, \tilde{f} \in L^1$. Dann erhält man durch zweimaliges Anwenden der Wälzformel (2.18) und mit (2.47) für alle $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\int f\varphi \; dm = \int f \mathcal{F}(\mathcal{F} S\varphi) dm = \int \tilde{f} \mathcal{F}(S\varphi) dm = \int \mathcal{F}(\tilde{f}) S\varphi dm = \int \mathcal{F}^2 S f \varphi dm \quad .$$

Es gilt also für alle $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\int (f(x) - (\mathcal{F}^2 Sf)(x))\varphi(x)dm = 0 \quad . \tag{2.49}$$

Aus einer Variante des Satzes von du Bois-Reymond folgt daraus zunächst, dass f f.ü. mit $\mathcal{F}^2 Sf$ übereinstimmt, da aber $\mathcal{F}(\mathcal{F}Sf)$ nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue stetig ist, gilt die punktweise Gleichheit.

Die Parseval-Plancherelsche Gleichung:

Führt man auf $\mathcal{S}$ das vom (Hilbert-)Raum der quantenmechanischen Wellenfunktionen her bekannte Skalarprodukt

$$< \varphi, \psi >= \int \overline{\varphi}(x)\psi(x)dm \tag{2.50}$$

ein, so gilt für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$

$$< \varphi, \psi >=< \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} > \tag{2.51}$$

Beweis : Die Notiz in Sk, S.73 oben ergibt im Sonderfalle $a = -1, b = 0$ in unserer Bezeichnungsweise $\overline{(\mathcal{F}\varphi)} = (S\mathcal{F})(\overline{\varphi})$. Damit findet man

$$< \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} >= \int \overline{(\mathcal{F}\varphi)}(\mathcal{F}\psi)dm = \int (S\mathcal{F})(\overline{\varphi})(\mathcal{F}\psi)dm = \int (S^2\mathcal{F})(\overline{\varphi})(S\mathcal{F}\psi)dm = \int \mathcal{F}(\overline{\varphi})(S\mathcal{F})\psi)dm$$

In die daran anschließende Rechnung, die (2.51) beweist, gehen die Wälzformel (2.18) und die schon bekannte Beziehung $S\mathcal{F} = \mathcal{F}S$ sowie (2.47) ein :

$$< \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} >= \int \overline{\varphi}\mathcal{F}((S\mathcal{F})\psi))dm = \int \overline{\varphi}(\mathcal{F}^2 S)\psi)dm = \int \overline{\varphi}\psi dm =< \varphi, \psi >$$

5) $\mathcal{F}$ für verallgemeinerte Funktionen aus $\mathcal{S}'$ (Verallg. F. schwachen Wachstums)

a) Definition von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}'$

Sei zunächst $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist, wie schon in Abs. A. erwähnt, $\mathcal{F}(f)$ eine auf $\mathbb{R}^n$ stetige und beschränkte Funktion und erzeugt somit gemäß (2.29) ein Element $T_{\mathcal{F}(f)}$ aus $\mathcal{S}'$ vermöge

$$< T_{\mathcal{F}(f)}, \varphi >= \int (\mathcal{F}f)(y) \cdot \varphi(y)dm \quad . \tag{2.52}$$

Die Anwendung der Wälzformel (2.18) darauf ergibt

$$< T_{\mathcal{F}(f)}, \varphi >=< T_f, \mathcal{F}(\varphi) > \tag{2.53}$$

Nach bewährtem Muster betrachtet man nun (2.53) als Definition der $\mathcal{F}$-Transformation einer beliebigen vF $\in \mathcal{S}'$:

Definition :

$$< \mathcal{F}(T), \varphi >:=< T, \mathcal{F}(\varphi) > \tag{2.54}$$

so dass die Konsistenzbeziehung

$$\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}(f)} \tag{2.55}$$

besteht. Entsprechend trifft man weiters die

Definition : Die $\mathcal{F}$-Umkehrtransformation einer vF $\in \mathcal{S}'$ ist gegeben durch

$$< \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi > = < T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) > \tag{2.56}$$

Ruft man sich in Erinnerung, dass die Transformation der Koordinatenspiegelung einer vF als Sonderfall von (5) in „Begiffe aus der Lehre. . . " durch $< S(T), \varphi > = <$ „$T(-x)$", $\varphi(x) > = < T, S(\varphi) >$ gegeben ist, hat die folgende Aussage Sinn (vgl. 2.45):

Satz 7 : $\mathcal{F}^{-1}(T)$ ist die Umkehrtransformation von $\mathcal{F}(T)$ in $\mathcal{S}'$. Es gilt

$$\mathcal{F}^{-1}(T) = \mathcal{F}(S(T)) \tag{2.57}$$

Beweis :
i) $< \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(T)), \varphi > = < \mathcal{F}(T), \mathcal{F}^{-1}\varphi > = < T, \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)) > = < T, \varphi >$, ebenso für $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1})$, da $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}$ ein Isomorphismus ist.
ii) Zu (2.57) : Wegen $\mathcal{F}(S(\varphi)) = S(\mathcal{F}(\varphi))$ (2.45) gilt im vorletzten Gleichheitszeichen
$< \mathcal{F}(S(T)), \varphi > = < S(T), \mathcal{F}(\varphi) > = < S(T), \mathcal{F}(S^2(\varphi)) > = < S(T), S(\mathcal{F}S(\varphi)) > =$
$< T, \mathcal{F}(S\varphi)) > = < T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) > = < \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi >$
Bemerkung : (2.57) entspricht (2.45), und gleich wie dort folgt, dass $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}'$ ein Isomorphismus ist.

Beispiele :

i) $\mathcal{F}(\delta)$ für $\delta \in \mathcal{S}'$

$$< \mathcal{F}(\delta), \varphi > = < \delta, \mathcal{F}(\varphi) > = (\mathcal{F}(\varphi))(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \varphi(x) dm_x = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} < T_1, \varphi > \quad ,$$

also

$$\mathcal{F}(\delta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} T_1 \text{ „} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \text{"} \tag{2.58}$$

ii) $\mathcal{F}(T_1)$ („$= \mathcal{F}(1)$")
Nach (2.39) gilt

$$\varphi(0) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi))(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \mathcal{F}(\varphi)(k) dm_k = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} < T_1, \mathcal{F}(\varphi) >$$

Damit berechnet man

$$< \mathcal{F}(T_1), \varphi > = < T_1, \mathcal{F}(\varphi) > = (2\pi)^{n/2} \varphi(0) = < (2\pi)^{n/2} \delta, \varphi >$$

Zusammengefasst ist also

$$\mathcal{F}(T_1) \text{ „} = \mathcal{F}(1) \text{"} = (2\pi)^{n/2} \delta \tag{2.59}$$

Die bemerkenswerte Kürze des Beweises im Vergleich zu Behandlung in $\mathcal{D}'$ (Abs. B.) ist auf die Invarianz von $\mathcal{S}$ gegenüber der $\mathcal{F}$-Transformation zurückzuführen.

b) Eigenschaften von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S}'$
Satz 8 :

$$\text{i)} \qquad \mathcal{F}(D_k^\alpha T)(k) = (ik)^\alpha \mathcal{F}(T)(k) \tag{2.60}$$

$$\text{ii)} \qquad D_x^\alpha \mathcal{F}(T)(k) = \mathcal{F}[(-ix)^\alpha (T)](k) \tag{2.61}$$

Die Veränderlichen x und k in den Klammern sind hier symbolisch zu verstehen und nur zur Verdeutlichung der Wirkung der D^α-Operationen angeschrieben.

Beweis:
i)

$$< \mathcal{F}(D_x^\alpha T), \varphi > = < D_x^\alpha T, \mathcal{F}(\varphi) > = (-1)^{|\alpha|} < T, D_x^\alpha \mathcal{F}(\varphi) >$$
$$\stackrel{(2.33)}{=} (-1)^{|\alpha|} < T, \mathcal{F}((-ik)^\alpha \varphi) > = < \mathcal{F}(T), (ik)^\alpha \varphi) > = < (ik)^\alpha \mathcal{F}(T), \varphi >$$

ii)

$$< D_k^\alpha \mathcal{F}((T))(k), \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < \mathcal{F}(T), D_k^\alpha \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < T, \mathcal{F}(D_k^\alpha \varphi) > \stackrel{(2.34)}{=}$$
$$< T, (-ix)^\alpha \mathcal{F}(\varphi) > = < (-ix)^\alpha T, \mathcal{F}(\varphi) > = < \mathcal{F}((-ix)^\alpha T), \varphi >$$

Bemerkung : Da x^α und k^α C^∞-Funktionen von Potenz-Wachstum sind, ist die Multiplikation von $T \in \mathcal{S}'$ mit ihnen wohldefiniert.

6) **Die Faltung in $\mathcal{S}$**

i) Definition : Die Faltung $\varphi * \psi$ von $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ ist erklärt durch

$$(\varphi * \psi)(x) := \int \varphi(x-y)\psi(y) dm_y \tag{2.62}$$

Die Faltung ist eine kommutative Verknüpfung. Dies zeigt die folgende Rechnung mit dem Übergang auf $z = x - y$ als Integrationsveränderliche

$$(\varphi * \psi)(x) = \int \varphi(x-y)\psi(y) dm_y = \int \varphi(z)\psi(x-z) dm_z = (\psi * \varphi)(x) \tag{2.63}$$

Es gilt : $\varphi, \psi \in \mathcal{S} \Rightarrow \varphi * \psi \in L^1$.
Beweis :

$$\int |(\varphi * \psi)(x)| \, dm_x = \int \left| \int \varphi(x-y)\psi(y) dm_y \right| dm_x \le \int \left(\int |\varphi(x-y)\psi(y)| dm_y \right) dm_x =$$
$$\int |\psi(y)| (\int |\varphi(x-y)| dm_x) dm_y = \int |\psi(y)| dm_y \cdot \int |\varphi(z)| \, dm_z < \infty$$

Bemerkung : Der anspruchsvollste Schritt des Beweises ist die Vertauschung der Integrationsreihenfolge, die für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ problemlos ist. Man kann bei Verwendung der Lebesgue-Integrationstheorie diese Vertauschung auch schon rechtfertigen, wenn $\varphi, \psi \in L^1$ vorausgesetzt wird. Da der letzte Ausdruck in der Beweisrechnung gerade endlich ist, wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, folgt dann, dass die Faltung eine Verknüpfung innerhalb der L^1-Funktionen ist. Andererseits wird in Kürze gezeigt werden, dass aus $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ auch $\varphi * \psi \in \mathcal{S}$ folgt.

ii) Die Faltung in $\mathcal{S}$ und $\mathcal{F}$
Satz 9: Für $\varphi_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1, 2)$ gilt :

$$\text{a)} \quad \mathcal{F}(\varphi_1 * \varphi_2) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(\varphi_1)\mathcal{F}(\varphi_2) \tag{2.64}$$

$$\text{b)} \quad \mathcal{F}(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}(\varphi_1) * \mathcal{F}(\varphi_2) \tag{2.65}$$

Beweis :

a)
$$\mathcal{F}(\varphi_1 * \varphi_2)(k) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(k,x)} (\varphi_1 * \varphi_2)(x) dm_x =$$

$$(2\pi)^{-n/2}\int e^{-i(k,x)}\left(\int \varphi_1(x-y)\varphi_2(y)dm_y\right)dm_x =$$
$$(2\pi)^{-n/2}\int(\int e^{-i(k,x)}\varphi_1(x-y)\varphi_2(y)dm_x)dm_y =$$
$$\int e^{-i(k,y)}\mathcal{F}(\varphi_1)(k)\varphi_2(y)dm_y \quad = \quad (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}(\varphi_1)(k)\mathcal{F}(\varphi_2)(k)$$

Beim Übergang von der dritten auf die vierte Zeile wurde die Regel für die Vertauschung von $\mathcal{F}$-Transformation und inhomogen-linearer Transformation der unabhängig Veränderlichen (Sk, S.73) in der Sonderform $\mathcal{F}(\varphi(x-y))(k) = e^{-i(k,y)}\mathcal{F}(\varphi)(k)$ verwendet. (2.64) bedeutet eine wesentliche Verschärfung der dem Satz vorangehenden Behauptung : Während dort nur $\varphi_1 * \varphi_2 \in L^1$ und damit die Zugehörigkeit von $\mathcal{F}(\varphi_1 * \varphi_2)$ zu den stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen gezeigt wurde, was notwendig war, um der linken Seite von (2.64) überhaupt im Rahmen von gewöhnlichen Funktionen einen Sinn zu geben, folgt aus der Invarianz von $\mathcal{S}$ gegenüber $\mathcal{F}$ (Satz 5, Folgerung aus (2.36)) $\mathcal{F}(\varphi_1 * \varphi_2) \in \mathcal{S}$.
Bemerkung : Die (2.64) vorangehende Bemerkung aufgreifend sei angeführt, dass mit denselben Mitteln, wie dort erwähnt, gezeigt werden kann, dass (2.64) auch innerhalb von L^1 gilt.

b) Da (s. die Erläuterungen zu (2.47)) $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ Bijektionen (sogar stetige Isomorfismen) von $\mathcal{S}$ sind, gilt
$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi_1 * \varphi_2)) \in \mathcal{S}$, also $\varphi_1 * \varphi_2 \in \mathcal{S}$. Der für a) gegebene Beweis lässt sich auch mit der Funktion $e^{+i(k,x)}$ im Integranden durchführen und ergibt

$$\mathcal{F}^{-1}(\psi_1 * \psi_2) = (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}^{-1}(\psi_1)\cdot\mathcal{F}^{-1}(\psi_2) \tag{2.66}$$

Setzt man darin $\psi_i = \mathcal{F}(\varphi_i)$, folgt daraus $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi_1) * (\mathcal{F}\varphi_2)) = (2\pi)^{n/2}\varphi_1\cdot\varphi_2$ und daraus (2.65).

iii) Faltung und Ableitungen
Man rechnet nach

$$\mathcal{F}(D^\alpha(\varphi * \psi))(k) \overset{(2.34)}{=} (ik)^\alpha\mathcal{F}(\varphi * \psi))(k) \overset{(2.64)}{=} (2\pi)^{n/2}(ik)^\alpha\mathcal{F}(\varphi)(k)\cdot\mathcal{F}(\psi)(k) \tag{2.67}$$

Das Ergebnis dieser Rechnung kann man auf zwei Arten „rückübersetzen“:
Einerseits

$$(2\pi)^{n/2}[(ik)^\alpha\mathcal{F}(\varphi)(k)]\cdot\mathcal{F}(\psi)(k) \overset{(2.34)}{=} (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}(D^\alpha\varphi)(k)\cdot\mathcal{F}(\psi)(k) \overset{(2.64)}{=} \mathcal{F}[(D^\alpha\varphi) * \psi](k) \tag{2.68}$$

andererseits

$$(2\pi)^{n/2}\mathcal{F}(\varphi)(k)\cdot[(ik)^\alpha\mathcal{F}(\psi)(k)] = (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}(\varphi)(k)\cdot\mathcal{F}(D^\alpha\psi)(k) = \mathcal{F}[\varphi * (D^\alpha\psi)](k) \tag{2.69}$$

Wendet man nun auf die Gleichheit des ersten Ausdrucks in (2.67) mit den letzten Ausdrücken in (2.68) und (2.69) $\mathcal{F}^{-1}$ an, so folgt

$$D^\alpha(\varphi * \psi) = (D^\alpha\varphi) * \psi = \varphi * (D^\alpha\psi) \tag{2.70}$$

7) **Die Faltung $\mathcal{S}' \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$**

i) Ihre Definition
Sei $\varphi \in \mathcal{S}$, $f \in L^1$. Dann ist nach der Bemerkung zur Faltung nach (2.62) $f * \varphi \in L^1$. Die

Vertauschbarkeit (2.63) der Faltung bleibt offensichtlich auch in diesem Falle gültig. Man findet dann folgende Darstellung von $T_{f*\varphi}$, wobei wieder $(S\varphi)(x) = \varphi(-x)$ ist, :

$$
\begin{aligned}
< T_{f*\varphi}, \psi > = < T_{\varphi*f}, \psi > &= \int \left(\int \varphi(x-y) f(y) dm_y \right) \psi(x) dm_x = \qquad (2.71) \\
\int f(y) \left(\int \varphi(x-y)\psi(x) dm_x \right) dm_y &= \int f(y) \left(\int (S\varphi)(y-x)\psi(x) dm_x \right) dm_y = \\
\int f(y)((S\varphi) * \psi)(y) dm_y &= < T_f, (S\varphi) * \psi >
\end{aligned}
$$

Diese Rechnung gibt Anlass zu folgender
Definition : Die Faltung von $T \in \mathcal{S}'$ mit $\varphi \in \mathcal{S}$ ist die durch

$$< T * \varphi, \psi > := < T, (S\varphi) * \psi > \qquad (2.72)$$

gegebene vF$\in \mathcal{S}'$ mit der Konsistenzbeziehung $T_f * \varphi = T_{f*\varphi}$.

ii) Die Faltung $\mathcal{S}' \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ und $\mathcal{F}$
Die Multiplikation eines $T \in \mathcal{S}'$ mit einem $\varphi \in \mathcal{S}$ ist erklärt, da ja sogar polynomial beschränkte Funktionen im Produkt zugelassen sind. Daher sind beide im folgenden Satz auftretende Seiten sinnvoll.

Satz 10 : Sei $T \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}$. Dann gilt in Entsprechung zu (2.64)

$$\mathcal{F}(T * \varphi) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(T) \qquad (2.73)$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
< \mathcal{F}(T * \varphi), \psi > \stackrel{(2.54)}{=} < T * \varphi, \mathcal{F}(\psi) > \stackrel{(2.72)}{=} < T, (S\varphi) * \mathcal{F}(\psi) > = \\
< \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(T), (S\varphi) * \mathcal{F}(\psi) > \stackrel{(2.56)}{=} < \mathcal{F}(T), \mathcal{F}^{-1}((S\varphi) * \mathcal{F}(\psi)) > \stackrel{(2.66)}{=} \\
(2\pi)^{n/2} < \mathcal{F}(T), \mathcal{F}^{-1}(S\varphi) \cdot \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\psi)) > \stackrel{(2.45)}{=} (2\pi)^{n/2} < \mathcal{F}(T), \mathcal{F}(\varphi) \cdot \psi > = \\
(2\pi)^{n/2} < \mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}(T), \psi >
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Mit entsprechend größerem Beweisaufwand kann gezeigt werden, dass die in (2.71) definierte Faltung auch noch vF in $\mathcal{S}'$ ergibt, wenn man $\varphi \in L^1_o$, die L^1-Funktionen mit kompaktem Träger, zulässt. Es gilt auch noch in diesem Falle Satz (2.73).

Beispiel: Faltung mit δ
Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$.

$$\bigwedge_{\psi \in \mathcal{S}} < \delta * \varphi, \psi > = < \delta, (S\varphi) * \psi > = \int \varphi(y-x)\psi(y) dm_y|_{x=0} = \int \varphi(y)\psi(y) dm_y = < T_\varphi, \psi >$$

also

$$\delta * \varphi = T_\varphi \qquad (2.74)$$

Zur Überprüfung der Stimmigkeit der vorhin erhaltenen Ergebnisse mit den Festsetzungen wird der Faltungssatz (2.73) auf beide Seiten von (2.74) angewandt.
Anwendung auf die linke Seite:

$$\mathcal{F}(\delta * \varphi) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}(\delta) \stackrel{(2.58)}{=} \mathcal{F}(\varphi) T_1 = T_{\mathcal{F}(\varphi)}$$

Anwendung auf die rechte Seite:

$$< \mathcal{F}(T_\varphi), \psi > \overset{(2.54)}{=} < T_\varphi, \mathcal{F}(\psi) > \overset{(2.53)}{=} < T_{\mathcal{F}(\varphi)}, \psi >$$

Dies ist gerade die Konsistenzbeziehung (2.55) der Festsetzung der $\mathcal{F}$-Transformation in $\mathcal{S}'$. Der Faltungssatz ist also mit (2.74) und den früher getroffenen Festsetzungen verträglich. Das Beispiel ist eine Art Kontrollrechnung.

iii) Faltung $\mathcal{S}' \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ und Ableitungen

a) Man rechnet wie folgt

$$\begin{aligned} &< D^\alpha(T * \varphi), \psi >= (-1)^{|\alpha|} < T * \varphi, D^\alpha \psi >= (-1)^{|\alpha|} < T, (S\varphi) * D^\alpha \psi > \\ \overset{(2.70)}{=} &(-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha[(S\varphi) * \psi] >=< D^\alpha T, (S\varphi) * \psi >=< (D^\alpha T) * \varphi, \psi > \quad . \end{aligned}$$

Also gilt in $\mathcal{S}'$:

$$D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi \tag{2.75}$$

b) Wegen $((S\varphi) * \psi)(x) = \int \varphi(y - x)\psi(y)\, dm_y$ folgt

$$D^\alpha_x((S\varphi) * \psi)(x) = (-1)^{|\alpha|} \int (D^\alpha_y \varphi)(y - x)\psi(y)\, dm_y = (-1)^{|\alpha|}(S(D^\alpha \varphi) * \psi)(x)$$

und damit

$$\begin{aligned} < (D^\alpha T) * \varphi, \psi >=< D^\alpha T, (S\varphi) * \psi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha((S\varphi) * \psi) >= \\ < T, (S(D^\alpha \varphi) * \psi >=< T * D^\alpha \varphi, \psi > \end{aligned}$$

also in $\mathcal{S}'$

$$(D^\alpha T) * \varphi = T * D^\alpha \varphi \tag{2.76}$$