Ergänzung zu Sk., S. 4, 2.b), Ersatz von 2.c) (S. 5f)

Besonders bei Funktionen, die die Bedeutung der (z. B. räumlichen) Dichte einer Größe haben, ist die Angabe des Gesamtwertes der durch diese Dichtefunktion beschriebenen Größe, also das Integral dieser Funktion über ihren Definitionsbereich, eine Zahl von Interesse. Das Integral einer Funktion f über ihren Definitionsbereich $B \subset \mathbb{R}^n$, $\int_B f(x)dm$, weist jeder Funktion eine solche Zahl zu. Setzt man bei festgehaltenem B verschiedene Funktionen ein, so ist diese Abbildung, die jeder Dichtefunktion den Gesamtwert der durch sie beschriebenen Größe zuweist, eine Abbildung von reellwertigen Funktionen in die rellen Zahlen. Da das Integral im Integranden f linear ist, ist der Ausdruck $\int_B f(x)dm$ eine lineare Abbildung $I : f \mapsto \int_B f dm \in \mathbb{R}$ der Dichtefunktionen in die rellen Zahlen. Unter der Voraussetzung, dass jede Linearkombination zweier Dichtefunktionen wieder eine solche ist, bildet die Menge dieser Funktionen einen linearen Raum. Dann ist I also eine lineare Abbildung dieses reellen linearen Raumes in die rellen Zahlen. Ganz allgemein nennt man solche Abbildungen, die lineare Abbildungen eines Vektorraumes in den zugehörigen Zahlenkörper sind, **lineare Funktionale**.
Ein der Gesamtwertbildung verwandter Ausdruck ist der Mittelwert der durch f beschriebenen Größe, wie er in einer Dimension in Sk., S. 4u angegeben ist.

Zu einer Verallgemeinerung der Gesamtwertbildung gelangt man bei Vorliegen der folgenden Verhältnisse:
Es sei eine ortsabhängige Größe $u(x)$ gegeben, die einer anderen, durch eine Dichtefunktion $f(x)$ beschriebenen Größe, lässig gesprochen, in jedem Punkte verhältnisgleich ist: $u(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$. Ein Beispiel für eine solche Abhängigkeit wäre eine Metalllegierung von räumlich veränderlicher Zusammensetzung. Die spezifische Wärme ist dann eine (in sehr guter Näherung) temperaturunabhängige, aber örtlich veränderliche Funktion, und wenn sie auf das Volumen bezogen ist, eben eine Dichtefunktion $c(x)$. Ferner sei die Temperatur des Metalls ebenfalls eine ortsabhängige Funktion $T(x)$. Dann entsprechen also $c(x)$ und $T(x)$ den anfangs eingeführten allgemein bezeichneten Größen $f(x)$ und $\varphi(x)$ und $u(x) = c(x)T(x)$ ist hier die Wärme(energie)dichte. Der Wärmeinhalt eines kleinen Bereichs mit dem Inhalt δm ist dann gleich $u(x)\delta m$ und der gesamte Wärmeinhalt des Bereichs $B \subset \mathbb{R}^3$ ist $\int_B c(x)T(x)dm$. Von unserem Beispiel wieder auf die anfangs eingeführten allgemeinen Bezeichnungen übergehend, dreht es sich um die Betrachtung von Gesamtgrößen, die als mit der Dichtefunktion $f(x)$ gewichtete Mittelwerte von ortsabhängigen Größen $\varphi(x)$ der Art

$$T_f(\varphi) := \int_B f(x)\varphi(x)dm \tag{1}$$

dargestellt werden können. Bei gegebener ortsabhängiger Eigenschaft $\varphi(x)$ und Vorgabe einer festen Dichte $f(x)$ erhält man also als beobachteten Gesamtmesswert die obige Zahl. Man kann nun einerseits $\varphi(x)$, andererseits auch $f(x)$ als unterschiedlich wählbar betrachten, und zwar unter verschiedenen Blickwinkeln. Hält man f fest und setzt in (1) verschiedene φ ein, so ordnet (1) jedem φ eine Zahl zu, vermittelt also eine lineare Abildung aller zulässigen φ in die reellen Zahlen. Bilden die φ einen linearen Raum, ist T_f ein lineares Funktional.
Diese Sichtweise wird der zentrale Ausgangspunkt für die Entwicklung der Theorie der verallgemeinerten Funktionen sein.
Diese Gedanken fortspinnend wird man vermuten, dass bei Wahl eines genügend reichhaltigen Vorrats $\mathcal{V}$ an Funktionen φ aus der Kenntnis der durch (1) gegebenen linearen Abbildung $T_f : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$ f selbst (mehr oder weniger eindeutig) festgelegt ist.

Andererseits kann man die Frage stellen, wie man den örtlichen Verlauf von φ bestimmen kann, wenn man nur über die Kenntnis von Werten der Art (1), gebildet mit verschiedenen f, verfügt. Dabei muss dieser Verlauf genügend manierlich sein, um auf diese Weise aufgespürt werden zu können; man wird also φ zumindest als stetig voraussetzen müssen. Beachtet man, dass f eine Dichte ist, mit der die Werte von φ ortsabhängig gewichtet werden, liegt es nahe, in (1) Dichten einzusetzen, die sich bei gleichgehaltener Gesamtmenge der durch die Dichteverteilung beschriebenen Größe, also festem $\int f(x)dm$, immer mehr auf einen bestimmten Punkt x zusammenziehen, damit im Integral (1) in der Grenze nur die Werte von φ in einer immer kleiner werdenden Umgebung von x einen Beitrag dazu leisten, so dass man schließlich den Wert $\varphi(x)$ der ortsabhängigen Eigenschaft im Punkte x erhält. Dieses Vorhaben ist am leichtesten auszuführen, wenn man für die $f(x)$ eine Schar $f_\epsilon(x)$ von Funktionen wählt, die in einer ϵ-Kugel $K(x,\epsilon)$ um x einen konstanten positiven Wert haben und sonst verschwinden, wobei der positive Wert durch die Forderung festgelegt ist, dass ihr Integral über den ganzen Bereich gleich 1 ist. Damit erreicht man, dass die Integrale in (1) den Wert von φ in der Umgebung von x widerspiegeln und nicht Besonderheiten des Verlaufs der Dichtefunktion. Es wird nun der Einfachheit halber o. B. d. A. $x = 0$ gewählt und es sei $n = 3$. Man führt also folgende Funktionenschar $f_\epsilon(x)$ ein :

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} & \text{für } |x| < \epsilon \\ 0 & \text{für } |x| > \epsilon \end{cases} \tag{2}$$

Diese Schar hat für $x \neq 0$ in der Grenze $\epsilon \to 0$ den Grenzwert 0, während $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(0) = \infty$ ist. Das uneigentliche Integral über diese Grenzfunktion ist also 0. Jetzt wird der Grenzwert von (1), gebildet mit der Funktionenschar (2), untersucht. Da φ als stetig vorausgesetzt ist, gibt es zu jedem $\gamma > 0$ ein $\kappa > 0$, so dass $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \gamma$ ist für $|x| < \kappa$. Es ist für alle $\epsilon < \kappa$

$$\begin{aligned} |\int f_\epsilon(x)\varphi(x)dm - \varphi(0)| \; &= \frac{3}{4\pi\epsilon^3}|\int_{|x|<\epsilon}(\varphi(x) - \varphi(0))dm| \\ \leq \; \frac{3}{4\pi\epsilon^3}\int_{|x|<\epsilon} &|(\varphi(x) - \varphi(0))|dm < \gamma\frac{3}{4\pi\epsilon^3}\int_{|x|<\epsilon} dm = \gamma \end{aligned}$$

Damit folgt also

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int f_\epsilon(x)\varphi(x)dm = \varphi(0) \tag{3}$$

Dieses Ergebnis zeigt: Eine Folge (bzw. Schar) von Funktionen, die nicht überall gegen eine Grenzfunktion konvergiert, kann dennoch für jede stetige Funktion φ eine konvergente Folge von Integralen liefern. Deren Grenzwert wird dann als ein durch eine verallgemeinerte Funktion (vF) aus φ erzeugter Zahlenwert angesehen, weil er (wie in Sk. S. 16 gezeigt werden wird) zum Unterschied von den gegen ihn konvergierenden Folgengliedern nicht durch ein Integral über eine Funktion dargestellt werden kann, andererseits aber mit den durch Funktionen erzeugten Abbildungen (1) die Gemeinsamkeit hat, eine in φ lineare Abbildung zu sein, also ein lineares Funktional auf $\mathcal{V}$. Von Abbildungen $T_f(\varphi)$ der Art (1), die durch (gewöhnliche) Funktionen f erzeugt werden, als Anleitung ausgehend, werden Forderungen an Eigenschaften von vF aufgestellt und Verknüpfungen mit vF eingeführt werden.

Menge der gewählten Funktionen :
Wenn Ausdrücke der Art $\int f(x)\varphi(x)dm$ zum Ausgangspunkt für die Einführung von erheblichen Verallgemeinerungen von Funktionen f gemacht werden sollen, dann wird man, wenn man statt manierlicher Funktionen f irreguläre Gebilde zulassen will, umso regulärere und gesittetere Funktionen φ wählen müssen, damit die o. a. Ausdrücke noch einen Sinn haben. Da man für im üblichen Sinne nicht differenzierbare Funktionen auch noch verallgemeinerte Ableitungen einführen möchte, müssen die φ die fehlende Glattheit von f wettmachen. Man wählt daher C^∞-Funktionen. Um eine problemlose Konvergenz der Integrale zu erreichen, wählt man die φ außerdem mit kompaktem Träger; diese Klasse von Funktionen bezeichnet man mit $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$. In diesem Kapitel werden reellwertige Funktionen verwendet.