Schwache Lösungen linearer partieller Differenzialgleichungen
(Vgl. Fischer; Kaul: Mathematik für Physiker, Bd. 2, §13.1)

In Verallgemeinerung aller bislang angestellten Betrachtungen werden nun statt $\mathbb{R}^n$ beliebige, auch beschränkte Gebiete B zugelassen. $\mathcal{D}(B)$ bezeichnet alle Funktionen aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, die einen in B enthaltenen kompakten Träger haben. Da B offen ist, bedeutet dies, dass diese Funktionen auf dem Rand ∂B von B verschwinden.

Ein partieller Differenzialausdruck (PDA) zweiter Ordnung $\mathcal{L}$ sei für alle $u \in C^2(B)$ durch

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,k} a_{i,k}\,\partial_i\partial_k u + \sum_i a_i\,\partial_i u + a\,u \tag{1}$$

gegeben, wobei $a_{i,k} = a_{k,i} \in C^2(B)$, $a_i \in C^1(B)$ und $a \in C(B)$ sei.

Will man in einer inhomogenen Differenzialgleichung der Art $\mathcal{L}u = f$ statt $u \in C^2(B)$ z. B. ein $u \in L^1_{loc}$ zulassen, muss man die DGl im Sinne von vF auffassen. Hiebei geht man wieder vom Falle einer DGl im üblichen Sinne aus, also für ein $u \in C^2(B)$, und versucht, in einem Ausdruck der Art $< \mathcal{L}u, \varphi >$ die in $\mathcal{L}$ stehenden Ableitungen „von u wegzukriegen“. Man muss also einen PDA $\mathcal{L}'$ finden, für den für jedes $u \in C^2(B)$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(B)$

$$< T_{\mathcal{L}u}, \varphi > = < T_u, \mathcal{L}'\varphi > \tag{2}$$

gilt. Dann kann man für $f \in L^1_{loc}$ die Lösung von $\mathcal{L}u = f$ durch
$\bigwedge_{\varphi\in\mathcal{D}} < T_u, \mathcal{L}'\varphi > = < T_f, \varphi >$ erklären.
$\mathcal{L}'$ wird nun aus $\mathcal{L}$ dadurch erhalten, dass man zunächst in $\mathcal{L}u \cdot v$ für $u, v \in C^2(B)$ die Ableitungen, so gut es geht, nach v (mit Einschluss der Koeffizientenfunktionen von $\mathcal{L}$) hinüber schafft. Dabei bleiben einem noch Restausdrücke übrig, über die dann zu sprechen sein wird. Dies geschieht wie folgt:

$$\begin{aligned}
v \cdot \mathcal{L}u &= \sum_{i,k} a_{i,k} v \cdot \partial_i\partial_k u + \sum_i a_i v \cdot \partial_i u + a\,u\,v = \\
\sum_{i,k}(\partial_i(a_{i,k}\,v \cdot \partial_k u) - \partial_i(a_{i,k}\,v) \cdot \partial_k\,u) &+ \sum_i(\partial_i(a_i\,u \cdot v) - \partial_i(a_i\,v) \cdot u) + a\,u\,v = \\
&\sum_{i,k}(\partial_i(a_{i,k}\,v \cdot \partial_k u) - \partial_k(u \cdot \partial_i(a_{i,k}\,v)) + u \cdot \partial_k\partial_i(a_{i,k}\,v)) + \\
&\sum_i(\partial_i(a_i\,u \cdot v) - u\,\partial_i(a_i\,v)) + a\,u\,v = \\
u \cdot \left[\sum_{i,k} \partial_i\partial_k(a_{i,k} \cdot v) - \sum_i(\partial_i(a_i\,v) + av\right] &+ \sum_i \partial_i \left[\sum_k(a_{i,k}\,v\partial_k u - u \cdot \partial_k(a_{i,k}\,v)) + a_i uv\right]
\end{aligned} \tag{3}$$

Dabei wurden für die letzte Gleichheit bei der Umschreibung des zweiten Summanden die Indizes i und k ineinander umbenannt und es wurde von der Symmetrie der $a_{i,k}$ Gebrauch gemacht.
Man führt nun für alle $v \in C^2(B)$ den zu $\mathcal{L}$ gehörigen adjungierten Differenzialausdruck $\mathcal{L}'$ als

$$\mathcal{L}'v = \sum_{i,k} \partial_i\partial_k(a_{i,k}\,v) - \sum_i \partial_i(a_i\,v) + a\,v \tag{4}$$

ein, sowie das Vektorfeld

$$w_i := \sum_k(a_{i,k}\,v \cdot \partial_k u - u\partial_k(a_{i,k}\,v)) + a_i\,u\,v \quad . \tag{5}$$

Dann kann man die Gleichheit des ersten und des letzten Ausdrucks in (3) zusammenfassen in

$$v \cdot \mathcal{L}u - u \cdot \mathcal{L}'v = \sum_i \partial_i w_i = \operatorname{div} \underline{w} \tag{6}$$

Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt für geeignete Gebiete B, deren Rand ∂B fast überall ein Normalenvektorfeld n_i besitzt, die verallg. Greensche Formel

$$\int_B v \cdot \mathcal{L}u \ \ dm = \int_B u \cdot \mathcal{L}'v \, dm + \int_{\partial B} \sum_i w_i n_i \, d\sigma \, . \tag{7}$$

$d\sigma$ ist das Inhaltselement der Oberfläche ∂B von B.
Wenn man nun für v $\varphi \in C_o^2(B)$, also Funktionen mit kompaktem Träger im (offenen) B einsetzt, erhält man wegen des Verschwindens des Randausdrucks gerade (2) :

$$\int_B \mathcal{L}u \cdot \varphi \ \ dm = \int_B u \cdot \mathcal{L}'\varphi \, dm \, . \tag{8}$$

Sonderfall: Differenzialausdrücke in Divergenzform:
$\mathcal{L}$ liegt in Divergenzform vor, wenn er folgende Gestalt hat:

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,k} \partial_i (a_{i,k} \partial_k u) + a\, u \quad . \tag{9}$$

Eine Rechnung ähnlich wie jene, die zu (3) führt, ergibt
$\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ und $w_i = \sum_i a_{i,k}(v \cdot \partial_k u - u \cdot \partial_k v)$.
Solche Differenzialausdrücke heißen formal symmetrisch (oder formal selbstadjungiert). Differenzialausdrücke in Divergenzform treten in der Physik verschiedentlich auf.

Seien $f \in C(B)$ und $u \in C^2(B)$. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(B)$ gelte

$$\int_B u \cdot \mathcal{L}'\varphi \, dm - \int_B f \cdot \varphi \, dm = 0 \quad . \tag{10}$$

Dann folgt aus (8)

$$\int_B u(\mathcal{L}' - f) \ \ \varphi \, dm = \int_B (\mathcal{L}u - f) \, \varphi \, dm = 0$$

und daraus mit dem Lemma von Du Bois-Reymond (Fischer/Kaul: M f.Φ-er, Bd.2: S. 249)

$$\mathcal{L}u = f \quad . \tag{11}$$

u ist also Lösung von (11) im üblichen Sinne und wird zur Unterscheidung vom anschließend vorgestellten Lösungsbegriff klassische Lösung von (11) genannt. Dies gibt im Geiste der vF in $\mathcal{D}'(B)$ Anlass zu folgender
Definition:
$u \in L^1_{loc}(B)$ heißt schwache Lösung von $\mathcal{L}u = f$, $f \in L^1_{loc}(B)$,wenn für alle $\varphi \in \mathcal{D}(B)$

$$< T_u, \mathcal{L}'\varphi >= \int_B u \cdot \mathcal{L}'\varphi \, dm = \int_B f \cdot \varphi \, dm =< T_f, \varphi > \tag{12}$$

gilt. u ist also Lösung von (11) im Distributionensinne insofern, als die auf u nicht mehr anwendbaren Ableitungen von $\mathcal{L}$ in der Gestalt von $\mathcal{L}'$ auf φ überwälzt werden. Es wird jedoch verlangt, dass $u \in L^1_{loc}$ ist, also einer regulären vF entspricht.
Schwache Lösungen spielen in der Lösungstheorie von PDGln wie der Wellengleichung eine Rolle.