Zu Sk, S. 51, Grundlegendes zu 9.2:

Allgemeine Problemstellung der Regularisierung

Es werden Funktionen betrachtet, die in einzelnen isolierten Punkten a_i nicht integrierbar sind, wohl aber über alle kompakten Mengen, die diese einzelnen Punkte nicht enthalten. Die uneigentlichen Integrale über Mengen, die Punkte a_i enthalten, sind also divergent. (Zur Erinnerung : Beispiele in Sk, S. 49, 9.1.) Solche Funktionen, die nicht aus $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sind, definieren also keine regulären verallg. Funktionen.

Aufgabe : Es soll versucht werden, den Integralen solcher Funktionen einen Wert zuzuweisen, indem man Gedankengänge aus der Theorie der verallg. Funktionen (vF) verwendet. Das heißt: Wenn die (uneigentlichen) Integrale dieser Funktionen $f(x)$ als solche nicht existieren, versucht man wenigstens Ausdrücken der Art $\int f(x)\varphi(x)dm$ einen Sinn zu geben.

Grundgedanken zur Vorgangsweise bei der Lösung der Aufgabe :

Da $f \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, existiert das obige Integral nicht für beliebige $\varphi \in \mathcal{D}$, wohl aber für solche φ, die in den Punkten a_i von genügend hoher Ordnung oder sogar in einer Umgebung von ihnen verschwinden. (Das verlangte Verhalten von $\varphi(x)$ in den a_i wird man nach jenem von $f(x)$ ausrichten.) Zur Vereinfachung werde im Folgenden angenommen, dass f nur in einem einzigen Punkte a das oben beschriebene Verhalten habe, also um diesen Punkt nicht lokal integrierbar sei. Die Verallgemeinerung auf mehrere a_i bietet keine Schwierigkeiten. Durch die Einschränkung des an die Darstellung regulärer verallgemeinerter Funktionen gemahnenden Integrals auf φ, die von genügend hoher Ordnung in a verschwinden, hat man ein Funktional auf einem echten Teilraum von $\mathcal{D}$ erklärt. In dieser Betrachtungsweise besteht nun die Aufgabe der Regularisierung darin, dieses Funktional auf ganz $\mathcal{D}$ fortzusetzen. Nun gilt schon in endlichdimensionalen Räumen, dass die Fortsetzung eines auf einem Teilraum gegebenen Funktionals auf den ganzen Raum immer möglich, aber nicht eindeutig ist. Im Falle des unendlichdimensionalen Raumes $\mathcal{D}$ trifft dies in noch viel drastischerem Ausmaße zu, und kein Regularisierungsverfahren für divergente Integrale kommt ohne eine willkürliche Festsetzung zustande, die nach den Gesichtspunkten einer gewissen Natürlichkeit und auch Handhabbarkeit getroffen wird.

Erinnerung : Die Mehrdeutigkeit der Fortsetzung eines auf einem Teilraum gegebenen Funktionals im Endlichdimensionalen.

Der (Gesamt-)Raum sei $\mathbb{R}^3$, der Teilraum $\mathbb{R}^2$. Sei $x \in \mathbb{R}^2$, das Funktional $T \in (\mathbb{R}^2)'$ gegeben durch $T(x) = \sum_1^2 a_i x_i$. Jede Fortsetzung $\tilde{T}$ auf alle y aus $\mathbb{R}^3$ kann mit Verwendung der Projektion $P_{\mathbb{R}^2}$ von $\mathbb{R}^3$ auf $\mathbb{R}^2$ durch $\langle \tilde{T}, y\rangle = \langle T, P_{\mathbb{R}^2}(y)\rangle + a_3 y_3$ angegeben werden. a_3 ist ein willkürlicher Parameter, es gibt also schon in diesem einfachen Beispiel unendlich viele Fortsetzungen des Funktionals.

Der Cauchysche Hauptwert

Dieses Regularisierungsverfahren lässt sich nur auf Funktionen anwenden, deren Verlauf in der Umgebung des Singularitätspunktes durch eine weiter unten angegebene Bedingung gezähmt ist, dafür ist es übersichtlich und in Anwendungen von Bedeutung.

Es sei ein Gebiet $A \in \mathbb{R}^n$ gegeben, $a \in A$, und es sei $A^\epsilon = A \backslash K(a, \epsilon), \epsilon > 0$. f sei über alle A^ϵ, aber nicht über A integrierbar. (Bsp.: $f(x) = g(x)|x-a|^{-n}$, g stetig, $g(a) \neq 0$.) Es kann aber dennoch vorkommen, dass das über A^ϵ erstreckte Integral für $\epsilon \to 0$ einen Grenzwert hat. Dies ist die Bedingung, die jene Funktionen aussondert, deren Integrale mit dem Verfahren des Cauchyschen Hauptwertes (CH) regularisierbar sind. Falls dieser Grenzwert vorhanden ist, sagt man, dass das Integral von f über A als CH existiert und schreibt

$$CH \int_A f(x)dm := \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{A^\epsilon} f(x)dm \tag{1}$$

Das CH-Integral ist eine Erweiterung des Integralbegriffs.

Bsp. ($n = 1$):

$$CH \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \to 0_+} (\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x}) = 0 \quad ,$$

da der Integrand ungerade ist.

Es gilt nun der
<u>Satz</u> :
Sei $a \in \mathbb{R}^n$. f sei über jedes Kompaktum, das a nicht enthält, integrierbar. Bezüglich a exisitiere der CH des Integrals von f. Für $0 < |x - a| < 1$ sei f majorisiert durch

$$|f(x)| \ \leq \frac{C}{|x - a|^\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha < n + 1. \tag{2}$$

(Vgl. dagegen die Bedingung für die Lokalintegrierbarkeit in Sk, S. 12, nach (6).) Dann definiert

$$\langle CHf, \varphi \rangle := CH \int f(x)\varphi(x)dm = \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{|x-a|>\epsilon} f(x)\varphi(x)dm \tag{3}$$

eine vF, die mit CHf bezeichnet wird.

Beweis :
Aus dem Mittelwertsatz für auf dem $\mathbb{R}^n$ gegebene Funktionen

$$\varphi(x) - \varphi(y) = (x - y) \cdot \operatorname{grad} \varphi(\theta), \theta \in \{\lambda x + (1 - \lambda)y | \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

folgt

$$| \ \varphi(x) - \varphi(y)| \ \leq L|x - y|, L = \max_{x \in \mathbb{R}^n} | \operatorname{grad} \varphi(x)| \qquad (\varphi \in \mathcal{D}\,!). \tag{4}$$

Es gelte supp $\varphi \in K(a, R)$. Zu untersuchen ist

$$\int_{K(a,R)^\epsilon} f(x)\varphi(x)dm = \varphi(a) \int_{K(a,R)^\epsilon} f(x)dm + \int_{K(a,R)^\epsilon} f(x)(\varphi(x) - \varphi(a))dm =: P(\epsilon) + Q(\epsilon) \tag{5}$$

Nach Voraussetzung existiert $\lim_{\epsilon \to 0} P(\epsilon)$. Aus (2) und (4) folgt

$$|f(x)(\varphi(x) - \varphi(a))| \ \leq \frac{CL}{|x - a|^{\alpha - 1}}, \quad 0 < |x - a| < 1 \tag{6}$$

Wegen $\alpha - 1 < n$ ist der Integrand in $Q(\epsilon)$ integrierbar, daher ist auch $\lim_{\epsilon \to 0} Q(\epsilon)$ endlich. Es bleibt noch nachzuweisen, dass dieses durch den Satz gegebene lineare Funktional auf $\mathcal{D}$ auch stetig ist. Dafür sei auf Walter, S. 54 verwiesen.

Anwendung des Satzes:
Bezugnehmend auf das vor dem Satz angeführte Beispiel gibt es die vF $CH\frac{1}{x}$, gegeben durch

$$\langle CH\frac{1}{x}, \varphi \rangle = CH \int \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right]. \tag{7}$$

Für diese vF lässt sich die Stetigkeit leicht nachweisen:
Der Träger von φ sei in $(-d, +d)$ enthalten. Dann gilt

$$|\langle CH\frac{1}{x}, \varphi\rangle| = |CH\int \frac{\varphi(x)}{x}dx| = |CH\int_{-d}^{d}\frac{1}{x}(\varphi(0) + x\varphi'(\xi))dx| = \tag{8}$$

$$|\varphi(0)\cdot CH\int_{-d}^{d}\frac{1}{x}dx + CH\int_{-d}^{d}\varphi'(\xi)dx| \leq \int_{-d}^{d}|\varphi'(\xi)|dx \leq 2d\max_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)|. \tag{9}$$

Aus dieser Beziehung folgt,dass $CH\frac{1}{x}$ auf $\mathcal{D}$ stetig ist.

$CH\frac{1}{x}$ ist keine reguläre vF, da $\frac{1}{x}$ um $x = 0$ nicht lokal integrierbar ist. Im gewöhnlichen Sinne ist $\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ die Ableitung von $\ln|x|$. Da $\ln|x| \in L^1_{loc}$ ist und daher eine reguläre vF definiert, liegt die Frage nahe, welche Ableitung diese Funktion im Sinne von vF hat :

$$\langle T'_{\ln|x|}, \varphi\rangle = \langle „\frac{d}{dx}\ln|x|“, \varphi\rangle = -\langle „\ln|x|“, \varphi'\rangle = -\int \ln|x|\varphi'(x)dx \tag{10}$$

Es gibt wieder ein d mit supp $\varphi \subset (-d, +d)$. Da das Integral auf der rechten Seite im gewöhnlichen Sinne existiert, kann man es als Grenzwert für $\epsilon \to 0_+$ von

$$-\int_{-d}^{-\epsilon}\varphi'(x)\ln|x|dx - \int_{\epsilon}^{d}\varphi'(x)\ln|x|dx = [-\varphi(x)\ln|x|](\Big|_{-d}^{-\epsilon} + \Big|_{\epsilon}^{d}) + \int_{-d}^{-\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\epsilon}^{d}\frac{\varphi(x)}{x}dx \tag{11}$$

erhalten.
Der Ausdruck mit den Randtermen ist wegen supp $\varphi \subset (-d, +d)$ gleich

$$-\varphi(-\epsilon)\ln(\epsilon) + \varphi(\epsilon)\ln(\epsilon) = \ln(\epsilon)(\varphi(\epsilon) - \varphi(-\epsilon)) = 2\epsilon\varphi'(\theta)\ln\epsilon$$

und geht für $\epsilon \to 0$ gegen Null. Der verbleibende Ausdruck ist im Limes gerade $\langle CH\frac{1}{x}, \varphi\rangle$, weswegen also gilt :

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = CH\frac{1}{x} \tag{12a}$$

im Sinne von vF, genauer geschrieben eigentlich

$$T'_{\ln|x|} = CH\frac{1}{x} \tag{12b}$$

Das Integral $\int \frac{1}{x}\varphi(x)dx$ lässt sich also auch dadurch regularisieren, dass man eine Funktion $F \in L^1_{loc}$ sucht, deren Ableitung im Sinne von vF die nicht lokal integrierbare Funktion $\frac{1}{x}$ ist und das im gewöhnlichen Sinne nicht konvergente fragliche Integral als (vF-)Ableitung der regulären Distribution erklärt, die von F erzeugt wird. Dies legt eine Verallgemeinerung zu einem Verfahren nahe, Integrale über nicht lokal integrierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$ zu regularisieren: Die Regularisierung durch sogenannte Pseudofunktionen.