Der elektrische Dipol als δ'

Eine im Punkte x_o sitzende Punktladung der Größe q ist die Idealisierung einer elektrischen Ladung sehr kleiner Ausdehnung. Ihre Ladungsdichte kann nicht durch eine Funktion beschrieben werden, sondern man ordnet ihr stattdessen die singuläre vF $q \cdot \delta_{x_o}$ zu. Ein elektrischer Dipol ist eine von diesem Modell ausgehende weitere Idealisierung: Man stellt sich zwei Punktladungen verschiedenen Vorzeichens, aber gleichen Betrags vor, die einander immer stärker angenähert werden, so dass das Dipolmoment, also das Produkt aus der Ladungsgröße und dem Abstand der beiden Ladungen, konstant bleibt. Der „Ladungsdichte“ des Dipols wird ein noch singuläreres Gebilde als die δ-Distribution entsprechen, das sich dennoch als vF leicht angeben lässt.

Der Einfachheit halber wird hier in einer Raumdimension gearbeitet, also in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Gerade in diesem Falle lässt sich die dem Dipol entsprechende vF leicht auffinden. Man geht von einer positiven Ladung der Größe $1/\epsilon$ an der Stelle $x = \epsilon$ und einer entgegengesetzt gleich großen Ladung im Nullpunkt aus. Durch diese Wahl ist das Dipolmoment der Anordnung für alle ϵ gleich 1 und positiv orientiert. In $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ übersetzt heißt das, dass die vF
$\Delta_\epsilon := \frac{1}{\epsilon}\delta(x-\epsilon) - \frac{1}{\epsilon}\delta(x)$ vorliegt. Setzt man $\eta = -\epsilon$, erhält man $-\frac{1}{\eta}(\delta(x+\eta) - \delta(x))$. Nach den Überlegungen von Sk. 7.3 (S. 38ff) ist das Ergebnis des Grenzübergangs $\eta \to 0$ einfach $-\delta'$, womit die den Dipol darstellende vF gefunden ist.

Eine Art Kontrollrechnung ist es, denselben Grenzübergang in Anwendung der vF Δ_ϵ als Funktional auf eine beliebige Grundfunktion φ durchzuführen: $< \Delta_\epsilon, \varphi >= \frac{1}{\epsilon}(\varphi(\epsilon) - \varphi(0))$ und daher $\lim_{\epsilon\to 0} < \Delta_\epsilon, \varphi >= \varphi'(0) =< \delta, \varphi' >= - < \delta', \varphi >$, wie zu erwarten war.

Eine besonders anschauliche Unterstützung dieser Darstellung des Dipols erhält man, wenn man δ-Scharen nach Sk. S. 42, 45 benützt. Da die Ableitung eine stetige Abbildung $\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ist (Sk. S. 36), entsteht aus den Ableitungen einer stetig differenzierbaren δ-Schar, also einer Schar von Funktionen f_α, für die $\lim_{\alpha\to 0} < T_{f_\alpha}, \varphi >=< \delta, \varphi >= \varphi(0)$ ist, eine Schar f'_α, für die $\lim_{\alpha\to 0} < T_{f'_\alpha}, \varphi >=< \delta', \varphi >= -\varphi'(0)$ gilt. (S. Sk. S. 24 u)

Als Beispiele kann man die Scharen $f_{i,\alpha}(x)$ $(i = 1, 2)$ nehmen, die aus $f_1(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ oder $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp(-x^2/4)$ als $f_{i,\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha^{1/i}} f_i(\frac{x}{\alpha^{1/i}})$ erzeugt werden. Die zugehörigen Dipolscharen sind dann

$$-f'_{1,\alpha}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\alpha x}{(\alpha^2 + x^2)^2}$$

und

$$-f'_{2,\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha^3}}\frac{x}{2}\exp(-x^2/4\alpha) \quad ,$$

deren Verlauf in beiden Fällen eine auf $\mathbb{R}_-$ verteilte negative und eine auf $\mathbb{R}_+$ verteilte positive Ladung wiedergibt, die sich, für $\alpha \to 0$ immer weiter zunehmend, in den Nullpunkt zusammen ziehen.