Konvergenz in $\mathcal{D}$ und die Stetigkeit linearer Funktionale auf $\mathcal{D}$

(Ergänzung zu Sk, S. 9 u. 11)

Wenn man in einem linearen Raume X die Konvergenz von Folgen erklären will, möchte man das so tun, dass die Konvergenz mit der Vektorraumstruktur in folgendem Sinne verträglich ist: Die Konvergenz einer Folge gegen ein Grenzelement soll gegenüber der Verschiebung mit einem beliebigen Vektor unempfindlich sein. Das heißt genauer, dass wenn man zu den Gliedern einer konvergenten Folge und zum Grenzpunkt denselben festen Vektor addiert, man wieder eine konvergente Folge erhält, die gegen das verschobene Grenzelement konvergiert.

Das bedeutet dann in der Umkehrung, dass für $x_i, x \in X$ genau dann $\lim_{i\to\infty} x_i = x$ gilt, wenn $\lim_{i\to\infty}(x_i - x) = 0_X$ ist. Es genügt also dann, die Konvergenz einer Folge gegen den Nullvektor 0_X von X zu definieren, um die Konvergenz gegen beliebige Vektoren erklärt zu haben. Deswegen wird auch in C_o^∞ nur die Konvergenz gegen das Nullelement des Vektorraumes, nämlich die Nullfunktion, definiert. Der lineare Raum $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, versehen mit dem in Sk, S. 9 eingeführten Konvergenzbegriff, wird mit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

Diese Festsetzungen sind in der Anwendung auf lineare Abbildungen zwischen linearen Räumen mit Konvergenzerklärung erfolgreich. Lineare Abbildungen eines linearen Raumes in einen anderen sind ja gerade solche, die mit der Vektorraumstruktur der Räume verträglich sind. Dies und die Invarianz der Konvergenz in linearen Räumen gegenüber Verschiebungen führt dazu, dass die Stetigkeit einer linearen Abbildung eine verschiebungsunabhängige Eigenschaft ist, oder konkreter ausgedrückt: Eine lineare Abbildung eines linearen Raumes mit verträglichem Konvergenzbegriff in einen ebensolchen ist entweder überall stetig oder nirgends. Das bedeutet, dass es genügt, die Stetigkeit einer linearen Abbildung in einem einzigen Punkte des Vektorraumes zu untersuchen, und es liegt nahe, dies im ausgezeichneten Punkte eines jeden Vektorraumes, in seinem Nullvektor, zu tun.

Dies sieht man wie folgt: Seien X, Y lineare Räume der besprochenen Art, $T : X \to Y$ sei linear und im Nullpunkt stetig; es gilt also für alle Folgen, für die $\lim_{i\to\infty} x_i = 0_X$ ist, auch $\lim_{i\to\infty} T(x_i) = 0_Y$. $\lim_{i\to\infty} v_i = v$ bedeutet definitionsgemäß $\lim_{i\to\infty}(v_i - v) = 0_X$. Nun ist $T(v_i) = T(v_i - v + v) = T(v_i - v) + T(v)$, und wegen der Stetigkeit von T in 0_X folgt daraus $\lim_{i\to\infty} T(v_i) = T(v)$.

Dies trifft natürlich insbesondere auf lineare Funktionale zu, weswegen in Sk. S. 11 nur ihre Stetigkeit im Nullpunkt (Nullvektor) von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ verlangt wird. Der Raum aller linearstetigen Funktionale auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, also definitionsgemäß aller vFn oder Distributionen, wird mit $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

Reguläre Distributionen, die Abbildung $\mathfrak{T}_r$ (zu Sk, S. 12):
Nach Sk. S. 12ff erzeugt jedes $f \in L^1_{loc}$ über (vgl. (1) in der Ergänzung zur Einleitung) $< T_f, \varphi > := T_f(\varphi) := \int f(x)\varphi(x)dm$ eine Distribution, die in diesem Falle regulär genannt wird. Die Abbildung $\mathfrak{T}_r : L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, die durch $\mathfrak{T}_r(f) = T_f$ definiert ist, ist wegen der Linearität des Integralausdrucks in f eine lineare Abbildung des linearen Raumes $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ auf die mit $\mathcal{D}'_{reg}(\mathbb{R}^n)$ bezeichneten vFn:

$$\begin{aligned} < \mathfrak{T}_r(\alpha f + \beta g), \varphi > = < T_{(\alpha f + \beta g)}, \varphi > &= \int (\alpha f(x) + \beta g(x))\varphi(x)dm \qquad (1) \\ = \alpha \int f(x)\varphi(x)dm + \beta \int g(x)\varphi(x)dm &= \alpha < T_f, \varphi > + \beta < T_g, \varphi > = \alpha < \mathfrak{T}_r(f), \varphi > + \beta < \mathfrak{T}_r(g), \varphi > \end{aligned}$$