
Elektromagnetische Felder und Elektrodynamik

Version von 20. November 2015
Sommersemester 2013

Wintersemester 2013/14

Vorlesungsstoff für die Vorlesung „Elektromagnetische Felder“
(Bachelor-Studiengang):

App.A, Kap. 0, 1, 2, 3 bis 3.2,
Kap. 4 bis Kap. 7, 8.1, 9, 11, 12 bis 12.2,
sowie *Neu: ab SS 2010* Kap. 4.2 aus Nolting “Elektrodynamik”.

Vorlesung „Elektrodynamik“ (Master-Studiengang)

Kap. 3.3-3.4, Kap. 8, Kap. 10, Kap. 12 ab 12.3,
Kap. 13 bis Kap. 19 *Neu: ab WS 2012-13 auch Kap. 17*
Kenntnisse aus der Vorlesung „Elektromagnetische Felder“
sollen auch vorhanden sein!

überarbeitete Vorlesungsunterlagen, zum Teil aus den Skripten von Prof. Dr. Claudius Gros, Institut für Theoretische Physik Universität Frankfurt, von Prof. Dr. W. Cassing, Institut für Theoretische Physik, Universität Giessen, von Prof. Dr .G. Soff, Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Dresden und von Prof. E. Schachinger, ITPCP Technische Universität Graz, mit freundlicher Genehmigung.

Zu finden unter:

<http://itp.tu-graz.ac.at/~arrigoni/>
→ **Elektrodynamik/EM Felder**

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung in die Elektrodynamik	6
0.1	Elektrische Ladung	6
0.2	Elektrostatik	6
0.3	Magnetostatik	7
0.4	Konzept des elektromagnetischen Feldes	7
0.5	Maxwell'sche Gleichungen	8
0.6	Materie im elektromagnetischen Feld	9
0.7	Literatur	10
I	Elektrostatik	12
1	Coulomb'sches Gesetz	13
1.1	Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz	13
1.2	Coulomb-Kraft	14
1.3	Das elektrische Feld eines Systems von Punktladungen	15
1.4	Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen	16
1.5	Multipolentwicklung	18
2	Grundlagen der Elektrostatik	22
2.1	Fluss eines Vektor-Feldes	22
2.2	Satz von Gauß: Anwendung auf die Elektrostatik	22
2.3	Anwendungen des Gauß'schen Satzes	23
2.4	Differentialgleichungen für das elektrische Feld und Potential	25
2.5	Energie des elektrostatischen Feldes	27
2.6	Multipole im elektrischen Feld	29
3	Randwertprobleme der Elektrostatik	30
3.1	Eindeutigkeitstheorem	30
3.1.1	Physikalische Anwendungen: Metalle	31
3.2	Spiegelladung	33
3.2.1	Punktladung vor leitender Ebene	33
3.2.2	Punktladung vor leitender Kugel	35
3.3	Greensfunktionen	36
3.4	Trennung der Variablen	38

3.5	Übersicht Elektrostatik	40
II	Magnetostatik	41
4	Ampère'sches Gesetz	42
4.1	Elektrischer Strom und Ladungserhaltung	42
4.2	Ampère'sches Gesetz	44
4.3	Formel von Biot-Savart	46
4.4	Kraft und Drehmoment auf einen Strom im Magnetfeld	47
4.5	Kräfte zwischen Strömen und deren Energien	49
5	Grundgleichungen der Magnetostatik	51
5.1	Divergenz der magnetischen Induktion	51
5.2	Rotation von \mathbf{B}	52
5.3	Vektor-Potential und Eichung	53
5.4	Multipolentwicklung	54
5.5	Energie eines Dipols im äußeren, schwach veränderlichen Magnetfeld	55
5.6	Übersicht über die Magnetostatik	57
III	Grundlagen der Elektrodynamik	58
6	Die Maxwell'schen Gleichungen	59
6.1	Konzept des elektromagnetischen Feldes	59
6.2	Unvollständigkeit der statischen Maxwell-Gleichungen	59
6.3	Faraday'sches Induktionsgesetz	60
6.4	Erweiterung des Ampère'schen Gesetzes	63
6.5	Übersicht über die Maxwell'schen Gleichungen	64
7	Die elektromagnetischen Potentiale	65
7.1	Skalares Potential und Vektorpotential	65
7.2	Lorenz-Eichung	66
7.3	Coulomb-Eichung	67
8	Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes	69
8.1	Energie	69
8.2	Impuls	71
8.3	Drehimpuls	74
8.4	Zusammenfassung	74
IV	Elektromagnetische Strahlung im Vakuum	76
9	Das elektromagnetische Feld im Vakuum	78
9.1	Homogene Wellengleichungen	78

9.2	Monochromatische Ebene Wellen	79
9.3	Energie- und Energiestromdichte	82
9.4	Polarisation	84
9.5	Ergänzung: Differentialoperatoren auf Ebene Wellen	86
10	Wellenpakete im Vakuum	88
10.1	Informationsübertragung durch elektromagnetische Wellen	88
10.2	Fourier-Integrale	89
10.3	δ -Distribution	90
10.4	Wellenpakete	92
10.5	I Übersicht Elektrodynamik	95
V	Das elektromagnetische Feld in Materie	98
11	Makroskopische Felder	99
11.1	Makroskopische Mittelwerte	99
11.2	Freie und gebundene Ladungsträger	101
11.3	Mikroskopische Ströme	103
12	Verhalten des elektromagnetischen Feldes an Grenzflächen	109
12.1	Allgemeine Stetigkeitsbedingungen	109
12.2	Lineare, isotrope Medien	112
12.2.1	Elektrische Leitfähigkeit in Metallen	113
12.3	Reflexion und Brechung von Licht	115
12.4	Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in leitenden Materialien	117
12.5	Wellen in einem metallischen Hohlleiter	119
13	Energie, Impuls und Drehimpuls des makroskopischen Feldes	124
13.1	Energie	124
13.2	Impuls, Drehimpuls	126
14	Elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie	127
14.1	Materialgleichungen	127
14.2	Dielektrika	128
14.2.1	Dielektrische Funktion im Fall induzierter Polarisation: Beispiel	128
14.2.2	Orientierungspolarisation: Temperaturabhängigkeit der Polarisation	130
14.3	Elektrische Leitfähigkeit und Zusammenhang mit der dielektrischen Funktion	131
14.4	Para- und Diamagnetismus	132
VI	Quellen elektromagnetischer Strahlung	136
15	Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen	138
15.1	Problemstellung	138
15.2	Konstruktion von G	139

15.2.1 Beweis von (15.14)	140
15.3 Lösung der Wellengleichung und retardierte Potentiale	141
15.4 Elektromagnetische Strahlung bewegter Punktladungen	144
15.5 Energiestromdichte	147
16 Multipolstrahlung	149
16.1 Langwellen-Näherung	149
16.2 Elektrische Dipol-Strahlung	151
16.3 Magnetische Dipol-Strahlung	153
16.4 Elektrische Quadrupol-Strahlung	154
17 Systematik der Multipolentwicklung	157
17.1 Eigenschaften der Kugelfunktionen (zu N2.3.5)	157
17.2 Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten	157
17.2.1 Punktladung	158
17.2.2 Strahlungsfelder	158
17.3 Viewgraphs	159
VII Spezielle Relativität	169
18 Spezielle Relativitätstheorie und relativistische Elektrodynamik	170
18.1 Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie	170
18.1.1 Das Relativitätsprinzip	170
18.1.2 Prinzip der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit c	171
18.2 Die LORENTZtransformationen	173
18.3 Folgerungen aus den LORENTZ-Transformationen und deren Überprüfung .	176
18.3.1 Relativierung des Begriffes der Gleichzeitigkeit	176
18.3.2 Zeitdilatation	177
18.3.3 LORENTZ-Kontraktion	182
18.3.4 Additionstheorem der Geschwindigkeiten	183
18.4 Das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum	184
18.5 Lorentz-Transformation im Viererraum: Rotation und Boosts	188
18.6 Relativistische Formulierung der Elektrodynamik	190
18.7 Ströme, Dichten, Potentiale	191
18.8 \mathbf{E} und \mathbf{B} Felder und die Maxwell-Gleichungen	192
18.9 Transformation der Felder	194
19 Relativistische Mechanik	196
19.1 Impuls und Energie	196
19.2 Bewegungsgleichungen	197
19.3 Lorentz-Transformation der Kraft	198
19.4 Übersicht Relativität	200

20 Relativistische Elektrodynamik	203
20.1 Transformationseigenschaften, das elektrische Feld einer bewegten Ladung	203
20.2 Die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem homogenen elektrischen Feld	206

VIII Mathematik **209**

A Mathematik-Wiederholung **211**

A.1 Wiederholung Vektoralgebra	211
A.1.1 Skalarprodukt	211
A.1.2 Vektorprodukt (alias Kreuzprodukt)	211
A.1.3 Spatprodukt	211
A.2 Nabla-„Operator“	212
A.2.1 Divergenz \longleftrightarrow „Skalarprodukt“	212
A.2.2 Rotation \longleftrightarrow „Vektorprodukt“	212
A.2.3 Gradient \longleftrightarrow „Produkt mit einem Skalar“	212
A.3 „Nabla-Kalkül“	213
A.3.1 Beispiele	213
A.3.2 Benutzung der Kettenregel	213
A.3.3 Weitere wichtige Aspekte	214
A.4 Gauß'scher Satz	215
A.4.1 Interpretation	215
A.4.2 Anwendung	216
A.5 Stokes'scher Satz	217
A.5.1 Interpretation	217
A.5.2 Anwendung	217
A.6 Dirac'sche δ -Funktion	218
A.6.1 Definition	218
A.6.2 Ableitungen	218
A.6.3 Multidimensionale δ -Funktion	218
A.6.4 Fourier-Darstellung	218
A.6.5 Wichtiges Ergebnis für die Elektrodynamik	218

B Einige details **220**

B.1	220
B.1.1	220
B.1.2	220
B.1.3	220
B.1.4	220
B.1.5	221
B.1.6	221
B.1.7	221
B.1.8	221
B.1.9	221

B.1.10	222
B.1.11	222

IX Mathematischer Anhang 224

C Allgemeines 225

C.1	Der Satz von Gauß	225
C.2	Die Dirac'sche δ -Funktion	229
C.3	Die Sprungfunktion	235
C.4	Der Levi-Civita-Tensor	236
C.5	Transformationseigenschaften der Felder	237
C.5.1	Drehungen	237
C.5.2	Räumliche Spiegelung	238
C.5.3	Zeitumkehr	238
C.6	Magnetische Monopole	241

D Kugelkoordinaten 243

D.1	Der Laplace-Operator	243
D.1.1	Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten	243
D.1.2	Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten	243
D.2	Legendre-Polynome	245
D.3	Kugelfunktionen	251
D.4	Das Additionstheorem der Kugelfunktionen	258

Kapitel 0

Einführung in die Elektrodynamik

⋮

0.1 Elektrische Ladung

Während in der Mechanik die Eigenschaft *Masse* im Vordergrund steht, ist die *Ladung* von Massenpunkten Ausgangspunkt der Elektrodynamik. Sie besitzt eine Reihe von fundamentalen Eigenschaften, die durch vielfältige experimentelle Messungen gesichert sind:

- 1.) Es gibt 2 Sorten von **Ladungen**: *positive und negative*. Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab, Ladungen verschiedenen Vorzeichens ziehen sich an.
- 2.) Die Gesamtladung eines Systems von Massenpunkten ist die algebraische Summe der Einzelladungen; die *Ladung ist ein Skalar*.
- 3.) Die *Gesamtladung* eines abgeschlossenen Systems ist *konstant* und ihr Zahlenwert unabhängig vom Bewegungszustand des Systems.
- 4.) Ladung kommt nur als Vielfaches einer **Elementarladung** e (eines Elektrons) vor,

$$q = ne; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Klassischer Nachweis für die **Quantisierung** der Ladung ist der **Millikan-Versuch**. Den Elementarteilchen *Quarks* ordnet man zwar drittelzahlige Ladungen zu, d.h. $q = \pm(1/3)e$ bzw. $q = \pm(2/3)e$, jedoch sind diese *Quarks* im uns hier interessierenden Energiebereich nicht als freie Teilchen beobachtbar.

0.2 Elektrostatik

Das einfachste Problem der Elektrodynamik ist der Fall ruhender Ladungen, den wir mit **Elektrostatik** bezeichnen. Bringt man in die Umgebung einer (oder mehrerer) räumlich fixierter Punktladungen eine *Probeladung* q , so wirkt auf diese Probeladung eine Kraft \mathbf{K} , welche im allgemeinen vom Ort \mathbf{r} der Probeladung abhängt:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{r}) .$$

Ersetzt man q durch eine andere Probeladung q' , so findet man für die auf q' wirkende Kraft \mathbf{K}' :

$$\mathbf{K}'/q' = \mathbf{K}/q .$$

Elektrisches Feld

Diese Erfahrung legt es nahe, den Begriff des elektrischen Feldes

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{q} \mathbf{K}(\mathbf{r})$$

einzuführen. Dieses von den ruhenden Punktladungen erzeugte Feld ordnet jedem Raumpunkt \mathbf{r} ein Tripel reeller Zahlen zu, welches sich wie ein Vektor transformiert.

Aufgabe der Elektrostatik ist es, den allgemeinen Zusammenhang von Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ und elektrischem Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ zu finden und daraus bei gegebener Ladungsverteilung (z.B. einer homogenen räumlichen Kugel) das Feld zu berechnen.

0.3 Magnetostatik

Bewegte Ladungen in Form stationärer Ströme sind der Ursprung magnetostatischer Felder, die wir in Analogie zu den elektrostatischen Feldern einführen wollen. Wir gehen von folgender experimenteller Erfahrung aus: Bringt man in die Umgebung eines von einem stationären Strom durchflossenen Leiters eine Probeladung q , so kann die auf q am Ort \mathbf{r} wirkende Kraft geschrieben werden als

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = q \left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \right) .$$

Dabei ist \mathbf{v} die Geschwindigkeit der Probeladung und $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ein (von \mathbf{v} unabhängiges) Vektorfeld, der **magnetischen Induktion**, hervorgerufen durch den vorgegebenen stationären Strom.

Aufgabe der Magnetostatik ist es, den allgemeinen Zusammenhang zwischen einer stationären Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ und dem magnetischen Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ zu finden und daraus bei gegebener Stromverteilung (z.B. für einen stationären Kreisstrom) das Feld zu berechnen.

0.4 Konzept des elektromagnetischen Feldes

Nach den bisherigen Ausführungen könnte der Eindruck entstehen, als seien das elektrische und das magnetische Feld von einander unabhängige Größen. Dass dies nicht der Fall ist, zeigen folgende einfache Überlegungen:

- 1.) Lorentz-Transformation. Wenn eine Punktladung Q in einem Inertialsystem Σ ruht, so misst (über die auf eine Probeladung q wirkende Kraft) ein Beobachter in Σ ein elektrisches Feld $\mathbf{E} \neq 0$, jedoch kein Magnetfeld.

Für einen anderen Beobachter in einem gegenüber Σ bewegten Inertialsystem Σ' ist die Ladung bewegt. Der Beobachter in Σ' misst daher sowohl ein elektrisches Feld

$\mathbf{E}' \neq 0$ als auch ein magnetisches Feld $\mathbf{B}' \neq 0$. Die Wechselwirkung zwischen der betrachteten Ladung und einer Probeladung q würde also von einem Beobachter in Σ als *rein elektrische* Wechselwirkung (vermittelt durch das Feld \mathbf{E}) beschrieben, während ein Beobachter in Σ' sowohl *elektrische* als auch *magnetische* Wechselwirkung feststellen würde (vermittelt durch die Felder \mathbf{E}' und \mathbf{B}'). Diese Betrachtung zeigt, dass man *elektrisches und magnetisches Feld als eine Einheit ansehen muss, als elektromagnetisches Feld*.

Anmerkung: Für den bei der Magnetostatik diskutierten Fall eines von einem stationären Strom durchflossenen Leiters tritt kein elektrisches Feld auf, da bei einem stationären Strom im Leiter kein *Ladungsstau* auftritt, so dass sich die im Leiter befindlichen positiven und negativen Ladungsträger (Gitterbausteine und Leitungselektronen) nach außen hin kompensieren.

- 2.) Kontinuitätsgleichung. Die wechselseitige Abhängigkeit von elektrischem und magnetischem Feld tritt unvermeidbar dann zu Tage, wenn wir beliebige Ladungs- und Stromverteilungen $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ zulassen. Die Forderung der Ladungserhaltung ergibt dann die *Verknüpfung von ρ und \mathbf{j}* via der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dt} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 ,$$

da die Ladung in einem bestimmten Volumen V nur ab(zu)-nehmen kann, indem ein entsprechender Strom durch die Oberfläche von V hinaus(hinein)-fließt. Dann können aber \mathbf{E} und \mathbf{B} nicht mehr unabhängig voneinander berechnet werden.

0.5 Maxwell'sche Gleichungen

Den allgemeinen Zusammenhang zwischen \mathbf{E}, \mathbf{B} und den Ladungen (den *Quellen* des elektromagnetischen Feldes) beschreiben die **Maxwell-Gleichungen**. Folgende Aufgabe ergibt sich:

- 1.) die Maxwell-Gleichungen zu formulieren und experimentell zu begründen,
- 2.) ihre Invarianzeigenschaften zu untersuchen, woraus sich direkt der Zugang zur speziellen Relativitätstheorie ergibt. Die Untersuchung wird zeigen, dass der Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen durch eine **Lorentz-Transformation** beschrieben werden muss, d.h. dass für alle Inertialbeobachter die *gleiche Physik gilt*.
- 3.) Energie-, Impuls- und Drehimpuls-Bilanz für ein System geladener Massenpunkte im elektromagnetischen Feld werden dazu führen, dem elektromagnetischen Feld Energie, Impuls und Drehimpuls zuzuordnen. Daraus werden sich dann Begriffe wie **Strahlungsdruck** und die Einführung von **Photonen** ergeben.
- 4.) Lösungstheorie der Maxwell-Gleichungen. Beispiele sind die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen oder die Strahlung eines schwingenden elektrischen Dipols.

0.6 Materie im elektromagnetischen Feld

Die Maxwell-Gleichungen bestimmen im Prinzip die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ vollständig, wenn die Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}, t)$ und die Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ bekannt sind. In der Praxis treten dabei folgende Probleme auf:

- 1.) Für ein System von N geladenen Massenpunkten müsste man die Newton'schen Bewegungsgleichungen lösen, um $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ **mikroskopisch** berechnen zu können. Für ein Stück Materie von **makroskopischen** Dimensionen (z.B. das Dielektrikum zwischen den Platten eines Kondensators oder dem Eisenkern einer stromdurchflossenen Spule) haben wir es mit $10^{20} - 10^{25}$ Massenpunkten zu tun!
- 2.) Die mikroskopisch berechneten Funktionen $\rho(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ werden im allgemeinen starke Schwankungen über kleine räumliche und zeitliche Distanzen aufweisen. Die Lösung von Maxwell-Gleichungen (mehrdimensionale Integrationen) wäre dann praktisch nicht durchführbar bzw. unökonomisch!

Gemittelte Felder

Einen Ausweg aus dieser Problematik bietet der folgende Kompromiss: Wir verzichten auf die Kenntnis des elektromagnetischen Feldes in mikroskopischen Dimensionen (Volumina von 10^{-24}cm^3 , Zeiten von 10^{-8}sec) und geben uns mit Mittelwerten (10^{-6}cm^3 , 10^{-3}sec) zufrieden. Anstelle von $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ treten dann Mittelwerte der Form

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int d^3x d\tau \rho(\mathbf{r} + \mathbf{x}, t + \tau)$$

und entsprechend für $\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \rangle$, $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle$ und $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle$. Aus den Maxwell-Gleichungen der mikroskopischen Felder ergeben sich dann Gleichungen ähnlicher Struktur für das makroskopische elektromagnetische Feld. Die darin auftretenden Verteilungen $\langle \rho \rangle$ und $\langle \mathbf{j} \rangle$ werden dann durch den experimentellen Aufbau definiert bzw. *eingestellt*.

Fundamentale und makroskopische Felder

Für die Beschreibung der elektromagnetischen Eigenschaften hat es sich als zweckmäßig erwiesen, zu den Mittelwerten der *fundamentalen* Felder, der

elektrischen Feldstärke \mathbf{E} und der
magnetischen Induktion \mathbf{B} ,

noch zwei weitere Vektorfelder als Hilfsgrößen einzuführen: die

dielektrische Verschiebung \mathbf{D} und die
magnetische Feldstärke \mathbf{H} .

Die dann zusätzlich benötigten Bestimmungsgleichungen gewinnt man durch Annahme eines linearen Zusammenhanges von \mathbf{E} und \mathbf{D} bzw. \mathbf{B} und \mathbf{H} , charakterisiert durch die

Dielektrizitätskonstante ϵ und die
Permeabilität μ .

Häufig ist die makroskopische Stromverteilung nicht von außen vorgebar, sondern noch von den zu berechnenden Feldern abhängig. Im einfachsten Fall (Ohm'sches Gesetz) setzt man einen linearen Zusammenhang zwischen makroskopischem Strom und

elektrischer Feldstärke an, womit (als Proportionalitätskonstante) eine weitere Materialkonstante ins Spiel kommt: die

elektrische Leitfähigkeit σ .

Die Berechnung dieser Materialkonstanten (ϵ, μ, σ) aus der atomaren Struktur der Materie gehört in den Bereich der Atom- und Festkörperphysik und benutzt Methoden der statistischen Mechanik.

Damit ergeben sich folgende **Aufgabenstellungen**:

- 1.) Übergang von den mikroskopischen zu den makroskopischen Maxwell-Gleichungen.
- 2.) Einführung von Materialkonstanten und ihre Berechnung aus der atomaren Struktur der Materie für einfache Modelle.
- 3.) Verhalten der Felder an Grenzflächen zwischen verschiedenen Medien. Beispiel: Das Reflexions- und Brechungs-Gesetz der Optik.

0.7 Literatur

An begleitender Literatur können folgenden Monographien verwendet werden:

1. D. J. Griffiths *Elektrodynamik, Eine Einführung* (Pearson, München 2011)
2. W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 3 *Elektrodynamik*, 8. Auflage, (Springer, Berlin- Heidelberg 2007)
3. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (Wiley, New York, 1962)
4. T. Fließbach, *Elektrodynamik*, (BI-Wiss.-Verl., Wien u.a., 1994)
5. R. J. Jelitto, *Theoretische Physik 3: Elektrodynamik*, (Aula-Verlag, Wiesbaden, 1985)
6. W. Greiner, *Klassische Elektrodynamik*, (Harri Deutsch, Thun, 1982)
7. P. Lorrain, D. Corson, *Electromagnetic fields and waves*, (Freeman, San Francisco, 1962)
8. G. Ludwig, *Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik, Band 2: Elektrodynamik, Zeit, Raum, Kosmos*, (Bertelsmann, Düsseldorf, 1974)
9. W. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, (Addison-Wesley, Reading, 1962)

10. R. Becker, F. Sauter, *Theorie der Elektrizität 1*,
(Teubner, Stuttgart, 1973)
11. L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*,
(Akademie-Verlag, Berlin, 1973)
12. A. Sommerfeld, *Elektrodynamik*,
(Harri Deutsch, Thun, 1977)
13. E. Rebhan, *Theoretische Physik*
(Spektrum-Verlag, Heidelberg, 1999)

Teil I
Elektrostatik

Kapitel 1

Coulomb'sches Gesetz

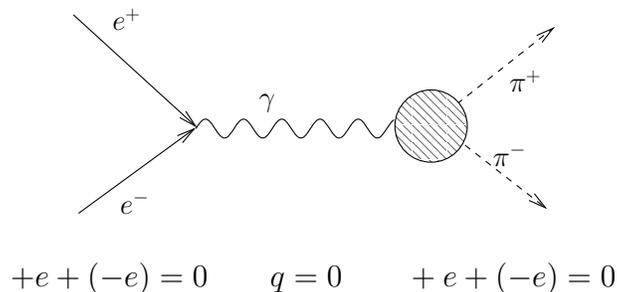
⋮

1.1 Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz

In der Einführung hatten wir die grundlegenden Eigenschaften der elektrischen Ladung kurz zusammengestellt. Zur experimentellen Prüfung dieser Eigenschaften benötigt man zunächst eine Messvorschrift für **Ladung**. Eine solche Messvorschrift wird im nächsten Unterkapitel nachgeliefert. Zuvor noch einige Ergänzungen zur *Ladungserhaltung und Ladungsinvarianz*.

Paarerzeugung

Besonders eindrucksvolle *Beweise für die Ladungserhaltung* sind die Paar-Erzeugung und Paar-Vernichtung. So zerstrahlen z.B. ein Elektron (e^-) und ein Positron (e^+) in ein hochenergetisches *massives* Photon (γ -Quant), welches ungeladen ist; umgekehrt entsteht bei der Paar-Erzeugung (z.B. in π^+ , π^- Mesonen) stets gleich viel positive wie negative Ladung.



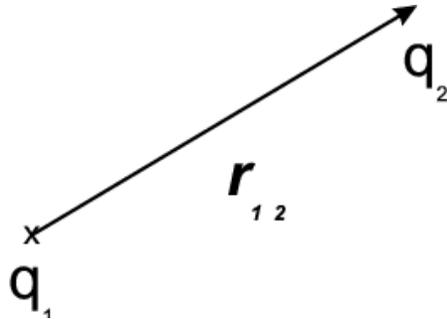
Die *Ladungsinvarianz zeigt sich* z.B. darin, dass *Atome und Moleküle neutral sind*, obwohl der *Bewegungszustand von Protonen und Elektronen sehr unterschiedlich ist*. Besonders klar ist das Beispiel des Helium-Atoms (${}^4\text{He}$) und des Deuterium-Moleküls (D_2). Beide bestehen aus 2 Protonen und 2 Neutronen sowie 2 Elektronen und sind damit elektrisch neutral, obwohl der Bewegungszustand der Protonen im Kern des Helium-Atoms und des D_2 -Moleküls sehr verschieden sind: das *Verhältnis der kinetischen Energien ist etwa 10^6* , der mittlere Abstand der Protonen im D_2 -Molekül in der Größenordnung von 10^{-8} cm, im He-Kern von 10^{-13} cm.

1.2 Coulomb-Kraft

Als experimentell gesicherte Grundlage für die Elektrostatik benutzen wir das **Coulomb'sche** Kraftgesetz zwischen 2 Punktladungen:

$$\mathbf{K}_{12} = \Gamma_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (1.1)$$

ist die von Ladung q_1 auf Ladung q_2 ausgeübte Kraft. Hierbei ist $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|$ und Γ_e eine noch zu bestimmende Proportionalitätskonstante.



Eigenschaften:

- 1.) Anziehung (Abstoßung) für ungleichnamige (gleichnamige) Ladungen.
- 2.) $\mathbf{K}_{12} = -\mathbf{K}_{21}$: Actio = Reactio; also ist der Impuls der beiden Teilchen erhalten.
- 3.) Zentralkraft: da eine Punktladung (beschrieben durch die skalaren Größen m, q) im Raum keine Richtung auszeichnet. (\rightarrow Drehimpulserhaltung)

Anmerkung: Für (schnell) bewegte Ladungen gilt (1.1) nicht mehr. Das elektromagnetische Feld ist dann in die Impuls- und Drehimpulsbilanz einzubeziehen.

Gleichung (1.1) ist zu ergänzen durch das **Superpositionsprinzip**:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{21} + \mathbf{K}_{31} \quad (1.2)$$

für die von 2 Punktladungen q_2 und q_3 auf q_1 ausgeübte Kraft.

Messvorschrift für Ladung

Vergleicht man 2 Ladungen q, q' anhand der von einer festen Ladung Q auf sie ausgeübten Kraft, so findet man für Punktladungen gemäß (1.1):

$$\frac{q}{q'} = \frac{K}{K'} \quad (1.3)$$

Damit sind Ladungsverhältnisse durch Kraftmessung zu bestimmen: Nach Wahl einer **Einheitsladung** (Ladung des Elektrons oder Positrons) können wir Ladungen relativ zu dieser Einheitsladung messen.

Maßsysteme

Für die Festlegung der Proportionalitätskonstanten Γ_e gibt es 2 Möglichkeiten:

i) Gauß'sches cgs-System: Hier wählt man Γ_e als dimensionslose Konstante; speziell

$$\Gamma_e = 1, \quad (1.4)$$

dann ist über (1.1) die Dimension der Ladung bestimmt zu

$$[q] = [\text{Kraft}]^{1/2}[\text{Länge}] = \text{dyn}^{1/2} \times \text{cm}. \quad (1.5)$$

Die elektrostatische Einheit ist dann diejenige Ladung, die auf eine gleich große im Abstand von 1 cm die Kraft 1 dyn ausübt. Das Gauß'sche **cgs-System** wird in der Grundlagenphysik bevorzugt.

ii) MKSA-System. Zusätzlich zu den mechanischen Einheiten (Meter, Kilogramm, Sekunde) wird noch die Ladungseinheit **Coulomb** = Ampère-Sekunde definiert. Dabei ist 1 Ampère der elektrische Strom, der aus einer Silbernitratlösung pro Sekunde 1.118 mg Silber abscheidet. Schreibt man

$$\Gamma_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.6)$$

so nimmt die Konstante ϵ_0 den Wert

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Newton} \cdot \text{Meter}^2} \quad (1.7)$$

an. Das **MKSA-System** hat sich in der angewandten Elektrodynamik (Elektrotechnik) durchgesetzt.

1.3 Das elektrische Feld eines Systems von Punktladungen

Die von N ruhenden Punktladungen q_i an der Orten \mathbf{r}_i auf eine Probeladung q am Ort \mathbf{r} ausgeübte Kraft ist nach (1.1) und (1.2):

$$\mathbf{K} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1.8)$$

wobei wir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (1.9)$$

als (statisches) **elektrisches Feld** bezeichnen, welches von den Punktladungen q_i am Ort \mathbf{r} erzeugt wird. Es ist gemäß (1.15) ein Vektorfeld, da q ein Skalar ist. Bei vorgegebener Ladung q zeigt (1.15), wie man ein elektrisches Feld messen kann. Dabei ist darauf zu achten, dass die Probeladung so klein ist, dass man ihren Einfluß auf das auszumessende Feld vernachlässigen kann.

Elektrisches Potential

Analog dem Fall der Gravitationstheorie in der Mechanik kann man die Vektor-Funktion $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aus dem elektrischen Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad (1.10)$$

einer skalaren Funktion, durch Differentiation gewinnen:

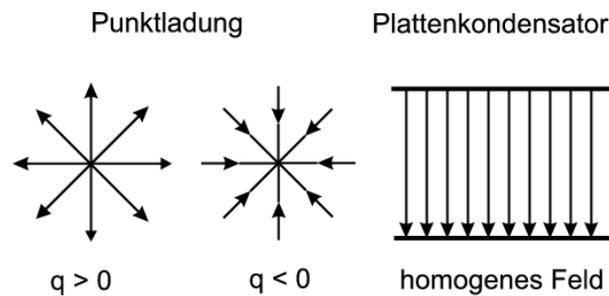
$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (1.11)$$

Die (potentielle) Energie der ruhenden Massenpunkte mit den Ladungen q_i ist dann

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi(\mathbf{r}_i), \quad (1.12)$$

wobei $\phi(\mathbf{r}_i)$ das Potential am Ort \mathbf{r}_i ist, welches die Ladungen dort erzeugen. Der Faktor (1/2) auf der rechten Seite von (1.12) korrigierte die Doppelzählung der Beiträge in der Summe $\sum_{i \neq j}$. Bemerkung: In (1.12) muss streng genommen die *Selbstenergie* für $i = j$ im rechten Ausdruck wieder abgezogen werden.

Beispiele:



1.4 Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen

Wir ersetzen

$$\sum_i q_i \dots \rightarrow \int dV \rho(\mathbf{r}) \dots, \quad (1.13)$$

wobei $\rho(\mathbf{r})$ die Ladungsdichte am Ort \mathbf{r} ist, mit der Normierung

$$Q = \sum_i q_i = \int dV \rho(\mathbf{r}). \quad (1.14)$$

Damit tritt anstelle von (1.9), (1.10), (1.12):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (1.15)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.16)$$

und

$$U = \frac{1}{2} \int dV \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}). \quad (1.17)$$

Beispiel: homogen geladene Kugel

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \quad \text{für} \quad |\mathbf{r}| \leq R; \quad \rho(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{sonst.} \quad (1.18)$$

Die Integration in (1.16) lautet (mit $r \equiv |\mathbf{r}|$ und $c = \cos \theta$):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\rho_0 \int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 dc (r^2 + r'^2 - 2r r' c)^{-1/2}$$

und ergibt (ÜB):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|} \quad \text{für} \quad r \geq R; \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right) \quad \text{für} \quad r \leq R \quad (1.19)$$

mit

$$Q = \int dV \rho(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3. \quad (1.20)$$

Dann folgt für \mathbf{E} aus (1.11):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad \text{für} \quad r \geq R; \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \mathbf{r} \quad \text{für} \quad r \leq R. \quad (1.21)$$

Für die Energie U findet man mit (1.17) und (1.19):

$$U = \frac{\rho_0}{2} \int dV \phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\rho_0^2}{2\epsilon_0} \int_0^R r^2 dr \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right) = 2\pi \frac{\rho_0^2}{\epsilon_0} \frac{2R^5}{15} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (1.22)$$

Anwendung: Bestimmung des klassischen Elektronenradius

Nach (1.22) wird die **Selbstenergie** eines punktförmigen Teilchens ($R \rightarrow 0$) unendlich. Nun ist nach der Relativitätstheorie die Energie eines ruhenden Teilchens, z. B. eines Elektrons, mit seiner Ruhemasse m_0 verknüpft durch

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (1.23)$$

Ein streng punktförmiges (geladenes) Teilchen hätte also nach (1.22) eine unendlich große Ruhemasse! Führen wir andererseits die gesamte (endliche) Ruhemasse eines Elektrons

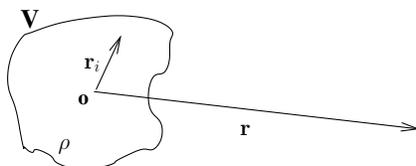
auf seine elektrostatische Energie zurück, so müssen wir dem Elektron einen endlichen Radius R_0 , den *klassischen Elektronenradius* zuordnen,

$$R_0 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} \approx 10^{-13} \text{ cm} = 1 \text{ fm} = 10^{-5} \text{ \AA} . \quad (1.24)$$

Für Dimensionen $< 10^{-13}$ cm müssen wir also für Elektronen mit Abweichungen vom Coulomb'schen Gesetz rechnen.

1.5 Multipolentwicklung

Wir betrachten eine auf ein *endliches Volumen V begrenzte Ladungsverteilung* (diskret oder kontinuierlich) und untersuchen ihr Potential ϕ in einem Punkt P weit außerhalb von V .



Der *Koordinatenursprung 0 möge innerhalb V liegen*; wir können z.B. 0 als Ladungsschwerpunkt, definiert durch

$$\mathbf{r}_q = \frac{\sum_i |q_i| \mathbf{r}_i}{\sum_i |q_i|} \quad (1.25)$$

wählen. Solange $r_i \ll r$, können wir (1.10) durch eine *Taylor-Reihe* darstellen,

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots , \quad (1.26)$$

wenn wir

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i + r_i^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - (2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i - r_i^2)/r^2}} \quad (1.27)$$

verwenden und in $(2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i - r_i^2)/r^2$ entwickeln. Mit $(1-x)^{-1/2} = 1 + x/2 + 3x^2/8 + O(x^3)$ ergibt sich:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{(2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i - r_i^2)}{r^3} + \frac{3}{8} \frac{(2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i - r_i^2)^2}{r^5} + \dots . \quad (1.28)$$

Wenn wir nun noch die Terme geeignet nach Potenzen von r_i/r etc. zusammenfassen, finden wir

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i)^2 - r_i^2 r^2}{r^5} + \dots . \quad (1.29)$$

Für das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ finden wir somit

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{r^k Q_{kl} r^l}{r^5} + \dots . \quad (1.30)$$

Die Terme bedeuten:

1.) Monopol-Anteil

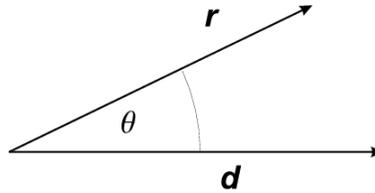
$$\phi_0(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.31)$$

Die Gesamtladung (oder **Monopolmoment**) $Q = \sum_i q_i$ erzeugt in 0. Näherung der Taylor-Entwicklung ein Feld, welches aus genügend großer Entfernung dem einer in 0 lokalisierten Punktladung entspricht.

2.) Dipol-Anteil

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{d \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.32)$$

Das **Dipolmoment** \mathbf{d} ist $\mathbf{d} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i$. Der Winkel θ ist der Winkel zwischen \mathbf{r} und \mathbf{d} :



Abhängigkeit des Dipolmoments vom Koordinatenursprung Verschiebt man den Ursprung 0 um \mathbf{a} , so wird

$$\mathbf{d}' = \sum_i q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) = \mathbf{d} - Q\mathbf{a}. \quad (1.33)$$

Falls $Q \neq 0$, kann man \mathbf{a} so wählen, dass $\mathbf{d}' = 0$ wird. Wenn dagegen $Q = 0$ ist, so wird dagegen $\mathbf{d} = \mathbf{d}'$ unabhängig vom Ursprung und das Dipolmoment beschreibt eine echte *innere* Eigenschaft des betrachteten Systems.

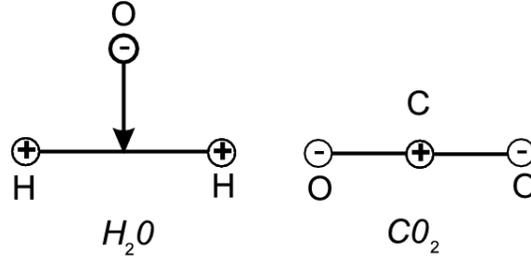
Konstruktionsanleitung: Man bestimme die Schwerpunkte der positiven bzw. negativen Ladungsträger. Fallen diese zusammen, so ist $\mathbf{d} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i = 0$. Andernfalls gibt ihre Verbindungslinie die Richtung von \mathbf{d} ; ihr Abstand ist ein Maß für den Betrag von \mathbf{d} .

Beispiel: Moleküle.

3.) Quadrupol-Anteil.

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{r^k Q_{kl} r^l}{r^5} \quad (1.34)$$

Aus $r^k Q_{kl} r^l = \sum_i q_i [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i)^2 - r_i^2 r^2]$ (siehe (1.29)) finden wir für die Elemente Q_{kl} des **Quadrupoltensors** Q :



$$Q_{kl} = \sum_i q_i (3r_i^k r_i^l - \delta_{kl} r_i^2)$$

(1.35)

Hierbei sind die Indizes $k, l = x, y, z$ (mit $\mathbf{r} = (r^x, r^y, r^z)$ und $\mathbf{r}_i = (r_i^x, r_i^y, r_i^z)$) und die Einstein'sche Summenkonvention gilt in (1.34). Der Quadrupol-Tensor ist symmetrisch und reell und kann daher stets diagonalisiert werden. Es besteht hier eine weitgehende Analogie zum Trägheitstensor in der Mechanik.

Im Hauptachsensystem ist der Quadrupol-Tensor (9) diagonal, $Q_{kl} = Q_k \delta_{kl}$. Wir finden, z.B. für Q_x ,

$$Q_x = \sum_i q_i (3x_i^2 - r_i^2) = \sum_i q_i (2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2) . \quad (1.36)$$

(1.36) zeigt, dass die Eigenwerte Q_k die Abweichungen von der Kugelsymmetrie beschreiben, denn für sphärische Ladungsverteilungen wird:

$$\sum_i q_i x_i^2 = \sum_i q_i y_i^2 = \sum_i q_i z_i^2 \rightarrow Q_m = 0. \quad (1.37)$$

Spezialfall: Axialsymmetrie

Wir betrachten Rotationsinvarianz um die z-Achse. Dann wird (1.36)

$$Q_x = Q_y = \sum_i q_i (x_i^2 - z_i^2) = -\frac{1}{2} \sum_i q_i (2z_i^2 - 2x_i^2) = -\frac{1}{2} Q_z, \quad (1.38)$$

d.h. der Quadrupol-Anteil $\phi_2(\mathbf{r})$ ist durch eine Zahl, das **Quadrupolmoment** $Q_0 \equiv Q_z/2$, zu kennzeichnen. Für diesen Fall ist die Winkelabhängigkeit von ϕ_2 (1.34) leicht anzugeben (wir verwenden $Q_z = 2Q_0$, $Q_x = Q_y = -Q_0$):

$$\begin{aligned} \phi_2(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_x x^2 + Q_y y^2 + Q_z z^2}{2r^5} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{2r^5} \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3z^2 - r^2)}{2r^5} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^3}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Gleichung (1.39) zeigt die für den Quadrupol-Anteil charakteristische r -Abhängigkeit; die Winkelabhängigkeit ist deutlich verschieden von der des Dipol-Terms (1.32).

Kontinuierliche Ladungsverteilungen

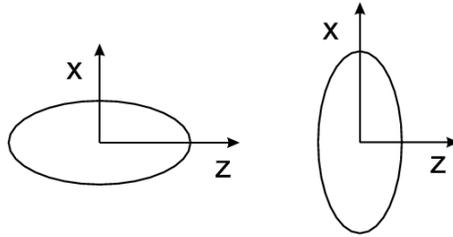
Analog zu Abschnitt 1.4 erhalten wir für eine kontinuierliche (räumlich begrenzte) Ladungsverteilung:

$$\mathbf{d} = \int dV \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}. \quad (1.40)$$

Analog wird Gleichung (1.36) zu:

$$Q_x = \int dV \rho(\mathbf{r})(2x^2 - y^2 - z^2). \quad (1.41)$$

Beispiel: Eine ganze Reihe von Atomkernen ist (axialsymmetrisch) deformiert und elektrostatisch durch ein Quadrupolmoment charakterisiert. Die Abweichungen von der Kugelsymmetrie können dabei sowohl *positiv*, $Q_0 > 0$, als auch *negativ*, $Q_0 < 0$, sein, was anschaulich einer *Zigarre* bzw. einer *Scheibe* entspricht.



E-Feld eines Dipols

Das **E**-Feld eines Dipols kann mit Hilfe von (1.32) und von

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = -\nabla \phi_1(\mathbf{r}) = -\nabla \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.42)$$

berechnet werden. Mit Hilfe der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{r} \nabla r^{-3} + r^{-3} \nabla \mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r} 3 r^{-4} \frac{\mathbf{r}}{r} - r^{-3} \mathbf{d} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} (3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - r^2 \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (1.43)$$

Kapitel 2

Grundlagen der Elektrostatik

2.1 Fluss eines Vektor-Feldes

Wir wollen im folgenden nach äquivalenten Formulierungen des Coulomb'schen Gesetzes suchen. Dazu führen wir den Begriff des Flusses eines Vektor-Feldes ein.

Ein Vektor-Feld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ sei auf einer Fläche F definiert. F sei *messbar* und *zweiseitig*, d.h. F möge einen endlichen Flächeninhalt besitzen und *Ober-* und *Unterseite* von F seien (durch die Flächennormale \mathbf{n}) wohl definiert. **Gegenbeispiel:** das Möbius'sche Band.

Den Fluss Φ_F des Vektor-Feldes \mathbf{A} durch die Fläche F definieren wir dann durch das Oberflächenintegral

$$\Phi_F = \int_F \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} = \int_F A_n df, \quad (2.1)$$

wobei $A_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ die Komponente von \mathbf{A} in Richtung der Flächennormalen \mathbf{n} ist. Das gerichtete Flächenelement $d\mathbf{f}$ ist parallel zu \mathbf{n} , $df = |d\mathbf{f}|$.

Zur Interpretation von (2.1) betrachten wir eine Flüssigkeitsströmung mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ und der Dichte $\rho(\mathbf{r})$. Wählen wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad (2.2)$$

so bedeutet

$$\int_F \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f} = \int_F \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} \quad (2.3)$$

die pro Zeiteinheit durch F fließende Menge Flüssigkeit. (2.3) zeigt, dass nur die senkrecht zur Strömung stehende Fläche wirksam wird.

2.2 Satz von Gauß: Anwendung auf die Elektrostatik

Wir wählen nun für \mathbf{A} das elektrostatische Feld \mathbf{E} und für F eine geschlossene Fläche mit den oben erwähnten Eigenschaften, die das Volumen V_F abgrenzt. Dann ist der **Fluss des elektrischen Feldes**

$$\Phi_F = \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \quad (2.4)$$

Der Satz von Gauß sagt, daß Φ_F gleich dem Volumenintegral der Divergenz von \mathbf{E} in V_F ist:

$$\Phi_F = \int_{V_F} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV . \quad (2.5)$$

Wir benutzen für \mathbf{E} den Ausdruck (1.15) zusammen mit der für die Elektrodynamik wichtigen Beziehung (siehe (A.23), Sec.A.6.5)

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) , \quad (2.6)$$

das gibt für die Divergenz des elektrischen Feldes [mehr in B.1.2] :

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} . \quad (2.7)$$

Wir benutzen (2.7) in (2.5) und erhalten

$$\Phi_F = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_F} dV \rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} , \quad (2.8)$$

wo Q die in dem Volumen V enthaltene Gesamtladung ist. Aus (2.8) sehen wir also, dass der Gesamtfluss des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Oberfläche F durch die darin enthaltene Ladung verursacht wird. Die Ladung ist also eine „Quelle“ für die elektrischen Feldlinien.

2.3 Anwendungen des Gauß'schen Satzes

Für symmetrische Ladungsverteilungen bietet (2.8) die Möglichkeit, die Feldstärke \mathbf{E} mit geringem Aufwand zu berechnen. Wir betrachten 2 Beispiele:

1.) Feld einer homogen-raumgeladenen Kugel

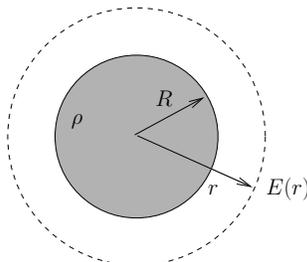
Sei

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r) \quad \text{für } r \leq R, \quad \rho(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{sonst.} \quad (2.9)$$

Aufgrund der Kugelsymmetrie ist \mathbf{E} radial gerichtet, so dass

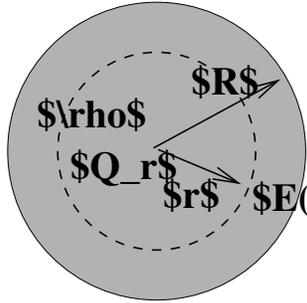
$$\Phi_F = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_r}{\epsilon_0} , \quad (2.10)$$

wobei Q_r die in einer konzentrischen (imaginären) Kugel mit Radius r enthaltene Ladung ist.



Für Punkte mit $r \geq R$ ist $Q_r = Q$ die Gesamtladung und es folgt aus (2.10):

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{für } r \geq R. \quad (2.11)$$



Für $r \leq R$ hängt das Ergebnis von der speziellen Form von $\rho(r)$ ab. Als Beispiel wählen wir

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{const}, \quad (2.12)$$

dann wird:

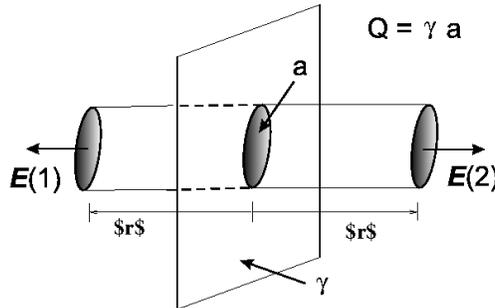
$$Q_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0, \quad (2.13)$$

also wie in (1.21):

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_r}{r^2} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r. \quad (2.14)$$

Man vergleiche den Rechenaufwand hier mit dem, den Gleichung (1.15) erfordert!

2.) Homogen geladene, unendlich ausgedehnte Ebene



Aus Symmetriegründen steht \mathbf{E} senkrecht zur Ebene, der Betrag E ist gleich für die Punkte 1 und 2, welche von der Ebene den gleichen Abstand r haben mögen. Der Gauß'sche Satz ergibt dann:

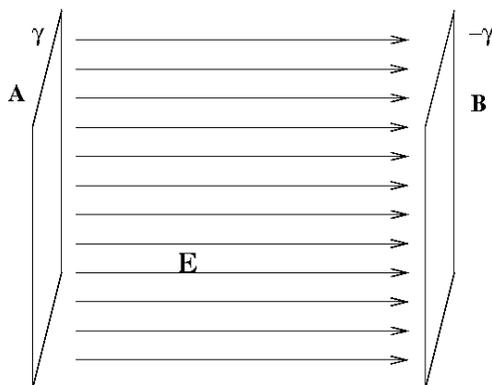
$$\Phi_F = \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = aE(1) + aE(2) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\gamma a}{\epsilon_0}, \quad (2.15)$$

wo a die Zylindergrundfläche ist und γ die Flächenladungsdichte. Vom Zylinder-Mantel erhält man keinen Beitrag, da \mathbf{E} keine Komponente in Richtung der Normalen auf dem Zylinder-Mantel hat. Ergebnis:

$$E = \frac{\gamma}{2\epsilon_0} \quad (2.16)$$

unabhängig von r .

Ein **Plattenkondensator** besteht aus zwei parallele Ebenen mit entgegengesetzte Flächeladungsdichten γ und $-\gamma$, so dass aus (2.16) verschwindet das \mathbf{E} -Feld ausserhalb der Ebenen. Zwischen den Ebenen ist das Gesamtfeld (in Betrag) $\mathbf{E} = \frac{\gamma}{\epsilon_0}$.



Das Potential zwischen den Ebenen wird bestimmt durch $\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E} \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$. Die Potentialdifferenz (Spannung) zwischen den beiden Ebenen ist also $V = \phi(A) - \phi(B) = E d$, wo d der Abstand zwischen den Ebenen ist.

Die Kapazität eines Kondensators mit Gesamtfläche F , der also eine Gesamtladung $Q = F\gamma$ speichert ist definiert als

$$C \equiv \frac{Q}{V} \tag{2.17}$$

und ist gleich

$$C = \frac{F\gamma}{d\gamma/\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 F}{d} \tag{2.18}$$

und hängt nur von der Geometrie des Kondensators ab.

2.4 Differentialgleichungen für das elektrische Feld und Potential

Alternativ kann die Beziehung (2.8) zwischen Divergenz von \mathbf{E} und Gesamtladung in der differentiellen Form (2.7) ausgedrückt werden:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} . \tag{2.19}$$

Man kann also (2.19) - statt des Coulomb-Gesetzes (1.15) als Grundlage für die Elektrostatik („Postulat“) nehmen. In der Tat ist (2.19) eine der *Maxwell Gleichungen* für das elektrische Feld.

Geht man von (2.19) aus sieht man, dass diese Gleichung sich nicht verändert, wenn man zu \mathbf{E} eine beliebige divergenzfreie Vektorfunktion \mathbf{E}' addiert; Gleichung (2.19) reicht daher zur Bestimmung des elektrischen Feldes nicht aus.

Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes

Eine weitere differenzielle Beziehung für \mathbf{E} erhalten wir aus der Tatsache, dass \mathbf{E} ein konservatives Feld ist (vgl. (1.11)):

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (2.20)$$

wobei ϕ hier das elektrische Potential ist. Gleichung (2.20) ist über die Vektoridentität (ÜB)

$$\nabla \times (\nabla f) = 0, \quad (2.21)$$

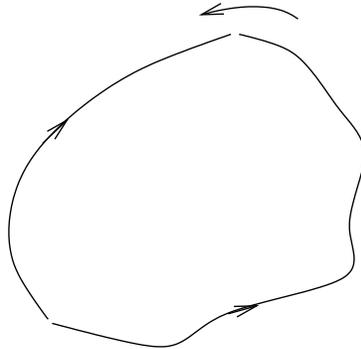
äquivalent zur *Wirbelfreiheit*

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0} \quad (2.22)$$

des elektrischen Feldes.

Für gegebenes \mathbf{E} -Feld, kann man das Potential ϕ aus der Inversion von (2.20) (bis auf einer Konstante) erhalten, nämlich:

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}_0) - \int_{C(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r})} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}', \quad (2.23)$$



i. e. mit einem Kurvenintegral des \mathbf{E} -Feldes von einem gegebenen Startpunkt \mathbf{r}_0 zum Aufpunkt \mathbf{r} . Dadurch, dass \mathbf{E} konservativ ist, hängt das Integral in (2.23) nur vom Anfang- und Endpunkt, nicht aber von der Wahl der Verbindungskurve $C(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r})$ ab. Das kann man auch mit Hilfe des Stokschen Satzes beweisen. Wir berechnen die Differenz zwischen den Integralen (2.23) auf zwei unterschiedlichen Kurven C_1 und C_2 :

$$\left(\int_{C_1(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r})} - \int_{C_2(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r})} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' = \oint_D \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' \quad (2.24)$$

wo D die geschlossene Kurve, die aus C_1 und C_2 besteht, ist. Aus dem Stokschen Satz haben wir

$$\oint_D \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' = \int_F \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \quad (2.25)$$

was, wegen $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, verschwindet. Dieses Ergebnis gilt nicht mehr in der Elektrodynamik. Da ist das \mathbf{E} -Feld nicht mehr konservativ und (2.23) gilt nicht mehr, da das Integral von der Verbindungskurve abhängig ist.

Im Prinzip reichen Gl. (2.19) und (2.22) aus, um die Feldstärke des elektrostatischen Feldes für gegebene Randbedingungen (siehe Kap. 3) zu bestimmen.

Poisson'sche Gleichung

In der Praxis geht man noch einen Schritt weiter von der Feldstärke \mathbf{E} zum Potential ϕ , aus dem sich durch Differentiation gemäß (2.20) \mathbf{E} gewinnen lässt. Setzt man (2.20) in (2.19) ein, so erhält man

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \boxed{\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (2.26)$$

die *Poisson'sche Gleichung* mit der Abkürzung

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.27)$$

für den *Laplace-Operator* ∇^2 (öfter auch mit Δ bezeichnet).

Laplace Gleichung

Hat man eine Lösung von (2.26) gefunden, so kann man dazu eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung, der *Laplace-Gleichung*,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.28)$$

addieren und erhält eine neue Lösung von (2.26). Diese Mehrdeutigkeit kann man durch Vorgabe von Randbedingungen beseitigen. Für die weitere Diskussion sei auf Kapitel 3 verwiesen!

2.5 Energie des elektrostatischen Feldes

Um eine Punktladung q_1 aus dem Unendlichen an eine Ladung q_2 auf den Abstand r_{12} heranzubringen, benötigt (oder gewinnt) man die Energie

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (2.29)$$

Will man aus N Punktladungen q_i eine bestimmte (durch die Abstände der Ladungen q_i charakterisierte) Ladungsanordnung aufbauen, so benötigt (oder gewinnt) man entsprechend die Energie (siehe auch (1.12))

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} ; \quad (2.30)$$

der Faktor 1/2 sorgt dafür, dass Doppelzählungen vermieden werden, die Einschränkung $i \neq j$ schließt *Selbstenergien* der Punktladungen aus.

Punktladungen vs. Feldenergie

Stellt man das Bild der Punktladungen in den Mittelpunkt der Betrachtungen, so interpretiert man U als die *potentielle Energie* eines Systems von geladenen Massenpunkten. Man kann auch das Bild des elektrischen Feldes in den Mittelpunkt stellen. Dann ist die zum

Aufbau des elektrischen Feldes benötigte Energie U im elektrischen Feld *gespeichert* in Form von *Feldenergie*. Da die Coulomb-Kraft konservativ ist, geht die beim Aufbau des Feldes (also der Herstellung einer bestimmten Ladungsanordnung) geleistete Arbeit nicht verloren.

Energie des elektrischen Feldes

Um den Zusammenhang der beiden Betrachtungsweisen quantitativ zu fassen, formen wir (2.30) um (vergl. Kapitel 1):

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV, \quad (2.31)$$

wobei $\phi(\mathbf{r}_i)$ das Potential am Ort \mathbf{r}_i der i -ten Punktladung ist, welches die anderen Punktladungen dort erzeugen. Gleichung (2.31) können wir mit (2.26) umschreiben zu:

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \phi(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) dV. \quad (2.32)$$

Gleichung (2.32) beschreibt die Energie U vollständig durch das Potential ϕ , d.h. durch das elektrostatische Feld ohne Bezug auf die Ladungen, die dieses Feld erzeugt haben. Man kann U statt durch das Potential ϕ durch die Feldstärke \mathbf{E} ausdrücken, wenn man die Identität (vgl. die II Green'sche Identität aus der Vektoranalysis)

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = (\nabla f) \cdot (\nabla g) + f \nabla^2 g \quad (2.33)$$

für $f = g = \phi$ benutzt:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 dV - \frac{\epsilon_0}{2} \oint_F \phi \nabla \phi \cdot d\mathbf{f}, \quad (2.34)$$

wo im letzten Ausdruck die Gauß'sche Formel angewendet worden ist, wonach

$$\int_V \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dV = \oint_F \phi \nabla \phi \cdot d\mathbf{f} \quad (2.35)$$

mit F als Oberfläche von V . Wenn sich nun alle Ladungen im Endlichen befinden, so verschwindet in (2.34) das Oberflächenintegral mit zunehmendem Volumen V , da $\phi \nabla \phi$ mit wachsendem Abstand vom Ladungszentrum wie R^{-3} abfällt, während die Oberfläche nur mit R^2 anwächst. Im Limes $V \rightarrow \infty$ bleibt also:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV \quad (2.36)$$

als die im Feld gespeicherte Energie.

$$\boxed{\epsilon_0 E^2(\mathbf{r})/2}$$

ist somit die *Energiedichte* des elektrischen Feldes.

2.6 Multipole im elektrischen Feld

Wenn eine räumlich lokalisierte Ladungsverteilung ρ in ein äußeres elektrostatisches Feld, gegeben durch sein Potential ϕ_a , gebracht wird, so gilt (entsprechend den Überlegungen von Abschnitt 2.5) für seine Energie

$$U = \int_V \rho(\mathbf{r})\phi_a(\mathbf{r}) dV , \quad (2.37)$$

wenn man annimmt, dass das äußere Feld durch ρ nicht (merklich) geändert wird und die das äußere Feld ϕ_a hervorrufenden Ladungen sich außerhalb des Gebietes V befinden, auf das ρ beschränkt ist. (Vorsicht: wir betrachten hier die Energie der Ladungsverteilung ρ in einer *gegebenen* Ladungsverteilung. Die Energie der letzteren wird daher hier nicht gezählt. Damit erklärt sich das Fehlen des Faktors 1/2 in (2.37) verglichen mit (2.31)). Weiter sei ϕ_a in V langsam veränderlich, so dass wir ϕ_a bzgl. des Ladungsschwerpunktes in eine Taylor-Reihe entwickeln können:

$$\phi_a(\mathbf{r}) = \phi_a(0) + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial \phi_a(0)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \frac{\partial^2 \phi_a(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \quad (2.38)$$

Da im Gebiet V für das äußere Feld

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_a = 0 \quad (2.39)$$

nach Annahme gilt, können wir (vergl. Abschnitt 1.5) Gleichung (2.38) wie folgt umformen:

$$\phi_a(\mathbf{r}) = \phi_a(0) - \sum_{i=1}^3 x_i E_{ia}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_{ia}(0)}{\partial x_j} + \dots , \quad (2.40)$$

denn

$$\sum_{i,j} (-r^2) \delta_{ij} \frac{\partial E_{ia}}{\partial x_j} = -r^2 \sum_i \frac{\partial E_{ia}}{\partial x_i} = -r^2 \nabla \cdot \mathbf{E}_a = 0 .$$

Kombination von (2.37) und (2.40) ergibt zusammen mit $Q_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{r}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})$ (siehe (9))

$$U = Q\phi_a(0) - \sum_{i=1}^3 d_i E_{ia}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{\partial E_{ia}(0)}{\partial x_j} + \dots \quad (2.41)$$

Gleichung (2.41) zeigt, wie die Multipolmomente einer Ladungsverteilung ρ mit einem äußeren Feld \mathbf{E}_a in Wechselwirkung treten:

- die Gesamtladung Q mit dem Potential ϕ_a ,
- das Dipolmoment \mathbf{d} mit der Feldstärke \mathbf{E}_a ,
- der Quadrupoltensor Q_{ij} mit dem Feldgradienten $\partial E_{ia}/\partial x_j$, etc.

Anwendungsbeispiele

Atomare Dipole in äußeren elektrischen Feldern, Wechselwirkung des Kern-Quadrupolmoments mit der Elektronenhülle (nützlich für NMR, NQR).

Kapitel 3

Randwertprobleme der Elektrostatik

3.1 Eindeigkeitstheorem

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass die Poisson-Gleichung bzw. die Laplace-Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt, wenn eine der folgenden Randbedingungen gilt:

(i) Dirichlet - Bedingung

$$\phi \text{ ist vorgegeben auf einer geschlossenen Fläche } F, \text{ oder} \quad (3.1)$$

(ii) von Neumann-Bedingung

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi (\equiv \frac{\partial \phi}{\partial n}) \text{ ist auf einer geschlossenen Fläche } F \text{ vorgegeben,} \quad (3.2)$$

\mathbf{n} ist die Normale zur Fläche F .

Beweis

Wir nehmen an, dass es 2 Lösungen ϕ_1 bzw. ϕ_2 von

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (3.3)$$

mit den gleichen Randbedingungen, (3.1) oder (3.2), gibt. Dann gilt für die Differenz $U = \phi_1 - \phi_2$:

$$\nabla^2 U = 0 \quad (3.4)$$

in dem von F umschlossenen Volumen V . Weiter ist wegen der Randbedingungen

$$U = 0 \quad \text{auf } F \quad (3.5)$$

oder

$$\mathbf{n} \cdot \nabla U = 0 \quad \text{auf } F. \quad (3.6)$$

Mit der Identität

$$\nabla \cdot (U \nabla U) = (\nabla U)^2 + U \nabla^2 U \quad (3.7)$$

und (3.4) wird:

$$\int_V (\nabla U)^2 dV = \int_V \left(\nabla \cdot (U \nabla U) - \underbrace{U \nabla^2 U}_{=0} \right) dV = \oint_F \underbrace{U \nabla U \cdot d\mathbf{f}}_{=0} = 0 \quad (3.8)$$

mit Hilfe der Formel von Gauß, falls eine der beiden Bedingungen (3.5) oder (3.6) gilt. Also:

$$\int_V (\nabla U)^2 dV = 0, \quad (3.9)$$

d.h. es ist in V :

$$\nabla U = 0, \quad (3.10)$$

da $(\nabla U)^2 \geq 0$. Damit wird

$$U = \text{const} \quad (3.11)$$

und ϕ_1 und ϕ_2 unterscheiden sich höchstens um eine Konstante, die den \mathbf{E} -Feld nicht beeinflusst.

Sonderfall $V \rightarrow \infty$

Wenn V der gesamte R_3 ist, so ist die Lösung der Poisson-Gleichung eindeutig, falls ρ auf einen endlichen Bereich beschränkt ist und $\phi(\mathbf{r})$ asymptotisch so schnell abfällt, dass

$$r^2 \phi(\mathbf{r}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial n} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \quad (3.12)$$

wo $\partial \phi / \partial n$ die Normalen-Ableitung von ϕ bezeichnet. Der obige Beweis überträgt sich direkt, wenn man beachtet, dass die Oberfläche bei festem Rauminhalt wie r^2 wächst.

3.1.1 Physikalische Anwendungen: Metalle

Warum interessieren wir uns für Probleme mit Randbedingung? Betrachten wir zunächst die Eigenschaften eines *idealen* Metalles (Leiters) *im statischen Fall*. Ein ideales Metall ist ein Gegenstand, der nur frei bewegliche Ladungen (i.d.r. Elektronen) besitzt. Wird ein solcher idealer Leiter in ein elektrostatisches Feld gebracht, so wirken auf die freien Ladungen Kräfte, welche die Ladungen so lange verschieben, bis sich ein Gleichgewichtszustand einstellt. Das \mathbf{E} -Feld der verschobenen Ladungen addiert sich dann zum ursprünglichen \mathbf{E} -Feld. Was zählt ist das gesamte \mathbf{E} -Feld.

Die Gleichgewichtbedingungen sind:

(i) $\mathbf{E} = 0$ *innerhalb des ganzen Metalles*. Wäre dies nicht der Fall, so würden die frei beweglichen Ladungen Kräfte erfahren, welche zu einer Umverteilung der Ladungsträger im Metall führen, bis $\mathbf{E} = 0$.

(ii) wegen (i) ist ϕ **konstant im ganzen Metall**.

(iii) wegen (ii) und der Poisson Gleichung (2.26), **verschwindet die Ladungsdichte innerhalb des Metalles**. Im idealen Metall kann sich nur eine verschwindend dünne Ladungsschicht (Flächenladung) auf der Oberfläche des Metalles befinden.

Wir sind bereits in Gl. (2.15) der Flächeladungsdichte γ begegnet. In einem Metall hängt γ im Allgemeinen vom der Ortskoordinate \mathbf{r} auf der Metalloberfläche ab:

$\gamma(\mathbf{r}) = (\text{Ladung pro Fläche})$. Wir betrachten die Komponenten des \mathbf{E} -Feldes parallel (\mathbf{E}_{\parallel}) und senkrecht ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$, wo \mathbf{n} die Normale ist) zur Metalloberfläche.

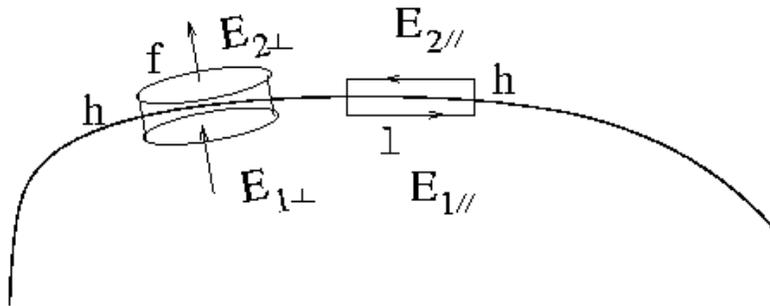
(iv) Es sei \mathbf{E}_2 das \mathbf{E} -Feld auf der Außenseite und \mathbf{E}_1 auf der Innenseite des Metalles [eigentlich ist aus (i) $\mathbf{E}_1 = 0$ im Metall, aber wir wollen das zunächst allgemein betrachten], dann möchten wir zeigen, dass

$$\mathbf{E}_{1\parallel} = \mathbf{E}_{2\parallel} , \quad (3.13)$$

d. h. die Parallelkomponente ist stetig durch die Oberfläche, sowie

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \frac{\gamma(\mathbf{r})}{\epsilon_0} , \quad (3.14)$$

d. h. die Normalkomponente hat eine Unstetigkeit, die proportional zu γ ist.



Um dies zu beweisen, benutzen wir die Integralform des Gauß'schen Satzes, sowie die Wirbelfreiheit von \mathbf{E} (2.22). Aus zwei kleinen Flächenelementen (mit Fläche f), die parallel zur Oberfläche liegen, bilden wir ein Volumenelement $V = f h$ (Skizze). Der Abstand h zwischen den beiden Flächenelementen wird dabei (verschwindend) klein gewählt ($h^2 \ll f$). Nach dem Gauß'schen Satz ist die Gesamtladung $q = f \gamma$ im Volumenelement proportional zum Fluss Φ_V des \mathbf{E} -Feldes durch die Fläche um V ist.

$$\Phi_V = \frac{q}{\epsilon_0} = f \frac{\gamma(\mathbf{r})}{\epsilon_0} , \quad (3.15)$$

Für verschwindend kleines h können wir den Fluss durch die Seitenflächen vernachlässigen, und wir haben

$$\Phi_V = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) f . \quad (3.16)$$

Das gibt (3.14).

Aus zwei kleinen Linienelementen der Länge l , die parallel zur Metalloberfläche liegen und die den (verschwindend kleinen) Abstand h haben (Abb.) bilden wir die Fläche $F = h l$. Dann bekommen wir aus $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ und den Stokes'schen Satz:

$$0 = \oint_{\partial F} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = l (E_{2\parallel} - E_{1\parallel}) , \quad (3.17)$$

wobei der Beitrag zum Linienintegral entlang h vernachlässigt werden kann. Das beweist (3.13).

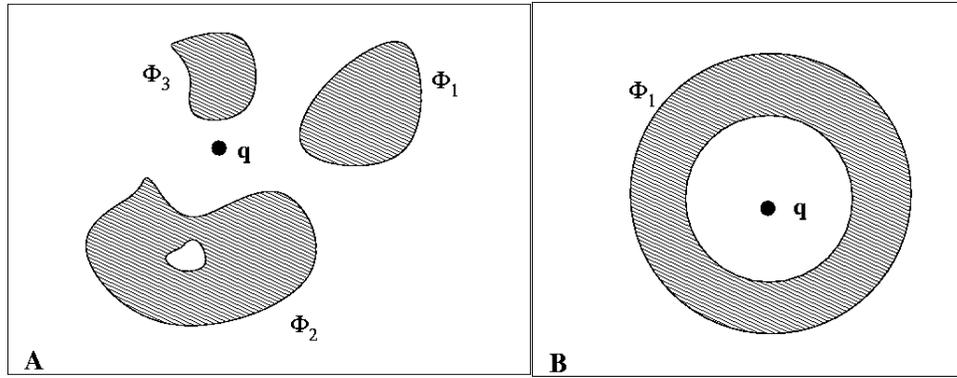


Abbildung 3.1: {metall}

In einem Metall, in dem $\mathbf{E}_1 = 0$, erhalten wir daher aus (3.13) und (3.14)

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2 = \frac{\gamma(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \mathbf{E}_{2\parallel} = 0. \quad (3.18)$$

Typische Dirichlet-Probleme sind Probleme mit gegebener Ladungsdichte in der Nähe eines oder mehrere Metallstücke (Fig. 3.1) (A), die evtl. den physikalischen Raum umgeben (B). Ein Von Neumann Problem kann man sich vorstellen für ein Metall bei dem die Flächeladungsdichte (und aus (3.14) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$) vorgegeben ist.

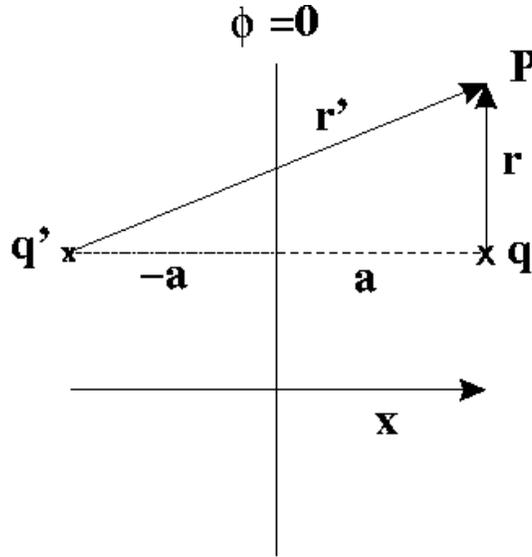
Wir werden Methoden studieren, die uns erlauben für gegebene Randbedingungen und Ladungsverteilung *eine* Lösung der Poissongleichung zu finden. *Das Eindeutigkeitstheorem (Sec. 3.1) garantiert, dass diese Lösung die einzige ist.*

3.2 Spiegelladung

Diese Methode zur Lösung des Randwertproblems besteht darin, *außerhalb des zu untersuchenden Bereichs V* sogenannte Spiegel-Ladungen *geeigneter Größe so anzubringen, dass mit ihrer Hilfe gerade die geforderten Randbedingungen erfüllt werden.* Dieses Verfahren ist deshalb erlaubt, weil man zur Lösung der (inhomogenen) Poisson-Gleichung jede Lösung der (homogenen) Laplace-Gleichung (*in V*) addieren darf (vgl. Abschnitt 2.4). Durch die Spiegelungsmethode wird diejenige Lösung der Laplace-Gleichung ausgewählt, die addiert mit der gewählten speziellen (bekannten) Lösung der Poisson-Gleichung (die einzelstehende Ladung) die geforderten Randbedingungen erfüllt.

3.2.1 Punktladung vor leitender Ebene

Als einfaches Beispiel betrachten wir eine Punktladung q im Abstand a von einer leitenden Ebene, welche geerdet sei (d.h. $\phi = 0$ auf der Ebene). Die Spiegelladung q' denken wir uns bzgl. der Ebene spiegelsymmetrisch zu q angebracht (Skizze).



Dann beträgt das Potential im Punkt P:

$$(4\pi\epsilon_0) \phi(P) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \quad (3.19)$$

und wir erhalten wie gefordert $\phi = 0$ für alle Punkte der leitenden Ebene, $x = 0$, wenn wir wählen:

$$q' = -q. \quad (3.20)$$

In dem (uns interessierenden) Bereich $x > 0$ ist $q/(4\pi\epsilon_0 r)$ eine spezielle Lösung der Poisson-Gleichung, $q'/(4\pi\epsilon_0 r')$ eine Lösung der Laplace-Gleichung, die gerade dafür sorgt, dass für $x = 0$ die geforderte Randbedingung gilt.

Elektrisches Feld und Influenzladung

Für die x -Komponente des elektrischen Feldes \mathbf{E} erhält man aus (3.19) und (3.20) [mehr in B.1.1] :

$$E_x(P) = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x-a}{r^3} - \frac{x+a}{r'^3} \right), \quad (3.21)$$

also gilt für die Ebene $x = 0$,

$$E_x(x=0) = -\frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (3.22)$$

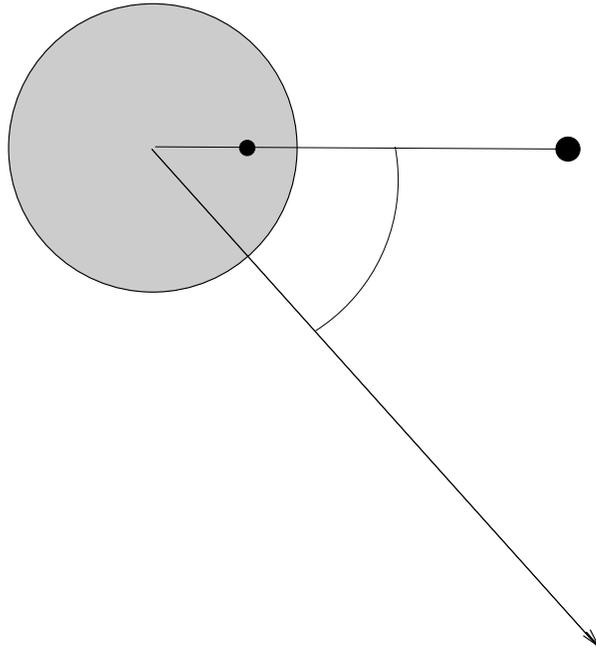
Die parallelen Komponenten von \mathbf{E} auf der $x = 0$ Ebene verschwinden wegen (3.13), und da $\mathbf{E}_1 = 0$. Gl. (3.22) bedeutet nach (3.14), dass in der Ebene $x = 0$ eine Ladung mit der (ortsabhängigen) Flächendichte

$$\gamma = \epsilon_0 E_x(x=0) = -\frac{qa}{2\pi r^3} \quad (3.23)$$

durch die Anwesenheit der Punktladung q induziert wird (Influenzladung). Das ist die tatsächliche Ladung, die das Potential (3.19) erzeugt.

3.2.2 Punktladung vor leitender Kugel

Als weiteres Beispiel betrachten wir eine Punktladung q gegenüber einer leitenden Kugel (Radius R), welche sich auf dem Potential $\phi = 0$ befinden soll. r_q sei der Abstand der Ladung vom Mittelpunkt der Kugel, den wir als Koordinatenursprung nehmen. Die Ladung befindet sich im Ortspunkt \mathbf{r}_q , mit Kugelkoordinaten $(r_q, 0, 0)$.



Es sei $\phi(r, \theta, \varphi)$ das Potential, das durch diese Punktladung am Ort $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ (in Kugelkoordinaten) erzeugt wird:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos \gamma}}. \quad (3.24)$$

Wo γ der Winkel zwischen \mathbf{r} und \mathbf{r}_q ist

Um das Problem zu lösen verwenden wir nochmals eine (virtuelle) Spiegelladung \bar{q} , die sich **innerhalb** der Kugel im Punkt $\bar{\mathbf{r}}_q$ befindet, mit $\bar{\mathbf{r}}_q = (\bar{r}_q, 0, 0)$. Das Potential aus dieser zweiten Ladung ist also

$$\bar{\phi}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{q}}{\sqrt{r^2 + \bar{r}_q^2 - 2r\bar{r}_q \cos \gamma}}. \quad (3.25)$$

Für einen Punkt auf der Kugeloberfläche $r = R$ formen wir (3.25) um, indem wir Zähler und Nenner mit R/\bar{r}_q multiplizieren:

$$4\pi\epsilon_0 \bar{\phi}(R, \theta, \varphi) = \frac{\bar{q}}{\sqrt{R^2 + \bar{r}_q^2 - 2R\bar{r}_q \cos \gamma}} = \frac{R}{\bar{r}_q} \frac{\bar{q}}{\sqrt{\frac{R^4}{\bar{r}_q^2} + R^2 - 2R\frac{R^2}{\bar{r}_q} \cos \gamma}} \quad (3.26)$$

Man kann sich leicht vergewissern, dass für

$$\bar{r}_q = \frac{R^2}{r_q} \quad (3.27)$$

und

$$\bar{q} = -\frac{R}{r_q}q \quad (3.28)$$

$\bar{\phi}$ das gesuchte Potential liefert. In der Tat, haben wir mit dieser Wahl:

$$4\pi\epsilon_0\bar{\phi}(R, \theta, \varphi) = -\frac{r_q}{R} \frac{R}{r_q} q \frac{1}{\sqrt{r_q^2 + R^2 - 2Rr_q \cos \gamma}}, \quad (3.29)$$

was sich auf der Kugeloberfläche $r = R$ genau mit (3.24) weghebt. Das Gesamtpotential

$$\phi(r, \theta, \varphi) + \bar{\phi}(r, \theta, \varphi) \quad (3.30)$$

mit (3.24), (3.25), (3.27), (3.28) ist eine Lösung der Poisson Gleichung ausserhalb der Kugel, die auf der Kugeloberfläche $r = R$ identisch verschwindet. Nach dem Eindeutigkeitstheorem ist diese die einzige Lösung mit den gegebenen Randbedingungen und somit die gesuchte Lösung.

3.3 Greensfunktionen

Die Ergebnisse aus dem Kap. 3.2 können leicht für *mehrere Ladungen* im betrachteten Volumen und daher für eine beliebige Ladungsdichteverteilung $\rho(\mathbf{r})$ verallgemeinert werden. Wegen des *Superpositionsprinzips trägt jede Ladung unabhängig zum Potential bei*. Zusammen mit ihrer Abbildung ist der Beitrag von jeder Ladung zum Potential auf der Leiteroberfläche gleich 0, wie es sein muss.

In diesen Beispielen besteht das Gesamtpotential ϕ aus zwei Teilen: ein Teil, ϕ_p , ist das übliche Potential einer Ladungsdichte im Vakuum (1.16), und erfüllt die Poissongleichung (2.26), der zweite Teil ϕ_0 erfüllt die Laplacegleichung $\nabla^2\phi_0 = 0$ im betrachteten Raum, und ist so gewählt, dass das Gesamtpotential $\phi = \phi_p + \phi_0$ die Randbedingungen erfüllt.

Diese Vorgangsweise hat den Nachteil, dass ϕ_0 von den Randwerten und von ρ abhängt. Es wäre wünschenswert, wenn man mit Funktionen arbeiten könnte, welche nur von der Form der Berandung abhängen. Dies gelingt mit Hilfe der Technik der Greensfunktionen. Die Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ genügt der Poissonschen Differentialgleichung

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\epsilon_0} \quad (3.31)$$

eine Lösung ist natürlich gegeben durch das Potential einer Ladung $q = 1$ in \mathbf{r} . Dies ist aber nicht die einzige Lösung. Weitere Lösungen findet man durch Addition einer beliebigen Funktion, welche die Laplace-Gleichung erfüllt.

Wir verwenden jetzt die II Greensche Identität, gegeben durch (2.33), von der man den gleichen Ausdruck mit $f \leftrightarrow g$ abzieht und über das Volumen V (mit Oberfläche F) unter Anwendung des Gauß'schen Satzes integriert ¹:

$$\oint_F (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S} = \int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV. \quad (3.32)$$

¹falls nicht spezifiziert wirkt ∇ auf \mathbf{r} ($\nabla_{\mathbf{r}'}$ würde auf \mathbf{r}' wirken). Weiterin ist $dV = d^3\mathbf{r}$, $dV' = d^3\mathbf{r}'$

Wir setzen in (3.32) $f(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ und $g(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r})$ mit der Poisson-Gleichung und (3.31) ein, multiplizieren mit $-\epsilon_0$ und erhalten:

$$\phi(\mathbf{r}') = \int_V G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV + \epsilon_0 \oint_F dS \mathbf{n} \cdot (G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}', \mathbf{r})) . \quad (3.33)$$

Das gibt die Lösung des Problems für beliebige Funktionen $G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, die (3.31) erfüllen. Die Randwerte kommen über das Flächenintegral in (3.33). In diesem Ausdruck sieht es so aus, als ob man sowohl ϕ als auch $\nabla \phi \cdot \mathbf{n}$ bräuchte, was dem Eindeigkeitstheorem widerspricht. Von diesem Problem kann man sich aber durch eine geeignete Wahl von G befreien:

Dirichlet Greensfunktion: Hier erfüllt G die Bedingung

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \in F . \quad (3.34)$$

Der Punkt ist, dass G weder von ρ noch vom Potential an der Oberfläche abhängt, sondern nur von der Flächengeometrie! Daher kann die Dirichlet Greensfunktion direkt aus den speziellen Lösungen, Sec. 3.2 herleitet werden (ÜBG).

Es folgt dann:

$$\phi(\mathbf{r}') = \int_V G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV - \epsilon_0 \oint_F \phi(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS . \quad (3.35)$$

Zu beachten! Nach der Konvention des Gauß'schen Theorems, zeigt die Normale \mathbf{n} aus dem Volumen hinaus!

Als allgemeine Regel kann man sagen: findet man das Potential $\phi_{q=1, \mathbf{r}'}(\mathbf{r})$ von einer Ladung $q = 1$, die sich in \mathbf{r}' befindet, und mit Randbedingungen $\phi = 0$ auf der Grenzfläche, dann ist dieses Potential genau die Dirichlet Greenfunktion $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \phi_{q=1, \mathbf{r}'}(\mathbf{r})$ für diese Geometrie.

Die Stärke dieser Methode ist, dass mit Hilfe von (3.35) das Potential für eine beliebige Ladungsverteilung und eine beliebige Verteilung des Potentials auf der Oberfläche bestimmt werden kann.

Von Neumann Greensfunktion:

Hier wählt (siehe (3.33)) G konstant auf F : [mehr in B.1.4]

$$\nabla G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\epsilon_0 A(F)} \quad \text{für } \mathbf{r} \in F \quad (3.36)$$

mit $A(F)$ dem Flächeninhalt von F . Dann folgt:

$$\phi(\mathbf{r}') = \int_V G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV + \epsilon_0 \oint_F dS \mathbf{n} \cdot G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{A(F)} \oint_F \phi(\mathbf{r}) dS . \quad (3.37)$$

Das letzte Integral gibt einen konstanten Beitrag, welcher keinen Einfluss auf \mathbf{E} hat.

3.4 Trennung der Variablen

Wir suchen nach Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.38)$$

und nehmen dabei der Einfachheit halber an, dass ϕ von z nicht abhängt (der Fall mit z -abhängigen ϕ ist sehr ähnlich)

$$\phi = \phi(x, y) . \quad (3.39)$$

Dann vereinfacht sich (3.38) in kartesischen Koordinaten zu:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(x, y) = 0 \quad (3.40)$$

Da (3.40) keinen *Mischterm* $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi$ enthält, liegt es nahe, folgenden **Separationsansatz** zu machen:

$$\phi(x, y) = f(x)g(y) ; \quad (3.41)$$

dann geht (3.40) über in:

$$g(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + f(x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(y) = 0 . \quad (3.42)$$

Mit Ausnahme der Nullstellen von f und g ist (3.42) äquivalent zu:

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g(y)} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 . \quad (3.43)$$

Der erste Term in (3.43) hängt nur von x , der zweite nur von y ab; da x und y unabhängige Variablen sind, folgt aus (3.43):

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \text{const} = -\frac{1}{g(y)} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} . \quad (3.44)$$

Wählen wir die Konstante in (3.44) z.B. positiv reell ($= k^2$), so erhalten wir folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k^2 f(x) = 0; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + k^2 g(y) = 0 \quad (3.45)$$

mit den Lösungen:

$$f(x) = a \exp(kx) + b \exp(-kx); \quad g(y) = c \sin(ky) + d \cos(ky) . \quad (3.46)$$

Die Integrationskonstanten a, b, c, d und die Separationskonstante k werden durch Randbedingungen festgelegt. Natürlich gibt auch jede lineare Kombination der Funktionen (3.46) eine Lösung der Laplace-Gleichung. Je nach Randbedingungen kann es daher notwendig sein, eine solche Linearkombination zu nehmen, wie im kommenden Beispiel.

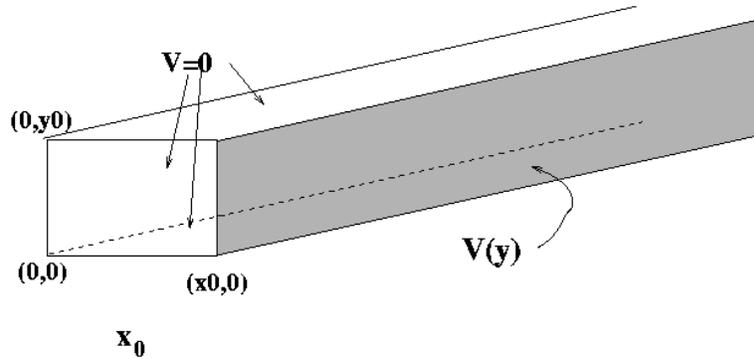


Abbildung 3.2: {quader}

Unendlich langer Quader

Als Beispiel betrachten wir einen in z -Richtung unendlich ausgedehnten Quader (mit den Kantenlängen x_0 und y_0) mit den Randbedingungen (Fig. 3.2):

$$\phi(x, 0) = \phi(x, y_0) = 0, \quad (3.47)$$

woraus

$$d = 0; \quad (\sin(ky_0) = 0) \rightarrow \left(k = \frac{n\pi}{y_0} = k_n \right) \quad (3.48)$$

folgt. Die „erlaubten“ Werte von k sind also festgelegt.

Weiterhin seien die Randbedingungen

$$\phi(0, y) = 0; \quad \phi(x_0, y) = V(y), \quad (3.49)$$

gegeben, wobei $V(y)$ eine vorgegebene Funktion ist. Aus (3.49) folgt zunächst

$$(a = -b) \rightarrow (f = a \{ \exp(k_n x) - \exp(-k_n x) \}) = a' \sinh(k_n x). \quad (3.50)$$

Um die Bedingung (3.49) auch noch zu erfüllen, schreiben wir (3.41) als eine beliebige lineare Kombination aller erlaubten Funktionen (Fourier-Entwicklung) :

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n y) \sinh(k_n x), \quad (3.51)$$

und bestimmen die Koeffizienten A_n aus der Forderung

$$\phi(x_0, y) = V(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n y) \sinh(k_n x_0). \quad (3.52)$$

Nach dem [mehr in B.1.5] Umkehrtheorem für Sinus-Fourier-Reihen erhält man:

$$A_n = \frac{2}{y_0 \sinh(k_n x_0)} \int_0^{y_0} V(y) \sin(k_n y) dy. \quad (3.53)$$

Hat man Randbedingungen von sphärischer Symmetrie, so wird man die Laplace-Gleichung durch einen Separationsansatz in Kugelkoordinaten lösen (ÜBG); entsprechend verfährt man bei axialer Symmetrie.

3.5 Übersicht Elektrostatik

⋮

1.) Basis: Coulomb-Gesetz

$$\mathbf{K} = q\mathbf{E} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

2.) Feldgleichungen (Maxwell Gleichungen für die Elektrostatik):

$$\begin{array}{ll} \text{a) integral:} & \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 & \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ & \updownarrow & \updownarrow \\ \text{b) differentiell:} & \nabla \times \mathbf{E} = 0 & \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array}$$

3.) Elektrostatisches Potential:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \rightarrow \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} : \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

4.) Feldenergie:

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \rightarrow \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV \rightarrow \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E(\mathbf{r})^2 dV$$

Potentielle Energie der Punktladungen \rightarrow elektrostatische Feldenergie

5.) Ideales Metall:

- Innen: $\phi = \text{const.}$, $\mathbf{E} = 0$
- Auf der Oberfläche: $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{\gamma}{\epsilon_0}$, $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$.

6.) Nützliche Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= -\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

Teil II

Magnetostatik

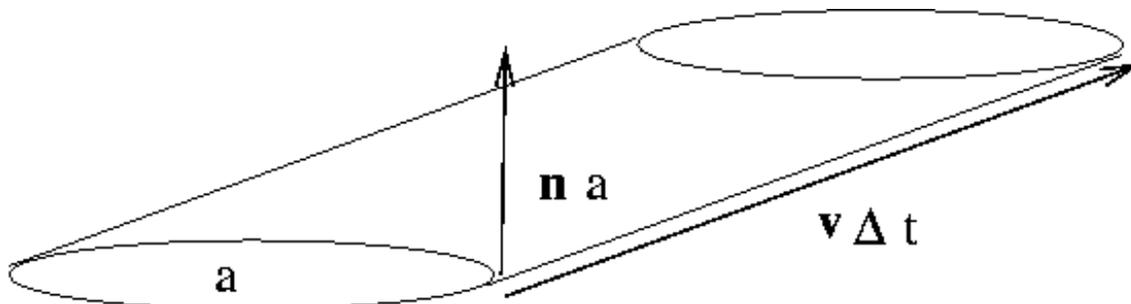
Kapitel 4

Ampère'sches Gesetz

4.1 Elektrischer Strom und Ladungserhaltung

Elektrische Ströme werden durch bewegte Ladungsträger hervorgerufen. Ladungsträger können dabei z.B. sein: Ionen in einem Teilchenbeschleuniger, einem Elektrolyten oder einem Gas, Elektronen in einem Metall etc. Ursache für die Bewegung der Ladungen sind in erster Linie elektrische Felder, es kann sich aber auch um materiellen Transport von Ladungsträgern handeln. Als elektrische Stromstärke definieren wir diejenige Ladungsmenge, die pro Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt fließt.

Stromdichte



Als einfachsten Fall betrachten wir zunächst Ladungsträger mit gleicher *Ladung* q und *Geschwindigkeit* \mathbf{v} . Es sei \mathbf{a} der Vektor senkrecht zum Querschnitt des leitenden Mediums (Skizze), dessen Betrag a die Querschnittsfläche angibt und n die Dichte der Ladungsträger. In der Zeit Δt passieren dann die in dem Volumen $\Delta V = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\Delta t$ befindlichen Ladungsträger den Leiterquerschnitt, nämlich $n(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\Delta t$ Ladungsträger. Damit folgt für die Stromstärke

$$I(a) = \frac{nq(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\Delta t}{\Delta t} = nq(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}). \quad (4.1)$$

Haben wir allgemein pro Volumeneinheit n_i Ladungsträger q_i mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_i , so wird:

$$I(a) = \mathbf{a} \cdot \underbrace{\left(\sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i \right)}_{\equiv \mathbf{j}}. \quad (4.2)$$

Die Gleichungen (4.1) und (4.2) legen es nahe, die *Stromdichte* \mathbf{j} einzuführen, als

$$\boxed{\mathbf{j} = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i}, \quad (4.3)$$

so dass durch eine beliebige infinitesimale (orientierte) Fläche $\Delta \mathbf{a}$ der Strom

$$\Delta I = \Delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}$$

fließt. Für mehrere gleich starke Ladungen $q_i = q$ lässt sich \mathbf{j} mit der mittleren Geschwindigkeit

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n} \sum_i n_i \mathbf{v}_i \quad (4.4)$$

verknüpfen:

$$\mathbf{j} = nq \langle \mathbf{v} \rangle = \rho \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (4.5)$$

Gleichung (4.5) macht deutlich, dass hohe Absolutgeschwindigkeiten der Ladungsträger noch keinen hohen Strom bedeuten, da nur der Mittelwert der Geschwindigkeiten der Ladungsträger wesentlich ist. Sind z.B. die Geschwindigkeiten der Ladungsträger gleichmäßig über alle Richtungen verteilt, so wird $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ und damit auch $\mathbf{j} = 0$.

Im allgemeinen Fall sind ρ und $\langle \mathbf{v} \rangle$ orts- und zeitabhängig, also

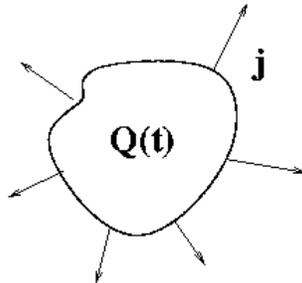
$$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (4.6)$$

Der Gesamtstrom durch eine Fläche F ist also gegeben durch

$$I = \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{f} \quad (4.7)$$

Kontinuitätsgleichung

Den Erhaltungssatz der Ladung können wir mit den Begriffen der Ladungs- und Stromdichte wie folgt formulieren: Wir betrachten ein beliebiges endliches Volumen V mit der Oberfläche F .



Die darin enthaltene Ladungsmenge sei $Q = Q(t)$. Wenn V nicht von der Zeit abhängt, so ergibt sich für die Änderung der in V enthaltenen Ladungsmenge pro Zeiteinheit:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (4.8)$$

Da Ladung nicht erzeugt oder vernichtet werden kann, muss die Abnahme (Zunahme) der in V enthaltenen Ladung gleich der (im betrachteten Zeitraum) durch F hinaus (hinein)-strömenden Ladungsmenge sein.

Letztere ist gegeben durch das Oberflächenintegral der Stromdichte, welches nach der Gauß'schen Integralformel in ein Volumenintegral umgeformt werden kann:

$$-\frac{dQ}{dt} = \oint_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV. \quad (4.9)$$

Damit lautet die Ladungsbilanz:

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV \quad (4.10)$$

oder, da V beliebig gewählt werden kann, erhalten wir die *Kontinuitätsgleichung*:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.} \quad (4.11)$$

Während (4.9) die Ladungserhaltung in *integraler* Form beschreibt, bedeutet (4.11) die Ladungserhaltung in *differentieller* Form.

Spezialfälle

(i) Elektrostatik: stationäre Ladungen

$$\mathbf{j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho = \rho(\mathbf{r}) \quad (4.12)$$

(ii) Magnetostatik: stationäre Ströme

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (4.13)$$

Für einen stationären Strom ist nämlich \mathbf{j} (und daher $\nabla \cdot \mathbf{j}$) zeitlich konstant. $\nabla \cdot \mathbf{j}$ muss also überall null sein, damit die Ladungsdichte nicht uneingeschränkt anwächst.

4.2 Ampère'sches Gesetz

Gegeben sei eine stationäre Stromverteilung $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Um elektrostatische Effekte zu eliminieren, wollen wir annehmen, dass die Dichte der bewegten Ladungsträger, die den Strom aufbauen, kompensiert wird durch ruhende Ladungsträger entgegengesetzten Vorzeichens (z.B. bewegte Leitungselektronen und ruhende Gitterionen im metallischen Leiter). Auf eine bewegte Probeladung q wirkt dann in der Umgebung des stromdurchflossenen Leiters eine Kraft - keine elektrostatische Kraft - für die man experimentell findet:

$$\boxed{\mathbf{K} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]} \quad (4.14)$$

mit

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \Gamma_m \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'} \quad (4.15)$$

als dem Feld der *magnetischen Induktion* (kurz: **B**-Feld). Die Gleichungen (4.14) und (4.15) sind als Grundlagen der Magnetostatik ebenso experimentell gesichert wie

$$\mathbf{K} = q \mathbf{E} \quad (4.16)$$

und (1.15) in der Elektrostatik. Insgesamt ergeben (4.14) und (1.8) die Gesamtkraft (**Lorentzkraft**) auf eine Ladung q .

$$\boxed{\mathbf{K} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})} \quad (4.17)$$

(4.17) stellt eine eindeutige Messvorschrift für das elektrostatische Feld **E** und für die magnetische Induktion **B** dar. Die Beiträge zu (4.17) aus den beiden Komponenten können unabhängig bestimmt werden, indem man zuerst die Kraft auf die ruhende ($\mathbf{v} = 0$) Probeladung misst. Diese stammt wegen (4.17) nur aus **E**. Dann setzt man die Ladung in Bewegung. Von der resultierenden Kraft kann man den elektrostatischen Teil abziehen, so dass die Differenz den magnetischen Anteil ergibt.

Maßsysteme

Hat man Γ_e festgelegt, d.h. man hat die Einheitsladung definiert, (siehe Abschnitt 1.2), so sind in (4.14) und (4.15) alle auftretenden Größen bzgl. ihrer Einheiten fixiert. Γ_m kann also nicht mehr frei gewählt werden:

(ii) cgs-System:

$$\Gamma_e = 1, \quad \Gamma_m = \frac{1}{c} \quad (4.18)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c . Beachten Sie bitte dass im cgs-System die Lorentzkraft eine andere Form hat:

$$\mathbf{K} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) .$$

So dass **E** und **B**-Feld die gleiche Dimension haben.

(i) MKSA -System:

$$\Gamma_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \Gamma_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (4.19)$$

mit

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Cb}^2}{\text{Nm}^2}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{m kg}}{\text{Cb}^2} . \quad (4.20)$$

μ_0 ist die *magnetische Permeabilität*.

Superpositionsprinzip

Gleichung (4.15) enthält - wie in (1.8) - das Superpositionsprinzip: Die Felder zweier Stromverteilungen \mathbf{j}_1 und \mathbf{j}_2 überlagern sich linear: $\mathbf{B}(\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2) = \mathbf{B}(\mathbf{j}_1) + \mathbf{B}(\mathbf{j}_2)$.

Verknüpfung mit der Relativität

Das Verhältnis Γ_m/Γ_e ist unabhängig von der Wahl der Ladungseinheit (also von ϵ_0) da das Verhältnis von (4.14) zu (1.8) dimensionslos ist. Aus (4.17) hat das Verhältnis von $|\mathbf{B}|/|\mathbf{E}|$ die Dimension einer inversen Geschwindigkeit und mit (4.15) zu (1.8) das Verhältnis von $\Gamma_m/\Gamma_e = \epsilon_0 \mu_0$ die Dimension einer inversen Geschwindigkeit zum Quadrat.

Mit (4.19) erhalten wir die Beziehung

$$\boxed{\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}} \quad (4.21)$$

Diese fundamentale Beziehung verweist bereits auf einen Zusammenhang mit der speziellen Relativitätstheorie. In der Tat kann man mit Hilfe einer Lorentz-Transformation (4.14) und (4.15) in (4.16) und (1.15) überführen.

4.3 Formel von Biot-Savart

Im Folgenden soll das Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ für verschiedene einfache Stromverteilungen berechnet werden.

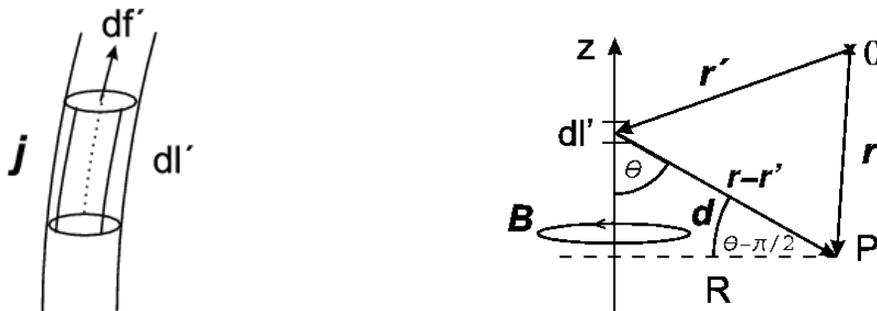
Für einen *dünnen* Leiter können wir sofort über den Leitungsquerschnitt f integrieren [d. h. $\int \mathbf{j} dV \rightarrow I \int d\mathbf{l}$] und erhalten aus (4.15)

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}} \quad (4.22)$$

mit

$$I = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}' \quad (4.23)$$

als der Stromstärke (vgl. Skizze).



Ist der Leiter weiterhin gerade, so folgt aus (4.22) oder auch (4.15), dass die Feldlinien von \mathbf{B} konzentrisch um den Leiter verlaufen. Wir brauchen also nur noch den Betrag B zu berechnen, da alle Beiträge zum Integral (4.22) für einen **geraden Leiter** die gleiche Richtung haben. Aus der Skizze folgt:

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{\sin\theta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dz \quad (4.24)$$

Die verbleibende Integration führen wir für einen unendlich langen Leiter aus: Mit

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sin\theta; \quad z = \frac{R}{\tan\theta} \quad \rightarrow \quad dz = \frac{-R}{\sin^2\theta} d\theta \quad (4.25)$$

folgt für die Feldstärke im Punkt P :

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (4.26)$$

Dieses ist die Formel von Biot und Savart für einen dünnen, geraden, unendlich langen Leiter.

4.4 Kraft und Drehmoment auf einen Strom im Magnetfeld

Ausgehend von der Kraft, die eine Ladung q_i erfährt, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v}_i im Magnetfeld \mathbf{B} bewegt,

$$\mathbf{K}_i = q_i [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)], \quad (4.27)$$

erhält man für die Kraft auf einen Strom mit der Stromdichte \mathbf{j} (**Übergang zum Kontinuum:** $\sum_i q_i \mathbf{v}_i \cdots \rightarrow \int dV \mathbf{j}(\mathbf{r}) \dots$):

$$\mathbf{K} = \sum_i q_i [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)] = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV; \quad (4.28)$$

das Volumen V ist so zu wählen, dass es den Strom vollständig erfasst.

Beispiel: Für einen dünnen Draht, über dessen Querschnitt sich das \mathbf{B} -Feld nicht (wesentlich) ändert, können wir (wie in Kap. 4.3) 2 der 3 Integrationen in (4.28) ausführen:

$$\mathbf{K} = I \int_L d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (4.29)$$

Das verbleibende Kurvenintegral längs des Leiters L lässt sich für einen geraden Leiter ausführen, wenn \mathbf{B} sich längs L nicht ändert:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{I} \times \mathbf{B})L, \quad (4.30)$$

wo L die Länge des Leiters angibt. Die Kraft ist also senkrecht zur Stromrichtung und zum \mathbf{B} -Feld; sie ist maximal, wenn \mathbf{I} senkrecht zu \mathbf{B} verläuft und verschwindet, wenn \mathbf{I} parallel zu \mathbf{B} ist.

Drehmoment

Auf die Ladung q_i mit Geschwindigkeit \mathbf{v}_i im Feld \mathbf{B} wirkt das Drehmoment

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times [q_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)]; \quad (4.31)$$

entsprechend, auf die Stromdichte \mathbf{j} :

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times [q_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i)] = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV. \quad (4.32)$$

Einfache Beispiele sind (rechteckige oder kreisförmige) Stromschleifen im homogenen \mathbf{B} -Feld (ÜB).

Für die praktische Auswertung von (4.32) ist es zweckmäßig, mit der Identität ('bac-cab Regel')

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (4.33)$$

(4.32) umzuformen:

$$\mathbf{N} = \int_V \{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{j} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})\mathbf{B}\} dV. \quad (4.34)$$

Wir benötigen jetzt einen

Hilfsatz: Allgemeine Eigenschaften eines stationären, räumlich beschränkten Stroms
Wir benutzen zunächst folgende Beziehung, **gültig für einen stationären $\nabla \mathbf{j} = 0$ Strom, der außerhalb eines Volumens V verschwindet (und natürlich auch auf dessen Oberfläche, oder im Unendlichen „schnell genug“ verschwindet)**. Mit obiger Bedingung und für beliebige (ausreichend differentierbare) Skalarfelder g, f gilt:¹

$$\int_V (f \mathbf{j} \cdot \nabla g + g \mathbf{j} \cdot \nabla f) dV = 0. \quad (4.35)$$

Benutzt man (4.35) mit $f = x_n, g = x_m$, sowie $(\mathbf{j} \cdot \nabla)x_n = j_n$ erhält man

$$\int_V (x_n j_m + x_m j_n) dV = 0 \quad (4.36)$$

Für $n = m$ folgt aus (4.36)

$$\int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) dV = 0, \quad (4.37)$$

so dass für ein konstantes Feld in (4.34) der 2. Term verschwindet.

Entsprechend folgt aus (4.36) für $m \neq n$ (und konstantes \mathbf{B}):

$$\int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{j} dV = - \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{B})\mathbf{r} dV, \quad (4.38)$$

also mit Formel (4.33):

$$\int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j} dV = \frac{1}{2} \int_V \{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r}\} dV = -\frac{1}{2} \mathbf{B} \times \underbrace{\int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) dV}_{2 \mathbf{m}} \quad (4.39)$$

¹ $\nabla \cdot (g f \mathbf{j}) = (f \mathbf{j} \cdot \nabla g + g \mathbf{j} \cdot \nabla f)$, da $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Dann integriert man über V , wobei der erste Term in ein Integral auf der Oberfläche von V durch das Gauß'sche Theorem umgewandelt wird und daher verschwindet.

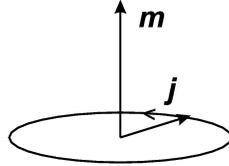
Ergebnis:

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}} \quad (4.40)$$

mit dem *magnetischen Dipolmoment*

$$\boxed{\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) dV} \quad (4.41)$$

Für einen ebenen Strom (z.B. Kreisstrom) steht \mathbf{m} senkrecht zur Stromebene:



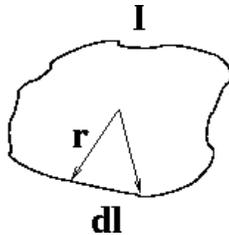
Ist der stromführende Leiter dünn, so erhalten wir nach Integration über den Leiterquerschnitt:

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_L (\mathbf{r} \times d\mathbf{l}) = I \int_F d\mathbf{f}, \quad (4.42)$$

wobei I die Stromstärke und F die vom Strom eingeschlossene Fläche ist. Für eine flache Fläche lautet der Betrag von m

$$|\mathbf{m}| = IF. \quad (4.43)$$

Skizze für Beweis, dass $\mathbf{r} \times d\mathbf{l} = 2 \mathbf{n} d f$:



Anwendungen

Strommessung bzw. Elektromotor.

4.5 Kräfte zwischen Strömen und deren Energien

Mit (4.28) und (4.15) lässt sich die Kraft von einem Strom $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$, lokalisiert in dem Volumen V' , auf einem Strom mit Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, lokalisiert in dem Volumen V , schreiben als

$$\mathbf{K}(V, V') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \int_{V'} dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right). \quad (4.44)$$

Die zwei Vektorprodukte ergeben aus (4.33)

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}) - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r})) .$$

Das Integral

$$\int_V dV \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4.45)$$

verschwindet, da

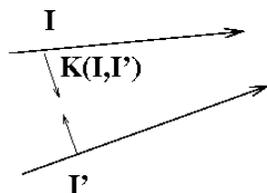
$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} , \quad (4.46)$$

und man kann (4.35) mit $f = 1$ und $g = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ verwenden. Man erhält:

$$\mathbf{K}(V, V') = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V, V'} dV dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \quad (4.47)$$

Z. B., für die Kraft eines Stromes I' auf einen Strom I bei dünnen Leitern wird (4.47):

$$\mathbf{K}(\mathbf{I}, \mathbf{I}') = -\frac{\mu_0 I I'}{4\pi} \int_L \int_{L'} d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} , \quad (4.48)$$



Also, parallele, gleichgerichtete Ströme ziehen sich an, entgegengerichtete stoßen sich ab. Die Kraft (4.48) wird auch verwendet zur *Festlegung der Messeinheit* für den elektrischen Strom im SI system. Gleichung (4.47) ändert bei Vertauschung der beiden Ströme das Vorzeichen, d.h. $\mathbf{K}(V, V') = -\mathbf{K}(V', V)$. Darin spiegelt sich das Actio-Reactio-Prinzip wider, welches für elektrostatische wie für magnetostatische Wechselwirkungen gilt. Es wird allerdings durchbrochen bei beliebigen, zeitabhängigen Strom- und Ladungsverteilungen (siehe Kap. 6), weil in diesem Fall die Felder einbezogen werden müssen.

Mit Hilfe von (4.46) kann man aus (4.47) einen Ausdruck für die Potentialenergie einer Stromanordnung (vgl. Elektrostatik) herleiten als

$$U_m = -\frac{\mu_0}{8\pi} \int_V \int_{V'} dV dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (4.49)$$

Kapitel 5

Grundgleichungen der Magnetostatik

Wie im Fall des elektrostatischen Feldes, wollen wir die Gleichungen für das \mathbf{B} -Feld in Differentialform schreiben.

5.1 Divergenz der magnetischen Induktion

Wir formen Gleichung (4.15) um:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} dV'\end{aligned}$$

da $\nabla_{\mathbf{r}}$ nur auf \mathbf{r} wirkt erhält man:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right), \quad (5.1)$$

Gemäß (5.1) kann also \mathbf{B} in der Form

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \quad (5.2)$$

dargestellt werden mit

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}. \quad (5.3)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ nennt man das Vektor-Potential. Da $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, erhält man

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}. \quad (5.4)$$

Gleichung (5.4) sollte mit $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ verglichen werden, und zeigt, dass es keine *magnetischen Ladungen* gibt. Bilden wir nämlich die zu (5.4) korrespondierende integrale Aussage

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oint_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0, \quad (5.5)$$

so sehen wir, dass der Fluss der magnetischen Induktion durch eine geschlossene Fläche F verschwindet.

5.2 Rotation von \mathbf{B}

In der Elektrostatik hatten wir gefunden

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (5.6)$$

oder gleichwertig

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (5.7)$$

nach der Formel von Stokes. Für das \mathbf{B} -Feld haben wir aus (5.2)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} . \quad (5.8)$$

Wir zeigen zunächst, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 . \quad (5.9)$$

Beweis: aus (5.3):

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} dV' . \quad (5.10)$$

Unter Anwendung von (4.35) mit $f(\mathbf{r}') = 1$ und $g(\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, gibt der letzte Ausdruck 0.

Wir benutzen jetzt eine Formel aus der Elektrostatik (aus (A.23))

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Wendet man den Laplace-Operator auf (5.3) an, erhält man

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) . \quad (5.11)$$

Zusammen mit (5.8) und (5.9) bekommen wir:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}} . \quad (5.12)$$

Die Integralform von (5.12) erhält man aus dem Stokschen Satz:

$$\boxed{\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I} , \quad (5.13)$$

wobei I die Stromstärke des von S umschlossenen Stromes ist. **Bemerkung:**

In der Praxis (z.B. Spule) kann S den Strom mehrmals umlaufen. Umläuft S den Strom n -fach, so ist I durch nI zu ersetzen.

(5.12) und (5.4) bilden die grundlegende Gleichungen (Maxwell Gleichungen) für die Magnetostatik. Im Gegensatz zum elektrostatischen Feld \mathbf{E} mit $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ist also das \mathbf{B} -Feld *nicht wirbelfrei*.

5.3 Vektor-Potential und Eichung

In Kap. 5.1 haben wir eine Hilfsgröße eingeführt, das sogenannte *Vektor-Potential* \mathbf{A} , aus dem (ähnlich zum Fall des elektrostatischen Potential ϕ) die magnetische Induktion durch Differenzieren gewonnen werden kann. Im Gegensatz zum elektrostatischen Potential ϕ , ist \mathbf{A} ein Vektorfeld, und \mathbf{B} ist gegeben durch

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (5.14)$$

In (5.11) haben wir für das Vektor-Potential \mathbf{A} eine Differentialgleichung gefunden, aus der sich \mathbf{A} bei gegebener Stromverteilung \mathbf{j} berechnen lässt.

Coulomb-Eichung

Man muss allerdings beachten, dass die Beziehung (5.14) das Vektorpotential für gegebenes \mathbf{B} nicht eindeutig festlegt. Das \mathbf{B} Feld ändert sich nämlich nicht, wenn man eine sogenannte *Eichtransformation*

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (5.15)$$

durchführt, wobei χ eine beliebige (mindestens 2-mal partiell differenzierbare) skalare Funktion ist. Denn:

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla \chi) = \nabla \times \mathbf{A} + 0. \quad (5.16)$$

(5.15) gibt eine zusätzliche Freiheit in der Wahl von \mathbf{A} .

(5.3) ist daher nicht der einzige mögliche Ausdruck für \mathbf{A} . Mit (5.3) ist (siehe (5.9)) \mathbf{A} divergenzfrei. Eine Wahl von \mathbf{A} , welche (5.9) erfüllt wird als *Coulomb-Eichung* bezeichnet. Da die Physik nur von \mathbf{B} und nicht von \mathbf{A} abhängig ist, stellt die Wahl einer besonderen Eichung keinerlei Einschränkung dar. In der Coulomb-Eichung (5.9) erfüllt also \mathbf{A} [vgl. (5.8), (5.12) und (5.9)] die Differentialgleichung:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad \text{Coulomb-Eichung} \quad (5.17)$$

Die vektorielle Gleichung (5.17) zerfällt in ihre 3 Komponenten, welche mathematisch gesehen wieder vom bekannten Typ der Poisson-Gleichung (2.26) sind.

Startet man dagegen von einem Vektorpotential \mathbf{A} , das die Coulomb-Eichung nicht erfüllt

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0, \quad (5.18)$$

so kann man das *Eichpotential* χ so wählen, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot (\nabla \chi) = 0, \quad (5.19)$$

so dass \mathbf{A} die Coulomb-Eichung erfüllt. Das gesuchte χ findet man durch Lösen einer Differentialgleichung vom Typ (2.28):

$$\nabla^2 \chi = -\nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (5.20)$$

wo $-\nabla \cdot \mathbf{A}$ als eine gegebene Inhomogenität anzusehen ist.

5.4 Multipolentwicklung

Analog zu der in Abschnitt 1.5 besprochenen Multipolentwicklung für das elektrische Potential ϕ interessiert man sich oft für das \mathbf{B} -Feld in großer Entfernung von der Stromverteilung \mathbf{j} . Letztere sei auf dem Volumen V (mit $\mathbf{0} \in V$) beschränkt.

Dann empfiehlt es sich, das Vektor-Potential \mathbf{A} analog ϕ in eine Taylorreihe zu entwickeln. Unter Verwendung von (5.3) und (1.29) erhalten wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots \right) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \dots \quad (5.21)$$

mit dem

1.) Monopolanteil:

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \quad (5.22)$$

als 1. Term der Entwicklung von \mathbf{A} . Aus (4.35) mit $f = 1$ und $g = x_i$ folgt unmittelbar

$$\mathbf{A}_0 = 0. \quad (5.23)$$

Was die Tatsache betont, dass es in der Elektrodynamik keine magnetischen Monopole gibt.

2.) Dipolanteil:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'. \quad (5.24)$$

Das Integral (5.24) kann gemäß (4.39) (mit \mathbf{B} ersetzt durch \mathbf{r} und \mathbf{r} durch \mathbf{r}') umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' &= \frac{1}{2} \int_V \{ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \mathbf{r}' \} dV' = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \{ \mathbf{r} \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{r}') \} dV'. \end{aligned} \quad (5.25)$$

(5.25) in (5.24) gibt

$$\boxed{\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)} \quad (5.26)$$

mit dem magnetischen Dipolmoment $\boxed{\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) dV}$ (bereits in (4.41) eingeführt).

Man vergleiche das Ergebnis mit (1.32)!

Für das \mathbf{B} -Feld eines magnetischen Dipols erhält man (für $\mathbf{r} \neq 0$)

$$\boxed{\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m})}{r^5}}, \quad (5.27)$$

Beweis (für $\mathbf{r} \neq 0$!):

$$\begin{aligned}
 \frac{4\pi}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) &= \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \\
 &= \underbrace{\mathbf{m}(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3})}_{=0 \text{ für } \mathbf{r} \neq 0} - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \\
 &= -\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \nabla \frac{1}{r^3}) - \frac{1}{r^3}(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \\
 &= \frac{(3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m})}{r^5} \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

Das magnetische und elektrostatische Dipolfeld haben also die gleiche Form.

Magnetisches Moment vs. Bahndrehimpuls

Für N Punktladungen q_i lautet \mathbf{m} :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) . \tag{5.29}$$

Weiterhin kann \mathbf{m} in einen einfachen Zusammenhang mit dem Drehimpuls L der N geladenen Massenpunkte gebracht werden, *wenn alle Massen $M_i = M$ und alle Ladungen $q_i = q$ gleich sind*, oder auch wenn das Verhältnis M_i/q_i konstant ist. In diesem Fall:

$$\boxed{\mathbf{m} = \frac{q}{2M} \mathbf{L}} . \tag{5.30}$$

Mit dem Bahndrehimpuls \mathbf{L} eines Systems geladener (identischer) Teilchen ist also ein magnetisches Moment in Richtung von L verknüpft. Diese Aussage gilt auch im atomaren Bereich, z.B. für die Elektronen eines Atoms.

Umgekehrt lässt sich jedoch nicht jedes magnetische Moment auf einen Bahndrehimpuls gemäß (5.30) zurückführen. Elementarteilchen (wie z.B. Elektronen) besitzen ein *inneres* magnetisches Dipolmoment, welches nicht mit dem Bahndrehimpuls, sondern mit dem *Spin* dieser Teilchen verknüpft ist durch:

$$\mathbf{m}_s = g \frac{q}{2M} \mathbf{s}, \tag{5.31}$$

wobei \mathbf{s} der Spin-Vektor ist und g das *gyromagnetische Faktor*. Es ist $g \approx 2.0024$ für Elektronen.

5.5 Energie eines Dipols im äußeren, schwach veränderlichen Magnetfeld

Für die Kraft \mathbf{K} eines schwach veränderlichen \mathbf{B} -Feldes auf eine um den Punkt $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ lokalisierte Stromverteilung greife man zurück auf (4.28), und entwickle das \mathbf{B} -Feld um \mathbf{r}_0 (wir setzen $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ nach der Ableitung):

$$\mathbf{K} = -\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \times \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV + \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) dV + \dots , \tag{5.32}$$

Der erste Term verschwindet, wie in (5.22). Homogene Felder üben damit keine Kräfte auf Ströme aus (Damit wird die Gesamtkraft auf dem Schwerpunkt gemeint). Den zweiten Term formt man folgendermaßen um. Man betrachte zunächst, dass $\nabla_{\mathbf{r}_0}$ in (5.32) nur auf B wirkt (das ist durch die Variable r_0 verdeutlicht) also:

$$\mathbf{K} = \int_V (\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0). \quad (5.33)$$

Aus (4.36) mit $m \neq n$ geht man wie für (4.38), (4.39) vor und man bekommt

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \\ & \int_V \frac{1}{2} [(\mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) - (\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \mathbf{r}] dV \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \\ & \left[\nabla_{\mathbf{r}_0} \times \underbrace{\int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r} \right) dV}_{-\mathbf{m}} \right] \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \\ & (\mathbf{m} \times \nabla_{\mathbf{r}_0}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \\ & \nabla_{\mathbf{r}_0} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_0)) - \underbrace{\mathbf{m} (\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_0))}_{=0}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Wir haben also:

$$\boxed{\mathbf{K} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})}. \quad (5.35)$$

(5.35) sollte mit dem Ausdruck für das Drehmoment auf einen Dipol (4.40) verglichen werden. Im letzteren Fall, liefert der erste Term in der Taylor-Entwicklung des \mathbf{B} -Feldes einen Beitrag. Deswegen enthält (4.40) das \mathbf{B} -Feld und nicht einen Gradienten, wie in (5.35).

Aus der Kraft lässt sich die Potentialenergie U eines magnetischen Dipols in einem äußeren Magnetfeld ableiten. Da $\mathbf{K} = -\nabla U$, bekommt man

$$U = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}), \quad (5.36)$$

analog zu $-(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E})$ als Energie eines elektrischen Dipols im elektrostatischen Feld (2.41). Der Dipol wird sich also bevorzugt in Feldrichtung einstellen, da dies der niedrigst möglichen Energie entspricht.

5.6 Übersicht über die Magnetostatik

1.) Basis: Ampère'sches Gesetz

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

für stationäre Ströme, wobei $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t = 0$.

2.) Feldgleichungen: Aus

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

folgt

a) differentiell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

b) integral

$$\text{Fluß: } \oint_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0; \quad \text{Zirkulation: } \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$$

3.) Vektor-Potential:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

für $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (Coulomb-Eichung).

Statische Maxwell Gleichungen

(A) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(B) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(5.37)
(C) $\nabla \times \mathbf{E} = 0$	(D) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$	

Lorentz-Kraft

$$\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \Rightarrow \int (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV \quad (5.38)$$

Teil III

Grundlagen der Elektrodynamik

Kapitel 6

Die Maxwell'schen Gleichungen

6.1 Konzept des elektromagnetischen Feldes

Im Folgenden sollen die Grundgleichungen für das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und für die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ für den Fall beliebiger *zeitabhängiger* Ladungs- und Stromverteilungen

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (6.1)$$

aufgestellt werden. Als Definition der Felder benutzen wir die Lorentz-Kraft

$$\text{(Lorentz - Kraft)} \quad \mathbf{K} = q [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] . \quad (6.2)$$

Da ρ und \mathbf{j} nun durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (6.3)$$

verknüpft sind, ist klar, daß elektrisches und magnetisches Feld nicht mehr separat behandelt werden können: Die *Maxwell'schen Gleichungen* sind ein System gekoppelter Differentialgleichungen für die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} .

6.2 Unvollständigkeit der statischen Maxwell-Gleichungen

Hier noch einmal die **statischen** Maxwell Gleichungen (im Vakuum), die wir bisher hergeleitet haben. Diese gelten nur für zeitunabhängige Felder.

Statische Maxwell Gleichungen

(A) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(B) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
(C) $\nabla \times \mathbf{E} = 0$	(D) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

(6.4)

In diesen Gleichungen können das \mathbf{E} und \mathbf{B} -Feld getrennt betrachtet werden. Dass dies aber nicht korrekt sein kann wurde bereits erwähnt. Es gibt zwei Gründe, warum \mathbf{E} und \mathbf{B} Feld gekoppelt sein müssen:

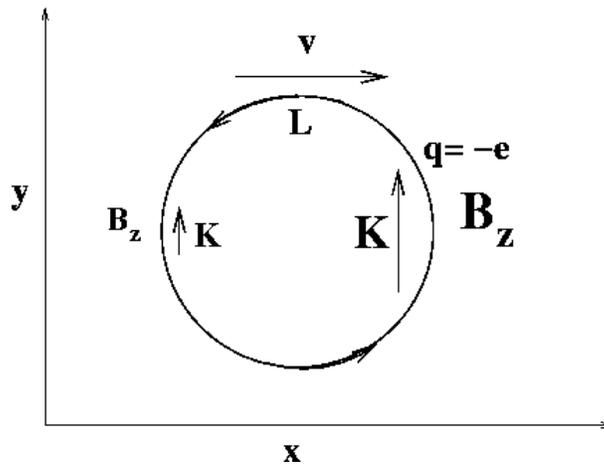
- (1) Durch unterschiedliche inertielle Referenzsysteme mischen sich \mathbf{E} und \mathbf{B} untereinander.
- (2) Wegen der Kontinuitätsgleichung sind ρ und \mathbf{j} und daher \mathbf{E} und \mathbf{B} gekoppelt.

Wir werden sehen, dass eine genaue Analyse dieser zwei Gründe zu den passenden Ergänzungen von (6.4) führt.

6.3 Faraday'sches Induktionsgesetz

Elektromotorische Kraft

Betrachten wir einen Leiterkreis (Ring) R , der sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} in einem nicht-homogenen \mathbf{B} -Feld bewegt. Als Beispiel nehmen wir ein in die z -Richtung gerichtetes \mathbf{B} -Feld, das entlang der x -Richtung anwächst (Skizze). Der Kreis liege auf der $x - y$ -Ebene und bewege sich in x -Richtung.



Wegen des \mathbf{B} -Feldes erfahren die freien Ladungen $q = -e < 0$ auf dem Leiter eine Kraft $\mathbf{K} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ in die $+y$ Richtung. Diese Kraft ist aber stärker auf der rechten Seite des Kreises, wo \mathbf{B} stärker ist. Deswegen werden die Ladungen im Leiter stärker gegen den Uhrzeigersinn beschleunigt. Mathematisch bedeutet das, dass die Zirkulation der Kraft entlang R ungleich Null ist.

Versetzen wir uns jetzt ins inertielle Bezugssystem des Leiters mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} . In diesem System sind die Ladungen unbeweglich, doch sie erfahren die gleiche Kraft (im nicht-relativistischen Fall) wie im Laborsystem. Da die Ladungen unbeweglich sind, kann diese nicht aus dem \mathbf{B} -Feld, sondern nur aus einem elektrischen Feld $\mathbf{E} = \mathbf{K}/q$ (Lorentzkraft) stammen. Wie die Kraft \mathbf{K} , hat also auch \mathbf{E} eine nichtverschwindende Zirkulation, was (6.4)(C) widerspricht. Im Bezugssystem des beweglichen Leiters befindet sich also ein \mathbf{E} -Feld, das nicht wirbelfrei ist, sowie ein zeitabhängiges \mathbf{B} -Feld.

Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen diesen zwei Feldern, also die passende Ergänzung zu (6.4)(C) mathematisch herleiten. Wir benutzen den Index “ R ” für die Felder im Bezugssystem des Ringes, und keinen Index für das Laborsystem. Das \mathbf{B}_R Feld ist das gleiche wie \mathbf{B} , nur räumlich verschoben um $\mathbf{v}t$.

Durch Vergleich der Kräfte in beiden Systemen erhalten wir \mathbf{E}_R :

$$\mathbf{K} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{K}_R = q \mathbf{E}_R . \quad (6.5)$$

Verschiebt sich der Kreis in der Zeit δt um den Abstand $\delta \mathbf{r}$, ändert sich \mathbf{B}_R um

$$\delta \mathbf{B}_R = (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}_R , \quad (6.6)$$

die Zeitableitung des \mathbf{B}_R -Feldes im System R ist also gegeben durch

$$\frac{\partial \mathbf{B}_R}{\partial t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}_R . \quad (6.7)$$

Der letzte Term kann durch die Beziehung (gültig für homogenes \mathbf{v})

$$\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{v} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (6.8)$$

umgeschrieben werden. Also

$$\boxed{-\frac{\partial \mathbf{B}_R}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_R) = \nabla \times \mathbf{E}_R} , \quad (6.9)$$

wo wir (6.5) benutzt haben. Diese Gleichung stellt eine Beziehung zwischen der Zeitableitung von \mathbf{B} und der Rotation von \mathbf{E} dar. (6.9) ist also die gesuchte Ergänzung zur Maxwell-Gleichung (6.4)(C).

Um die Effekte auf den Leiterkreis zu studieren, betrachten wir die Integralform von (6.9) mit Hilfe des Stokeschen Satzes. Die Zirkulation von \mathbf{E} entlang R entspricht einer Induktionsspannung V_{ind} und ist gegeben durch (wir können den Index R weglassen)

$$V_{ind} = \oint_R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \quad (k = 1) . \quad (6.10)$$

Das ist das Faray’sche Induktionsgesetz. (6.10) bedeutet, dass eine Änderung des magnetischen Flusses durch einen geschlossenen Leiterkreis eine Induktionsspannung in dem Leiterkreis erzeugt.

Bemerkungen

- (6.10) und seine Differentialform

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0} \quad (6.11)$$

gelten allgemein: Die Änderung des Flusses kann sowohl durch eine Bewegung des Leiterkreises (wie oben diskutiert) als auch durch eine reine Zeitabhängigkeit des \mathbf{B} -Feldes erzeugt werden.

- Gleichung (6.10) gilt unabhängig davon, ob der Leiterkreis tatsächlich vorhanden ist, dieser dient nur zum experimentellen Nachweis des induzierten Feldes
- Bildet man die Divergenz von (6.11) erhält man $\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{B}}{\partial t} = 0$. D. h. (6.4)(B) bleibt bestehen. Auch in (6.10) ist es implizit, dass verschiedene Oberflächen, die durch R abgegrenzt sind, den gleichen magnetischen Fluß haben. Das bedeutet, dass der magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche verschwindet (Fig. 6.1).

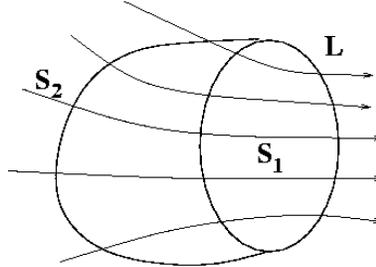
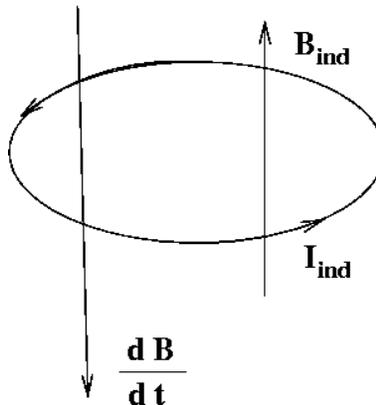


Abbildung 6.1: Der Fluss von \mathbf{B} durch die Oberflächen S_1 und S_2 , beide abgegrenzt durch R , ist nach (6.10) gleich. Daher ist der Gesamtfluss durch die geschlossene Oberfläche $S_1 + S_2$ gleich Null.

- Das Vorzeichen in (6.10) spiegelt die **Lenz'sche Regel** wider. Das bedeutet, dass die durch das zeitabhängige \mathbf{B} -Feld induzierte Spannung, und daher Strom, erzeugt (wegen (4.22)) ein Magnetfeld, das entgegen dem (wachsenden) \mathbf{B} -Feld gerichtet ist (Skizze).



- Im **cgs**-System ist die Konstante k in (6.10) $k = 1/c$.

Anwendungen:

Betatron: In dem von einem zeitlich veränderlichen \mathbf{B} -Feld induzierten elektrischen Feld \mathbf{E} werden geladene Teilchen beschleunigt.

Wechselstrom-Generator: In einer in einem konstanten \mathbf{B} -Feld rotierenden Spule wird wegen des zeitabhängigen magnetischen Flusses eine Wechselspannung erzeugt.

6.4 Erweiterung des Ampère'schen Gesetzes

Das Ampère'sche Gesetz der Magnetostatik (6.4)(D)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (6.12)$$

gilt nur für stationäre Ströme. Bildet man nämlich

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j}, \quad (6.13)$$

so erhält man wegen der Identität

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0, \quad (6.14)$$

gerade $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, d.h. stationäre Ströme. Allgemein gilt jedoch die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (6.15)$$

so dass (6.12) für nichtstationäre Ströme modifiziert werden muss.

Wie diese Modifikation aussehen muss, wird sofort klar, wenn man das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik ((6.4)(A)) beibehält:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.16)$$

was durch die in Abschnitt 1 aufgeführte Ladungsinvarianz gestützt wird. Kombiniert man nun die Kontinuitätsgleichung (6.15) und (6.16), so folgt:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6.17)$$

Ersetzt man daher

$$\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}_M \equiv \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (6.18)$$

so hat man wieder eine „Stromdichte“ mit verschwindender Divergenz wie in der Magnetostatik. Diese „Stromdichte“ \mathbf{j}_M wird Maxwell Verschiebungsstrom genannt. In Einklang mit der Ladungserhaltung erweitern wir also (6.12) wie folgt:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_M = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}. \quad (6.19)$$

Das Ampère'sche Gesetz (6.19) findet seine experimentelle Bestätigung in der Existenz elektromagnetischer Wellen (Teil IV).

Selbstinduktion

Ein stromdurchflossener Leiter erzeugt in seiner Umgebung gemäß (6.19) ein \mathbf{B} (und \mathbf{E}) Feld. Ändert sich der Fluss dieses \mathbf{B} -Feldes durch den Leiterkreis, so wird im Leiterkreis ein Induktionsstrom erzeugt (Selbstinduktion), der nach (6.10) dem primären Strom entgegen gerichtet ist (Lenz'sche Regel).

Die Selbstinduktion hängt von der Geometrie des Leiters ab. Für eine quantitative Formulierung greift man zweckmäßigerweise auf die elektromagnetischen Potentiale zurück (Kap. 7).

6.5 Übersicht über die Maxwell'schen Gleichungen

Homogene Gleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}, \quad (6.20)$$

was dem Fehlen magnetischer Monopole entspricht.

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0}, \quad (6.21)$$

was dem Faraday'schen Induktionsgesetz entspricht.

Inhomogene Gleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}, \quad (6.22)$$

was dem Gauß'schen Gesetz entspricht.

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}}, \quad (6.23)$$

was dem Ampère-Maxwell'schen Gesetz entspricht.

In (6.22) und (6.23) ist die Ladungserhaltung (6.15) schon implizit enthalten. (6.21) und (6.23) zeigen, daß ein zeitlich sich änderndes Magnetfeld \mathbf{B} ein elektrisches Feld \mathbf{E} bedingt und umgekehrt. Die Gleichungen (6.20) – (6.23) beschreiben zusammen mit der Lorentz-Kraft

$$\mathbf{K} = q [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]. \quad (6.24)$$

vollständig die elektromagnetische Wechselwirkung geladener Teilchen im Rahmen der klassischen Physik.

Maxwell Gleichungen im Vakuum

(A) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(B) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
(C) $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$	(D) $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$

(6.25)

Kapitel 7

Die elektromagnetischen Potentiale

7.1 Skalares Potential und Vektorpotential

Um die gekoppelten Differentialgleichungen (6.20) - (6.23) für \mathbf{E} und \mathbf{B} zu lösen, ist es meist zweckmäßig - analog dem Vorgehen in der Elektrostatik und Magnetostatik - elektromagnetische Potentiale einzuführen.

Da auch für dynamische Felder

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (7.1)$$

gilt, können wir weiterhin ein Vektorpotential $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ über die Beziehung

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \quad (7.2)$$

einführen. Dann schreibt sich das Induktionsgesetz (6.25)(C) als

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (7.3)$$

\mathbf{E} selber ist nicht mehr wirbelfrei und kann daher nicht mehr als Gradient eines Potentials geschrieben werden. Dafür lässt sich das Vektorfeld in (7.3) als Gradient einer skalaren Funktion $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$ darstellen:

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \phi, \quad (7.4)$$

oder

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi}. \quad (7.5)$$

Mit (7.2) und (7.5) sind \mathbf{E} und \mathbf{B} auf das Vektorpotential \mathbf{A} und das skalare Potential ϕ zurückgeführt.

Gleichungen für \mathbf{A} und ϕ

Wir müssen nun die Differentialgleichungen aufstellen, aus denen \mathbf{A} und ϕ berechnet

werden können, wenn ρ und \mathbf{j} vorgegeben sind. Dazu benutzen wir die inhomogenen Gleichungen (6.22) und (6.23). Aus (6.22) folgt mit \mathbf{E} aus (7.5):

$$\nabla^2 \phi + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.6)$$

und aus (6.23) mit (7.2):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mu_0 \epsilon_0 \left(\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (7.7)$$

Mit der Identität

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = -\nabla^2 \mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) \quad (7.8)$$

geht (7.7) über in:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (7.9)$$

Damit haben wir die 8 Maxwell-Gleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{B} überführt in 4 Gleichungen ((7.6) und (7.9)) für die Potentiale \mathbf{A} und ϕ , die jedoch untereinander gekoppelt sind.

Eichinvarianz

Zur Entkopplung von ((7.6) und (7.9)) machen wir von der sog. *Eichinvarianz* gebrauch. Nach dieser sind die physikalischen Felder (7.2) und (7.5) (und daher auch die Maxwell-Gleichungen) unter den Eichtransformationen

$$\boxed{\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi}, \quad (7.10)$$

$$\boxed{\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}} \quad (7.11)$$

invariant sind. Hierbei ist $\chi(\mathbf{r}, t)$ eine beliebige (2-mal stetig differenzierbare) Funktion.

Beweis:

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \chi) = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7.12)$$

$$-\mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \nabla \chi}{\partial t} + \nabla \phi - \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \quad (7.13)$$

7.2 Lorenz-Eichung

1

Gleichung (7.9) legt nahe, χ so zu wählen, daß

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (7.14)$$

¹Nach dem dänischen Physiker Ludvig Lorenz. Diese wird oft fälschlicherweise (auch in früheren Versionen dieses Skriptums) als Lorentz-Eichung bezeichnet und dem niederländischen Physiker Hendrik Antoon Lorentz zugeschrieben.

was der **Lorenz-Konvention** entspricht.

Man erhält dann aus (7.9), (7.6) und (7.14) entkoppelte Gleichungen:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (7.15)$$

$$\nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7.16)$$

welche jeweils die gleiche mathematische Struktur besitzen. Sie vereinfachen sich für zeitunabhängige Felder auf die Gleichungen (2.26) und (5.17) der Elektrostatik bzw. Magnetostatik. Die Lorenz-Eichung (7.14) wird bei der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik unter Verwendung von

$$\boxed{\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}} \quad (7.17)$$

benutzt.

Konstruktion von χ

Falls

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv f(\mathbf{r}, t) \neq 0 \quad (7.18)$$

wäre, so führen wir eine Eichtransformation ((7.10),(7.11)) durch und fordern für die transformierten Felder (7.22) (7.23):

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi'}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \chi + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \quad (7.19)$$

Gleichung (7.19) ist eine inhomogene, partielle Differentialgleichung 2. Ordnung der Form

$$\nabla^2 \chi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -f(\mathbf{r}, t). \quad (7.20)$$

Bei gegebener Inhomogenität $-f(\mathbf{r}, t)$. ist die Lösung mehrdeutig, da zu jeder Lösung von (7.20) noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\nabla^2 \chi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (7.21)$$

addiert werden kann.

7.3 Coulomb-Eichung

In der Atom- und Kernphysik wird χ meist so gewählt, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (7.22)$$

Dann geht (7.6) über in

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (7.23)$$

mit der schon bekannten (partikulären) Lösung:²

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (7.24)$$

Aus (7.9) wird

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t) / \partial t (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \\ &= -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t))(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' , \end{aligned} \quad (7.25)$$

wobei wir die Kontinuitätsgleichung verwendet haben. Die Gleichung für \mathbf{A} enthält also nur die Stromdichte \mathbf{j} .

Elektromagnetische Wellen

In quellenfreien Gebieten mit

$$\rho = 0; \quad \mathbf{j} = 0 \quad (7.26)$$

reduzieren sich (7.24) und (7.25) dann auf:

$$\phi = 0; \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (7.27)$$

Die Lösungen von (7.27) sind elektromagnetische Wellen, z.B. in Form transversaler, ebener Wellen (siehe Teil IV).

Konstruktion von χ

Erfüllt die Lösung \mathbf{A} von (7.9) nicht die Eichbedingung (7.22), so führen wir die Transformation (7.10), (7.11) durch und fordern (schon gesehen in (5.19), (5.20))

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \chi = 0, \quad (7.28)$$

oder

$$\nabla^2 \chi = -\nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (7.29)$$

Dies ist ein Spezialfall von (7.20) mit $-\nabla \cdot \mathbf{A}$ als Inhomogenität. Mehrdeutigkeit von χ : Zu jeder Lösung von (7.29) kann man noch eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung

$$\nabla^2 \chi = 0 \quad (7.30)$$

addieren.

²(7.24) scheint eine *Fernwirkung* auf das Potential ϕ zu sein. Allerdings stellt sich heraus, dass die Wirkung auf die \mathbf{B} und \mathbf{E} Felder stets eine *Nahwirkung* ist.

Kapitel 8

Energie, Impuls und Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes

8.1 Energie

In Abschnitt 2.5 hatten wir dem elektrostatischen Feld eine Energie zugeordnet, charakterisiert durch die Energiedichte

$$\omega_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2. \quad (8.1)$$

Analog kann man dem magnetostatischen Feld eine Energie zuordnen. Wir wollen diesen Schritt überspringen und direkt die Energiebilanz für ein beliebiges elektromagnetisches Feld aufstellen.

Wir betrachten dazu zunächst eine Punktladung q , die sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} in einem EM Feld $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ bewegt. Die an dieser Ladung vom Feld geleistete Arbeit ist gegeben durch:

$$\boxed{\frac{dW_M}{dt} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = q [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}, \quad (8.2)$$

da das Magnetfeld keine Arbeit leistet. Entsprechend gilt für einen Strom der Stromdichte \mathbf{j} :

$$\frac{dW_M}{dt} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV. \quad (8.3)$$

Die an den bewegten Punktladungen vom Feld geleistete Arbeit geht auf Kosten der Energie des EM Feldes, deren explizite Form im Folgenden hergeleitet werden soll.

Wie im statischen Fall wollen wir die Potentialenergien der Ladungen als Feldenergien betrachten. Die Ladungen und Ströme sollen also mit Hilfe der Maxwell Gleichungen eliminiert werden. Wir eliminieren in (8.3) zunächst die sich auf die bewegten Massenpunkte beziehende Stromdichte \mathbf{j} mit Hilfe des Ampère-Maxwell'schen Gesetzes (6.23):

$$\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV = \int_V \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dV. \quad (8.4)$$

Diesen Ausdruck, der nur noch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} enthält, können wir bzgl. \mathbf{E} und \mathbf{B} symmetrisieren. Wir verwenden

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \partial_i \epsilon_{ijk} E_j B_k = \epsilon_{ijk} (\partial_i E_j) B_k + \epsilon_{ijk} E_j (\partial_i B_k) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

sowie das Induktionsgesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ und finden:

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (8.5)$$

Setzen wir nun (8.5) in (8.4) ein, so erhalten wir:

$$\frac{dW_M}{dt} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV = - \int_V \left(\underbrace{\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t} + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}}_{\partial \omega_F / \partial t} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}_{\nabla \cdot \mathbf{S}} \right) dV. \quad (8.6)$$

Interpretation

Wir schreiben (8.6) als die Summe von drei Beiträgen:

$$\frac{dW_M}{dt} + \frac{dU_F}{dt} + \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV = 0, \quad (8.7)$$

mit der **Feldenergie**

$$U_F = \int_V \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) dV, \quad (8.8)$$

und dem **Poynting-Vektor**

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (8.9)$$

In (8.8) können wir nun die **Energiedichte des EM Feldes**

$$\omega_F = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (8.10)$$

eingeführen, welche sich aus einem elektrischen Anteil (vgl. (8.1))

$$\omega_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (8.11)$$

und einem magnetischen Anteil

$$\omega_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (8.12)$$

zusammensetzt.

Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes können wir die Divergenz in (8.7) in ein Oberflächenintegral umwandeln:

$$\frac{dU_F}{dt} = - \frac{dW_M}{dt} - \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}. \quad (8.13)$$

(8.13) beschreibt also folgende Energiebilanz: Die Feldenergie U_F in einem Volumen V kann sich dadurch ändern,

- (a) dass das EM Feld Arbeit ($\frac{dW_M}{dt}$) an Ladungen (8.3) leistet (U_F wird also in kinetische Energie der Ladungen umgewandelt)
- (b) dass Energie in Form von EM Strahlung aus dem Volumen V hinausströmt (hin- einströmt, falls das Oberflächenintegral in (8.13) negativ ist). In Analogie zur La- dungserhaltung (Abschnitt 4.1) bezeichnen wir den Poynting-Vektor \mathbf{S} als Energie- stromdichte.

Die Energiebilanz zeigt, dass die Energie des abgeschlossenen Systems (Punktladungen plus EM Feld) eine Erhaltungsgröße ist.

Die Energiebilanz (8.13) lautet in Differentialform

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \omega_F}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 . \quad (8.14)$$

Für den Fall eines unendlichen Volumens und falls die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} asymptotisch schnell genug abfallen (d. h. ihr Produkt schneller als $1/r^2$ abfällt), verschwindet das Oberflächenintegral. Dann ist die Energiebilanz (8.13) durch die Arbeit und durch die Feldenergie erfüllt. Für statische Felder ist die obige Voraussetzung erfüllt, nicht dagegen für Strahlungsfelder (vgl. Kap. 15). Wie wir sehen werden, wird sozusagen von Strah- lungsfeldern Energie „ins Unendliche“ verschleudert.

8.2 Impuls

Dem EM Feld kann man außer Energie auch Impuls zuordnen. Wir werden auch in diesem Fall eine Impulsdichte sowie eine „Impulsstromdichte“ herleiten. Da aber der *Impuls ein Vektor* ist, benötigen wir eine Stromdichte (die ebenfalls ein Vektor ist) für jede Impuls- komponente. Wir werden also sehen, dass die *Impulsstromdichte von einem Tensor* (dem **Maxwell'sche Spannungstensor**) beschrieben wird.

Wir beginnen wieder mit der Impulsbilanz für eine Punktladung q mit der Geschwin- digkeit \mathbf{v} . Nach Newton gilt dann für die Änderung des Impulses \mathbf{p}_M der Punktladung:

$$\frac{d\mathbf{p}_M}{dt} = q [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] . \quad (8.15)$$

Für N Punktladungen, charakterisiert durch eine Stromdichte \mathbf{j} und Ladungsdichte ρ , erhalten wir entsprechend für den Gesamtimpuls \mathbf{P}_M der Ladungen:

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V [\rho \mathbf{E} + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})] dV . \quad (8.16)$$

Analog zu Abschnitt 8.1 versuchen wir ρ und \mathbf{j} zu eliminieren, so dass die rechte Seite in (8.16) nur noch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} enthält.

Wir benutzen dazu

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (8.17)$$

und

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (8.18)$$

Das Resultat

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V \left[\epsilon_0 \mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \right] dV \quad (8.19)$$

können wir bzgl. \mathbf{E} und \mathbf{B} symmetrisieren, indem wir in (8.19) den (verschwindenden) Term

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad (8.20)$$

hinzufügen und in

$$- \epsilon_0 \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) = - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \epsilon_0 \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (8.21)$$

das Induktionsgesetz ausnutzen:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8.22)$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int_V \left\{ \epsilon_0 \mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right. \\ \left. - \epsilon_0 \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right\} dV. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Wir verwenden die Abkürzung $\partial_m \equiv \partial/\partial x_m$ und fassen für die Interpretation von (8.23) einige Terme wie folgt zusammen [mehr in B.1.6]

$$\begin{aligned} [\mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i &= E_i \partial_m E_m - \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} E_j \partial_l E_m = \\ &= E_i \partial_m E_m - (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) E_j \partial_l E_m = E_i \partial_m E_m - E_m \partial_i E_m + E_m \partial_m E_i \\ &= -\frac{1}{2} \partial_i E_m^2 + \partial_m E_m E_i = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} \left(E_i E_m - \frac{1}{2} E^2 \delta_{im} \right). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Entsprechend verfahren wir für die \mathbf{B} -Terme.

Ergebnis:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_M + \mathbf{P}_F)_i + \int_V \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} T_{im} dV = 0, \quad (8.25)$$

wobei der **Maxwell Spannungstensor** T_{im} durch

$$T_{im} = \epsilon_0 \left(\frac{E^2}{2} \delta_{im} - E_i E_m \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{B^2}{2} \delta_{im} - B_i B_m \right) \quad (8.26)$$

gegeben ist.

\mathbf{P}_F kann als Gesamtimpuls des EM Feldes betrachtet werden und ist gegeben durch

$$\mathbf{P}_F = \int_V \boldsymbol{\pi}_F dV \quad (8.27)$$

mit der Impulsdichte

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}_F = \epsilon_0(\mathbf{E} \times \mathbf{B})} \quad (8.28)$$

Im letzten Integral in (8.25) kann der Gauß'sche Satz folgendermaßen angewandt werden: Aus dem Tensor T_{im} können wir für jedes i einen Vektor $\mathbf{T}_i \equiv (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})$ bilden. Aus dem Gauß'schen Satz haben wir also

$$\int_V \partial_m T_{im} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T}_i dV = \int_{\partial V} \mathbf{T}_i \cdot d\mathbf{f} = \int_{\partial V} T_{im} \cdot df_m, \quad (8.29)$$

verglichen mit (8.25) kann dieses als Fluss der i -Komponente des EM Impulses durch die Oberfläche ∂V interpretiert werden. Dieser „Fluss“ entspricht der Menge an Impuls, die durch die Oberfläche F pro Zeiteinheit fließt, also nach Newton auch die (i -Komponente der) Kraft K_i , die vom EM Feld an die Oberfläche F angewandt wird (ob diese Kraft durch die Fläche als Impuls „weitergeleitet“ oder von der Fläche absorbiert wird ist von (8.29) nicht beschrieben).

Die übertragene Kraft pro Flächeneinheit ($\mathbf{k} \equiv \Delta\mathbf{K}/\Delta F$) hat die Komponenten $k_i = \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{n} = T_{im}n_m$, wo \mathbf{n} die Normale an die Oberfläche ist. Diese Kraft hat sowohl eine Normalkomponente $p \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = n_i T_{im}n_m$, die als Druck des EM-Feldes (**Strahlungsdruck**) gesehen werden kann, als auch eine Komponente, die parallel zur Fläche F steht. Aus (8.26) kann man den Strahlungsdruck bestimmen:

$$p = n_i T_{im}n_m = \frac{\epsilon_0}{2} [|\mathbf{E}|^2 - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})^2] + \frac{1}{2\mu_0} [|\mathbf{B}|^2 - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})^2] \quad (8.30)$$

Der Strahlungsdruck des Lichts wurde von Lebedev und Hull direkt an einer Drehwaage nachgewiesen. An den Balkenenden angebrachte Metallplättchen wurden im Takt der Eigenschwingung jeweils belichtet; es wurden in Resonanz gut beobachtbare Ausschläge erhalten. Das elektromagnetische Feld überträgt auf einen Absorber also nicht nur Energie, sondern auch Impuls.

Ähnlich zur Energiebilanz gibt es also für das EM-Feld eine Impulsbilanz: Der gesamte Impuls des EM Feldes in einem Volumen V kann sich dadurch ändern, (a) dass Impuls an Ladungen übertragen wird, oder (b) dass Kraft an die Randoberfläche übertragen wird. Zusammenfassend lautet (aus (8.25)) die Impulserhaltung in Integralform

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_M + \mathbf{P}_F)_i + \oint_F \sum_{m=1}^3 T_{im} df_m = 0}, \quad (8.31)$$

und in differentieller form

$$\boxed{\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_F}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{\underline{T}} = 0}, \quad (8.32)$$

Bemerkung

Die Tatsache, dass die sich die Impulsdichte $\boldsymbol{\pi}_F$ und die Energiestromdichte \mathbf{S} nur um einen konstanten Faktor unterscheiden,

$$\boldsymbol{\pi}_F = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}, \quad (8.33)$$

ist kein Zufall, sondern ergibt sich zwangsläufig im Rahmen der relativistischen Formulierung. [mehr in B.1.7]

8.3 Drehimpuls

Die Änderung des Drehimpulses einer Punktladung q im elektromagnetischen Feld ist durch

$$\frac{d\mathbf{l}_M}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}_M}{dt} = q \mathbf{r} \times [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \quad (8.34)$$

gegeben. Entsprechend gilt für N Punktladungen, welche durch ρ und \mathbf{j} charakterisiert seien, im Volumen V :

$$\frac{d\mathbf{L}_M}{dt} = \int_V \mathbf{r} \times [\rho \mathbf{E} + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})] dV . \quad (8.35)$$

Eliminiert man ρ und \mathbf{j} und symmetrisiert man das Resultat bzgl. \mathbf{E} und \mathbf{B} , so erhält man analog Abschnitt 8.2

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_M}{dt} = \int_V \mathbf{r} \times \left\{ \epsilon_0 \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right. \\ \left. - \epsilon_0 (\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right\} dV . \end{aligned}$$

Fallen die Felder asymptotisch rasch genug ab, d.h. stärker als $1/R$, so bleibt für $V \rightarrow \infty$:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}_M + \mathbf{L}_F) = 0, \quad (8.36)$$

mit

$$\mathbf{L}_F = \epsilon_0 \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = \int_V \mathbf{r} \times \boldsymbol{\pi}_F dV \quad (8.37)$$

als **Drehimpuls** des Feldes, was mit der Interpretation von $\boldsymbol{\pi}_F$ als Impulsdichte des Feldes konsistent ist. Die Summe aus dem mechanischen Drehimpuls \mathbf{L}_M und dem des Feldes \mathbf{L}_F ist (in einem unendlichen Volumen) eine Erhaltungsgröße:

$$\mathbf{L}_M + \mathbf{L}_F = \text{const} . \quad (8.38)$$

Für ein endliches Volumen bekommt man ähnlich wie beim Impuls einen Fluss vom Drehimpuls aus der Volumenoberfläche.

8.4 Zusammenfassung

Bei Abwesenheit anderer Kräfte gelten für das abgeschlossene System (Punktladungen plus Feld) die Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls. Da sich Energie, Impuls und Drehimpuls der Punktladungen zeitlich ändern, müssen wir dem Feld selbst Energie, Impuls und Drehimpuls zuordnen, um die Erhaltungssätze für das Gesamtsystem zu garantieren. Die Grundgrößen

Energiedichte

$$\omega_F = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2, \quad (8.39)$$

Impulsdichte

$$\boldsymbol{\pi}_F = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (8.40)$$

und Drehimpulsdichte

$$\boldsymbol{\lambda}_F = \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\pi}_F \quad (8.41)$$

findet man aus den jeweiligen Bilanzen unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen. Die Tatsache, dass man dem Maxwell-Feld *mechanische* Größen wie Energie, Impuls und Drehimpuls zuordnen kann, bietet die Grundlage für die im atomaren Bereich benutzte Beschreibung elektromagnetischer Phänomene durch **Teilchen**, welche als **Photonen** bezeichnet werden.

Teil IV

Elektromagnetische Strahlung im
Vakuum

⋮

Kapitel 9

Das elektromagnetische Feld im Vakuum

⋮

9.1 Homogene Wellengleichungen

Im Vakuum ($\rho = 0$; $\mathbf{j} = 0$) lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (9.1)$$

Zur *Entkopplung* von \mathbf{E} und \mathbf{B} bilden wir

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \\ &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Das Resultat ist eine homogene Wellengleichung

$$\boxed{\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0}; \quad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0. \quad (9.3)$$

Analog verfährt man mit dem \mathbf{E} -Feld. Mit der Abkürzung

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (9.4)$$

für den **d'Alembert-Operator** \square erhält man dann anstelle von (9.1)

$$\begin{aligned} \square \mathbf{B} &= 0; & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \square \mathbf{E} &= 0; & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (9.5)$$

Für die zugehörigen Potentiale findet man nach Kapitel 7:

$$\square \mathbf{A} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (9.6)$$

$$\phi = 0 \quad (9.7)$$

in der Coulomb-Eichung (was im Quellenfreien Fall auch die Lorenz-Eichungsbedingung (7.14) erfüllt).

Wir haben also Differentialgleichungen vom Typ

$$\square f(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (9.8)$$

zu lösen, wobei f für irgendeine Komponente von \mathbf{E} , \mathbf{B} oder \mathbf{A} steht. Die Lösungen für \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{A} sind dann noch der Nebenbedingung unterworfen, dass die Divergenz verschwindet (Transversalitätsbedingung).

9.2 Monochromatische Ebene Wellen

Zur Lösung von (9.8) bilden wir den Ansatz

$$f = f_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)). \quad (9.9)$$

(9.8) ergibt

$$\left(-\mathbf{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (9.10)$$

(9.9) ist also eine Lösung von (9.8) vorausgesetzt die **Dispersionsrelation**

$$\boxed{\omega^2 = k^2 c^2} \quad (9.11)$$

gilt.

Für die elektrische Feldstärke und die Magnetische Induktion haben wir:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)), \quad (9.12)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)), \quad (9.13)$$

wo \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 konstante Vektoren sind, die noch einige Bedingungen (siehe unten) erfüllen müssen. Analog ist die Lösung für \mathbf{A} .

Komplexe vs. reelle Felder

\mathbf{E} , \mathbf{A} und \mathbf{B} sind als Messgrößen reelle Vektorfelder. Die komplexe Schreibweise in den Gleichungen (9.9,9.12) ist verabredungsgemäß so zu verstehen, dass das physikalische Vektorfeld durch den *Realteil* von diesen Ausdrücken beschrieben wird. Die komplexe Schreibweise ist oft (z.B. beim Differenzieren) bequemer als die reelle; sie ist problemlos, solange nur lineare Operationen durchgeführt werden.

Vorsicht ist geboten bei der Berechnung physikalischer Größen wie etwa der Energiestromdichte. In diesem Fall treten Produkte von Vektorfeldern auf, wie z.B.

$$\mathbf{E}^2. \quad (9.14)$$

Da muß der Realteil **vor** der Quadrierung durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 &= (\operatorname{Re} \mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t)))^2 \\ &\neq \operatorname{Re} (\mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t)))^2 \quad \text{falsch !} \end{aligned} \quad (9.15)$$

Zeitliche Mittelwerte $\overline{\dots}$ solcher Produkte kann man in komplexer Schreibweise wie folgt berechnen: Für zwei Vektorfelder

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t); \quad \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (9.16)$$

gilt für den zeitlichen Mittelwert des Produktes

$$\overline{(Re\mathbf{a}) \cdot (Re\mathbf{b})} = \frac{1}{2} Re(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^*), \quad (9.17)$$

denn in

$$(Re\mathbf{a}) \cdot (Re\mathbf{b}) = \frac{1}{4} (\mathbf{a}_0 \exp(-i\omega t) + \mathbf{a}_0^* \exp(i\omega t)) (\mathbf{b}_0 \exp(-i\omega t) + \mathbf{b}_0^* \exp(i\omega t)) \quad (9.18)$$

verschwinden die gemischten Terme mit den Zeitfaktoren $\exp(\pm 2i\omega t)$ nach Zeitmittelung und es bleibt

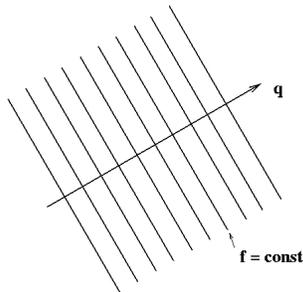
$$\overline{(Re\mathbf{a}) \cdot (Re\mathbf{b})} = \frac{1}{4} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^* + \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b}) = \frac{1}{2} Re(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^*). \quad (9.19)$$

Betrachtet man die Konvention, dass der Realteil am Ende gebildet werden soll, können Ausdrücke wie (9.12) sehr bequem differenziert werden. Man kann leicht zeigen (siehe Sec. 9.5), dass man stets diese auf folgender Weise ersetzen kann:

$$\boxed{\nabla \dots \rightarrow i\mathbf{k} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega} \quad (9.20)$$

Eigenschaften der Lösung

i) Ebene Wellen



Funktionen vom Typ (9.12) beschreiben ebene Wellen, deren Wellenfronten Ebenen sind: Die Punkte \mathbf{r} , in denen $f(\mathbf{r}, t)$ zu einer festen Zeit t den gleichen Wert annimmt, liegen auf einer Ebene (Hesse'sche Normalform)

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}, \quad (9.21)$$

welche senkrecht zu \mathbf{k} steht. \mathbf{k} bezeichnet die **Ausbreitungsrichtung**. Je nach Wahl des Vorzeichens von ω erhält man Wellen, die in $\pm\mathbf{k}$ -Richtung laufen.

ii) Transversalität der elektromagnetischen Wellen

Aus $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ folgt mit Hilfe von (9.20)

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (9.22)$$

sowie ähnlich für \mathbf{E} :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (9.23)$$

d. h., die Felder stehen **transversal** zur Ausbreitungsrichtung. Dasselbe gilt für \mathbf{A} .

iii) Orthogonalität von \mathbf{E} und \mathbf{B}

Aus der Maxwell Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.24)$$

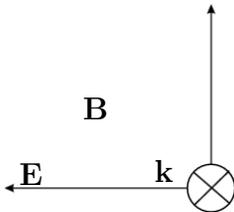
folgt mit (9.20)

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}. \quad (9.25)$$

also $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{k} bilden also ein orthogonales Dreibein (siehe Skizze). (9.25)

(9.11) legt auch die **Beträge** von \mathbf{B} und \mathbf{E} fest, nämlich:

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c. \quad (9.26)$$



Bemerkungen

- 1.) Außer ebenen Wellen sind z.B. auch Kugelwellen Lösungen von (9.8); sie haben die Form:

$$\boxed{\frac{f(r - ct)}{r}}, \quad (9.27)$$

wobei f eine beliebige (mindestens zweifach differenzierbare) Funktion ist.

- 2.) Die Existenz von elektromagnetischen Wellen (z.B. Lichtwellen, Radiowellen, Mikrowellen, γ -Strahlung etc.) beweist die Richtigkeit der Relation $\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ im Vakuum, welche entscheidend in die Herleitung der Wellengleichungen eingegangen ist. Sie stellt die experimentelle Bestätigung für das Maxwell-Ampère-Gesetz (6.19) dar.

Terminologie

Wellenvektor	\mathbf{k}	
Wellenzahl	k	$k = \mathbf{k} $
Kreisfrequenz	ω	$\omega = \pm c k$
Frequenz	ν	$\nu = \omega/(2\pi)$
Wellenlänge	λ	$\lambda = (2\pi)/k$
Schwingungsdauer	τ	$\tau = (2\pi)/\omega$

Anhand von (9.12) sieht man, dass τ die zeitliche Periodizität der Welle bei festgehaltenem Ort \mathbf{r} beschreibt,

$$\exp(i\omega(t + \tau)) = \exp(i\omega t + 2\pi i) = \exp(i\omega t); \quad (9.28)$$

analog gibt die Wellenlänge λ die räumliche Periodizität an:

$$\exp(ik(z + \lambda)) = \exp(ikz + 2\pi i) = \exp(ikz) \quad (9.29)$$

für eine Welle in z -Richtung zu fester Zeit t .

Phasengeschwindigkeit

Die Größe

$$\psi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (9.30)$$

nennt man die *Phase* der Welle. Unter der Phasengeschwindigkeit v_{ph} versteht man die Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenpunkt mit vorgegebener fester Phase bewegt. Um v_{ph} zu bestimmen, betrachten wir wieder eine ebene Welle in z -Richtung und bilden das totale Differential von $\psi(z, t)$:

$$d\psi = kdz - \omega dt. \quad (9.31)$$

Für $\psi = \text{const.}$ folgt dann:

$$v_{ph} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = c; \quad (9.32)$$

die Phasengeschwindigkeit ist also gleich der Lichtgeschwindigkeit c .

9.3 Energie- und Energiestromdichte

Streng genommen ist eine ebene Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung unendlich ausgedehnt; jede praktisch realisierbare Welle dagegen begrenzt. Die ebene Welle ist jedoch eine sinnvolle Approximation, wenn die Ausdehnung der realen Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung groß ist im Vergleich zu ihrer Wellenlänge und zu irgendwelchen *Hindernissen* (z.B. Spalte), durch die sie *gestört* werden kann.

Für monochromatische ebene Wellen gehen die Beziehungen

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (9.33)$$

in der komplexen Darstellung über in

$$\boxed{\mathbf{B} = i(\mathbf{k} \times \mathbf{A}); \quad \mathbf{E} = i\omega\mathbf{A}}. \quad (9.34)$$

Mit (9.34) und (9.17) lassen sich Energie (und auch Impuls) der Welle leicht ausrechnen. Der zeitliche Mittelwert der Energiedichte (reelle Darstellung) ist:

$$\bar{\omega}_F = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \omega_F dt, \quad (9.35)$$

wobei die Energiedichte ω_F (mit $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$) durch

$$\omega_F = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\epsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2) \quad (9.36)$$

gegeben ist. Mit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0$ finden wir:

$$\boxed{\bar{\omega}_F} = \frac{\epsilon_0}{4} \text{Re}(\omega^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* + c^2 k^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*) = \frac{\epsilon_0}{2} \omega^2 |\mathbf{A}_0|^2 = \boxed{\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0|^2}. \quad (9.37)$$

Energiestromdichte

Entsprechend zu (9.37) gilt (mit $\mathbf{q} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ für die Energiestromdichte (8.9)

$$\boxed{\bar{\mathbf{S}}} = \frac{\omega}{2\mu_0} |\mathbf{A}_0|^2 \mathbf{k} = \frac{\omega \mathbf{k}}{2\mu_0} \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{\omega^2} = \frac{\mathbf{k}}{2\mu_0} \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{ck} = \boxed{\frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{q}} \quad (9.38)$$

und direkt über (8.33) für die Impulsdichte ¹

$$\bar{\boldsymbol{\pi}}_F = \frac{\epsilon_0}{2c} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{q} = \frac{1}{c^2} \bar{\mathbf{S}}. \quad (9.39)$$

Vergleicht man (9.37) mit (9.38), so findet man

$$|\bar{\mathbf{S}}| = c \bar{\omega}_F; \quad c |\bar{\boldsymbol{\pi}}_F| = \bar{\omega}_F.$$

Die linke Gleichung zeigt, dass Energie des elektromagnetischen Feldes mit der Geschwindigkeit c transportiert wird. Die rechte Gleichung weist aufgrund der relativistischen Energie-Impuls Beziehung

$$E = \sqrt{m_o^2 c^4 + p^2 c^2}, \quad (E = c p)_{m_o=0}$$

auf Ruhemasse-lose Teilchen (Photonen) hin.

¹ die Impuls der Felder wird in der Vorlesung „Elektromagnetische Felder“ nicht behandelt. Wir benutzen hier das Ergebnis (8.33) für die Impulsdichte der Felder $\boldsymbol{\pi}_F = \mathbf{S}/c^2$.

9.4 Polarisation

Wegen der Transversalität und der Orthogonalität von \mathbf{E} und \mathbf{B} können wir eine monochromatische ebene Welle der Form (9.12) beschreiben durch:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)); \quad \mathbf{B} = \mathbf{e}_2 B_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \quad (9.40)$$

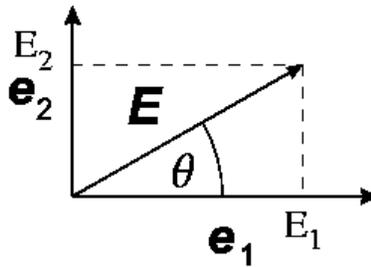
mit

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (9.41)$$

\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{k} bilden also ein orthogonales Koordinatensystem. Eine solche Welle nennt man linear polarisiert. Eine zu (9.40) *gleichberechtigte*, linear unabhängige ebene Welle zu gleichem Wellenvektor \mathbf{k} erhält man, indem man \mathbf{E} in \mathbf{e}_2 -Richtung und \mathbf{B} in (Minus) \mathbf{e}_1 -Richtung wählt. Der allgemeine Polarisationszustand einer monochromatischen ebenen Welle ergibt sich dann nach dem Superpositionsprinzip, z.B. für das elektrische Feld:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1 \tilde{E}_1 + \mathbf{e}_2 \tilde{E}_2) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)). \quad (9.42)$$

\tilde{E}_l ($l = 1, 2$) können beliebige komplexe Zahlen sein. Wir schreiben $\tilde{E}_l = E_l \exp(i\psi_l)$, mit reellem E_l , und studieren den Polarisationszustand als Funktion der Phasen ψ_l in (9.42).



Spezialfälle

1.) Lineare Polarisation liegt vor, wenn **die Phasen beider Komponenten gleich sind**

$$\psi_1 = \psi_2. \quad (9.43)$$

Richtung und Betrag von \mathbf{E} sind dann gegeben durch (s. Skizze)

$$\theta = \arctan\left(\frac{E_2}{E_1}\right); \quad E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \quad (9.44)$$

2.) Zirkuläre Polarisation:

$$E_1 = E_2 \equiv E_0; \quad \psi_1 - \psi_2 = \pm \frac{\pi}{2}; \quad (9.45)$$

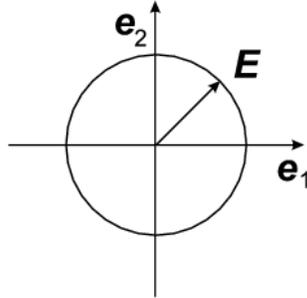
dann wird nämlich (wir können o.b.d.a. $\psi_1 = 0$ setzen)

$$\mathbf{E} = E_0(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)), \quad (9.46)$$

oder in reeller Darstellung (mit \mathbf{k} in z -Richtung)

$$E_x = E_0 \cos(kz - \omega t); E_y = \mp E_0 \sin(kz - \omega t). \quad (9.47)$$

Was eben als Funktion von t oder von z einen Kreis beschreibt. Der Drehsinn ist durch die Wahl des Vorzeichens in (9.46) festgelegt; man erhält links- bzw. rechts-zirkuläre Polarisation.

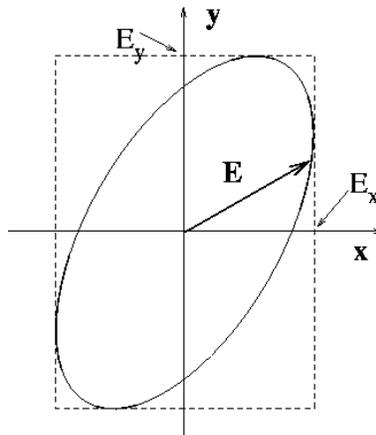


Allgemeiner Fall

3.) Elliptische Polarisation tritt auf für

$$E_1 \neq E_2; \quad \psi_1 - \psi_2 \neq 0. \quad (9.48)$$

\mathbf{E} beschreibt dann für festes z eine Ellipsenbahn, deren Lage relativ zu \mathbf{e}_1 durch $\psi_1 - \psi_2$ und deren Hauptachsenverhältnis durch E_1/E_2 bestimmt ist (Skizze).



9.5 Ergänzung: Differentialoperatoren auf Ebene Wellen

Wir wollen Ergebnisse wie (9.20), ausführlicher herleiten und mit Beispielen belegen.

Wir haben eine **monochromatische ebene Welle**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) . \quad (9.49)$$

\mathbf{E} ist das physikalische (reelle) Feld, während

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} . \quad (9.50)$$

ein zweckmäßig eingeführtes komplexes Feld ist. Die Realteilbildung ist allerdings für lineare Operationen kein Problem: Die Ableitungen bzgl. reeller Variabel, also ∇ , $\partial/\partial t$, „vertauschen“ mit Re, da

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \operatorname{Re} f(\mathbf{r}) = \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial r_i} f(\mathbf{r}) , \quad (9.51)$$

wie man sich mit Hilfe der Definition der Ableitungen überzeugen kann. Das bedeutet, dass bei Anwendung eines linearen Operators an (9.49), kann man dieses zunächst an die einfache Form (9.50) anwenden und *erst am Ende der Rechnung den Realteil bilden*. Das gilt *nur für lineare Operatoren*.

Wir haben also z. B.

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \mathbf{k} \times \mathbf{u} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} . \quad (9.52)$$

Oder

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \times \operatorname{Re} i \mathbf{u} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} . \quad (9.53)$$

Es ist ratsam, \mathbf{u} „rechts“ des Realteils zu behalten, da u.U. \mathbf{u} komplex sein kann. Ein komplexes \mathbf{u} beschreibt verschiedene Polarisationszustände, siehe Abschn. 9.4.

Also, für monochromatische ebene Wellen (9.49), die als der Realteil von (9.50) definiert werden, können Differentialoperatoren durch multiplikative Faktoren, wie in (9.20) gezeigt, ersetzt werden. *Mit der Konvention, dass am Ende der Realteil gebildet werden muss.*

Triviale Bemerkung: Ebene Wellen haben auch evtl. ein $+\omega$ statt des $-\omega$ im Exponential von (9.50). In dem Fall ändert sich entsprechend das Vorzeichen vor ω in (9.20). Ähnliches kann mit dem Vorzeichen von \mathbf{k} vorkommen: Vorsicht ist geboten!

Betrag von \mathbf{r}

Nicht ganz so einfach ist der Fall eines Vektorfeldes der Form (z. B.) (keine ebene Welle!)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u} f(q|\mathbf{r}| + c t) , \quad (9.54)$$

oder, etwas wie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u} \frac{f(q|\mathbf{r}| + c t)}{|\mathbf{r}|} , \quad (9.55)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} \frac{f(q|\mathbf{r}| + c t)}{|\mathbf{r}|}, \quad (9.56)$$

oder

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{f(q|\mathbf{r}| + c t)}{|\mathbf{r}|}. \quad (9.57)$$

Wir betrachten den einfachsten Fall (9.54). Die Kettenregel gibt

$$\nabla f(q|\mathbf{r}| + c t) = f'(q|\mathbf{r}| + c t) \nabla(q|\mathbf{r}| + c t) = f'(q|\mathbf{r}| + c t) q \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \quad (9.58)$$

Im Fall (9.54) haben wir also die „Regel“

$$\nabla \cdots \rightarrow q \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial \xi} \cdots \quad (\xi = q|\mathbf{r}| + c t). \quad (9.59)$$

So was ähnliches hatten wir schon in den Übungsaufgaben gesehen, nämlich

$$\nabla f(|\mathbf{r}|) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} f'(|\mathbf{r}|). \quad (9.60)$$

Die Zeitableitung ist einfacher.

Bei Formen wie (9.55), (9.56), (9.57) benutzt man die Produktregel und wendet ∇ an die verschiedenen Terme getrennt an.

Z.B.:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} f(q|\mathbf{r}| + c t) \right) &= \frac{f(\xi)}{|\mathbf{r}|} \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{f(\xi)}{|\mathbf{r}|} = \\ &= 3 \frac{f(\xi)}{|\mathbf{r}|} + \left(\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \frac{\partial}{\partial |\mathbf{r}|} \frac{f(\xi)}{|\mathbf{r}|} = \\ &= 3 \frac{f(\xi)}{|\mathbf{r}|} + \frac{f'(\xi) q|\mathbf{r}| - f(\xi)}{|\mathbf{r}|} \quad (9.61) \\ &(\xi = q|\mathbf{r}| + c t) \end{aligned}$$

Kapitel 10

Wellenpakete im Vakuum

10.1 Informationsübertragung durch elektromagnetische Wellen

Ein wichtiger Anwendungsbereich elektromagnetischer Strahlung ist die Informationsübertragung. *Monochromatische ebene Wellen* sind dazu ungeeignet, da sie praktisch *keine Information außer ihrer Periode (ω) vermitteln* können. Man kann monochromatische ebene Wellen jedoch **modulieren** und so Information übertragen. Im einfachsten Fall bildet man eine Überlagerung aus 2 monochromatischen Wellen:

$$f(t) = f_0 \cos(\omega_1 t) + f_0 \cos(\omega_2 t) . \quad (10.1)$$

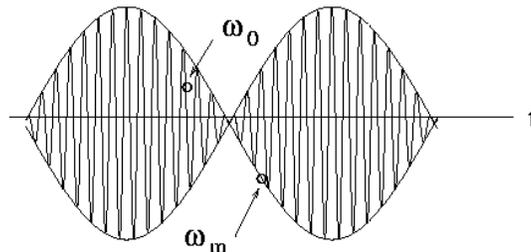
Alternativ kann (10.1) als **amplituden-modulierte Schwingung** dargestellt werden:

$$f(t) = 2f_0 \cos(\omega_m t) \cos(\omega_0 t) \quad (10.2)$$

mit

$$\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}; \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (10.3)$$

Wenn $\omega_1 \approx \omega_2$ gewählt wird, dann ist (10.2) eine fast harmonische Schwingung der Frequenz ω_0 (**Trägerfrequenz**), deren Amplitude sich mit der **Modulationsfrequenz** ω_m ändert. Man erhält das Bild einer *Schwebung*.



Kompliziertere Schwingungsformen und damit mehr Möglichkeiten zur Informationsübertragung ergeben sich durch Überlagerung mehrerer Schwingungen verschiedener Frequenzen.

10.2 Fourier-Integrale

Unter bestimmten Voraussetzungen der Stetigkeit und Konvergenz lassen sich Funktionen durch Fourier-Integrale darstellen:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (10.4)$$

Für die Umkehrung von (10.4) haben wir:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt \quad (10.5)$$

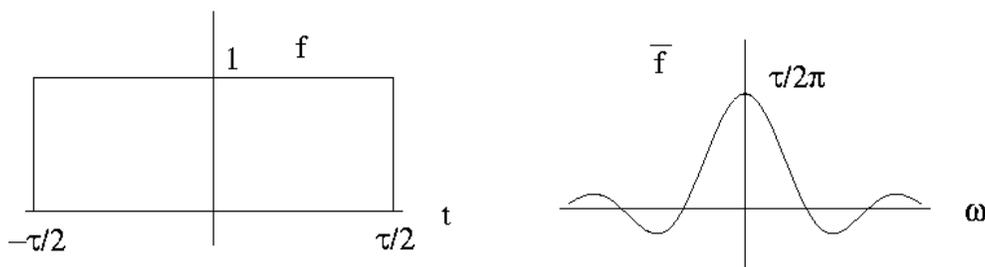
$\tilde{f}(\omega)$ heißt die **Fourier-Transformierte** zu $f(t)$. Sie existiert und (10.4) konvergiert im quadratischen Mittel für alle quadratintegrierbaren Funktionen $f(t)$, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty; \quad (10.6)$$

$\tilde{f}(\omega)$ ist dann auch quadratintegrierbar.

Beispiel: Rechteckimpuls

$$f(t) = 1 \quad \text{für} \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}; \quad f(t) = 0 \quad \text{sonst.} \quad (10.7)$$



Dann wird

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(i\omega t) dt = \frac{1}{\pi\omega} \frac{\exp(i\omega t)}{2i} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\pi\omega}. \quad (10.8)$$

Die Breite $\Delta\omega$ von $\tilde{f}(\omega)$ schätzt man aus obiger Figur ab zu:

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{oder} \quad \Delta\omega\Delta t \approx 2\pi. \quad (10.9)$$

Je schmaler (breiter) das Signal $f(t)$ werden soll, desto breiter (schmäler) ist das Frequenzspektrum, das man benötigt. Diese **Unschärferelation** ist nicht an das Beispiel (10.7) gebunden, sondern ist ein charakteristisches Merkmal der Fourier-Transformation.

Bemerkung

Oft wird die Fourier-Transformation in der symmetrischen Form

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (10.10)$$

mit

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt \quad (10.11)$$

definiert.

In drei Dimensionen wird die Fourier-transformation für jede Komponente durchgeführt. [mehr in B.1.8] Die Transformation erfolgt also vom Ortsraum $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ zum Wellenvektorraum $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$:

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{g}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{k} \quad (10.12)$$

mit

$$\tilde{g}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} . \quad (10.13)$$

Das „plus“ oder „minus“ Vorzeichen im Exponenten der Gl. 10.12 bzw. Gl. 10.13 ist eine Konventionssache. Die inversen Transformation Gl. 10.13 muss aber das entgegengesetzte Vorzeichen als Gl. 10.12 haben.

10.3 δ -Distribution

Die Fourier-Transformation (10.4), (10.5) führt auf das folgende mathematische Problem: Setzt man (10.5) in (10.4) ein, so muss (nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp(-i\omega(t-t')) d\omega dt' = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta(t-t') dt' \quad (10.14)$$

mit

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega(t-t')) d\omega \quad (10.15)$$

für beliebige quadratintegrale Funktionen $f(t)$ gelten (plus oder minus Zeichen im Exponenten ist egal). Die hier eingeführte Größe $\delta(t-t')$ ist offensichtlich keine gewöhnliche

Funktion, sondern eine **Distribution**, welche streng genommen nicht für sich alleine stehen darf, sondern nur in Verbindung mit der Integration in (10.14) erklärt ist.

In drei Dimensionen wird Gl. (10.15) [mehr in B.1.9]

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) d^3 k \quad (10.16)$$

Darstellungen

Die δ -Distribution, als deren Definition wir im folgenden (10.14) betrachten wollen, kann durch jede Folge stetiger Funktionen δ_n , für die

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta_n(t - t') dt' = f(t) \quad (10.17)$$

gilt, dargestellt werden. Beispiele:

1.) Rechteck

$$\delta_n(t) = n \quad \text{für} \quad |t| < \frac{1}{2n}; \quad \delta_n(t) = 0 \quad \text{sonst.} \quad (10.18)$$

2.) Gauß-Funktion („Glockenkurve“)

$$\delta_n(t) = n \exp(-\pi t^2 n^2). \quad (10.19)$$

3.) Die Darstellung

$$\delta_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nt)}{t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \exp(i\omega t) d\omega \quad (10.20)$$

führt gerade auf die Schreibweise (10.15).

Vorsicht: Die Gleichungen (10.17) - (10.20) sind so zu verstehen, dass die t' -Integration vor der Limes-Bildung $n \rightarrow \infty$ auszuführen ist!

Rechenregeln (ÜB)

1.) $\delta(t) = \delta(-t)$

2.) $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

3.) $\delta(t^2 - a^2) = [\delta(t + a) + \delta(t - a)] / (2|a|); \quad a \neq 0 .$

4.) im allgemeinen: $\delta(f(t)) = \sum_{\{t_i | f(t_i)=0\}} \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i)$

5.) Was ist $\delta'(t)$ (Ableitung)?

Mit Hilfe von partieller integration haben wir [mehr in B.1.11]

$$\int f(t_1) \delta'(t_1 - t) dt_1 = - \int f'(t_1) \delta(t_1 - t) dt_1 = -f'(t) \quad (10.21)$$

10.4 Wellenpakete

Signale endlicher Energie erhält man nur für *raum-zeitlich begrenzte Felder (Wellenpakete)*, die wir aus monochromatischen ebenen Wellen durch *Superposition* aufbauen können. Für das Vektorpotential erhalten wir (in Erweiterung der Fourier-Transformation auf 3 Dimensionen):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \overline{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) . \quad (10.22)$$

Da die Wellengleichung homogen ist, müssen die Funktionen $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \overline{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)$ diese erfüllen. Diese Funktionen sind nicht anders als monochromatische, ebene Wellen. Für jedes \mathbf{k} , gibt es zwei Lösungen mit $\omega_k = \pm c|\mathbf{k}|$. Daher können wir die $\overline{\mathbf{A}}$ Funktionen als eine beliebige lineare Kombination (mit Koeffizienten $\mathbf{A}(\mathbf{k}, \eta)/2$) dieser beiden Lösungen schreiben:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \overline{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\eta=\pm 1} \mathbf{A}(\mathbf{k}, \eta) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \eta\omega_k t)} , \quad (10.23)$$

mit der Vereinbarung¹

$$\omega_k = c|\mathbf{k}| . \quad (10.24)$$

In (10.23) haben wir eine Summe über $\eta = \pm 1$ eingeführt, um beide Basislösungen (9.12) zu berücksichtigen. Da $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ reell sein soll haben wir aber

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \eta) = \mathbf{A}(-\mathbf{k}, -\eta)^* \quad (10.25)$$

Wir können also für jedes \mathbf{k} *nur einen unabhängigen, komplexen Koeffizient* behalten, wir definieren also²

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{k}, 1) \quad (10.26)$$

Dann können wir (10.22) umschreiben als

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \operatorname{Re} [\mathbf{A}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)}] , \quad (10.27)$$

was die Superposition von monochromatischen, ebenen Wellen ersichtlich macht

Wegen $\omega_k = c|\mathbf{k}|$ kommen in (10.22) alle Frequenzen ω vor. (10.22) *ist eine beliebige Kombination der linear unabhängigen, monochromatischen, ebenen Wellen und stellt daher die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung (9.6) dar.* In der **Coulomb-Eichung** fordert man zusätzlich

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}) = 0 . \quad (10.28)$$

Photonen-Addition der Erhaltungsgrößen

Wichtig für den Aufbau der Quantenmechanik, welche das elektromagnetische Feld durch Photonen beschreibt, ist die *Eigenschaft, dass Energie, Impuls und Drehimpuls des Feldes*

¹obwohl wir $\omega_k > 0$ nehmen, sind beide Vorzeichen durch das η in (10.23) berücksichtigt

² Daher, z. B. $\mathbf{A}(\mathbf{k}, -1) = \mathbf{A}(-\mathbf{k}, 1)^* = \mathbf{A}(-\mathbf{k})^*$

sich additiv aus den Beiträgen der einzelnen monochromatischen ebenen Wellen zusammensetzen (wie z.B. (9.37)). Das ist nicht trivial, da diese Größen quadratische Funktionen der Felder sind. Trotzdem kann die Additivität dieser Größen auf folgende allgemeine Eigenschaft der Fouriertransformation (10.22) zurückgeführt werden. Wir betrachten ein Integral der Form (cf. (10.22), (10.23))

$$\int |\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r} = \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{k}' \int d^3\mathbf{k} \sum_{\eta', \eta = \pm 1} \times \mathbf{A}(-\mathbf{k}', -\eta') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}, \eta) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - i(\eta\omega_k - \eta'\omega_{k'})t} . \quad (10.29)$$

Der analog zu (10.16) mit k und r vertauscht gibt:

$$\int d^3\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') . \quad (10.30)$$

(10.29) wird also vereinfacht ($\mathbf{k} = \mathbf{k}'$, $\omega_k = \omega_{k'}$):

$$\int |\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)|^2 d^3\mathbf{r} = \frac{1}{4} \int d^3\mathbf{k} \sum_{\eta, \eta' = \pm 1} \mathbf{A}(-\mathbf{k}, -\eta') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k}, \eta) e^{-i(\eta-\eta')\omega_k t} \quad (10.31)$$

Wir berechnen die Gesamtenergie

$$U_F = \int \left[\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|^2 \right] d^3\mathbf{r} \quad (10.32)$$

mit der Form (10.31) für jeweils $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E}$ und $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ erhalten wir

$$U_F = \frac{1}{4} \int d^3\mathbf{k} \sum_{\eta, \eta' = \pm 1} \left[\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}(-\mathbf{k}, -\eta') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \eta) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}(-\mathbf{k}, -\eta') \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \eta) \right] e^{-i(\eta-\eta')\omega_k t} \quad (10.33)$$

mit der Beziehung (cf. (9.25))

$$B(\mathbf{k}, \eta) = \frac{1}{\eta\omega_k} \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \eta)$$

sowie, aus der Orthogonalität zwischen \mathbf{k} und \mathbf{E} ,

$$(-\mathbf{k} \times \mathbf{E}(-\mathbf{k}, -\eta')) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \eta)) = -k^2 \mathbf{E}(-\mathbf{k}, -\eta') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \eta)$$

erhält man

$$U_F = \frac{1}{4} \int d^3\mathbf{k} \sum_{\eta, \eta' = \pm 1} \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}(-\mathbf{k}, -\eta') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \eta) \left(1 + \eta\eta' \frac{k^2}{\omega_k^2} \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \right) e^{-i(\eta-\eta')\omega_k t} . \quad (10.34)$$

Mit $\frac{\omega_k^2}{k^2} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = c^2$, gibt die Summe Null nur für $\eta = -\eta'$, also

$$U_F = \frac{\epsilon_0}{4} \int d^3\mathbf{k} \sum_{\eta} \mathbf{E}(-\mathbf{k}, -\eta) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \eta) \quad (10.35)$$

Wir können nun Terme mit $\eta = \pm 1$, die wegen (10.25) den selben Beitrag liefern zusammenfassen:

$$U_F = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{k} |\mathbf{E}(\mathbf{k})|^2. \quad (10.36)$$

Gleichung (10.36) beschreibt die *Feldenergie als Summe (Integral) der Einzelbeiträge (9.37) der beteiligten monochromatischen Wellen*. Sie stellt, zusammen mit den entsprechenden Gleichungen für Impuls und Drehimpuls, die Grundlage für die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes durch unabhängige *Teilchen* (Photonen) dar. U_F ist selbst zeitunabhängig in Einklang mit der Energieerhaltung.

Beispiel:

Betrachten wir zwei kohärente Laserstrahlen, also zwei Wellenpakete, charakterisiert durch ihre Amplituden $\mathbf{E}_1(\mathbf{k})$, $\mathbf{E}_2(\mathbf{k})$. Die Wellenpaket seien fast monochromatisch, also $\mathbf{E}_i(\mathbf{k})$ ist stark gepeakt um \mathbf{k}_i mit $\mathbf{k}_i = \omega/c$. Die Strahlen kommen aber von unterschiedlichen Richtungen, also $\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$, die unterschiedlich genug sind, so dass $\mathbf{E}_1(\mathbf{k})$, und $\mathbf{E}_2(\mathbf{k})$ keinen Überlapp haben. Die Amplituden der Felder im Ortsraum seien $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$, und $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$. Die Strahlen treffen sich und es bildet sich Interferenz: Die Gesamtamplitude ist $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$, so dass die Gesamtenergiedichte

$$\omega_F(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|^2 \neq \omega_{F1}(\mathbf{r}, t) + \omega_{F2}(\mathbf{r}, t), \quad (10.37)$$

wo $\omega_{F_i}(\mathbf{r}, t)$ die Energiedichte des i -te Wellenpakets ist. Die Gesamtenergie ist durch (10.36) gegeben:

$$\begin{aligned} U_F &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{k} |(\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{k}))|^2 = \\ &\int d^3\mathbf{k} (|\mathbf{E}_1(\mathbf{k})|^2 + |\mathbf{E}_2(\mathbf{k})|^2 + \mathbf{E}_1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}_2(-\mathbf{k}) + \\ &\mathbf{E}_1(-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{k})) \end{aligned}$$

Die gemischten Termen (letzte Zeile) verschwinden, weil die Amplituden im \mathbf{k} -Raum keinen Überlapp haben, also sind die *Gesamtenergien* additiv:

$$U_F = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{k} (|\mathbf{E}_1(\mathbf{k})|^2 + |\mathbf{E}_2(\mathbf{k})|^2) = U_{F1} + U_{F2}$$

10.5 I Übersicht Elektrodynamik

Felder und Gleichungen

Maxwell Gleichungen

(A) $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(B) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
(C) $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$	(D) $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$

Elektrodynamische Potentiale

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$$

Eichinvarianz

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi \quad \Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

Lorenz-Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

Gleichungen:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

Coulomb-Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Erhaltungssätze

Energie

$$\frac{dU_F}{dt} + \frac{dW_M}{dt} + \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} = 0 .$$

$$U_F = \int_V \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) dV ,$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) .$$

Impuls

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_M + \mathbf{P}_F)_i + \oint_F \sum_{m=1}^3 T_{im} df_m = 0 ,$$

$$\mathbf{P}_F = \int_V \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV$$

$$T_{im} = \epsilon_0 \left(\frac{E^2}{2} \delta_{im} - E_i E_m \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{B^2}{2} \delta_{im} - B_i B_m \right)$$

Drehimpuls

$$\mathbf{L}_F = \int_V \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV$$

Elektromagnetische Strahlung im Vakuum

Wellengleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{X} = 0 \quad (\mathbf{X} = \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{A})$$

Ebene Wellen

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{X}_0 f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t) & \mathbf{X}_0 &= \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{A}_0 & \omega &= c|\mathbf{k}| \\ \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} &= \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = 0 & \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 &\propto \mathbf{B}_0 \end{aligned}$$

Monochromatische Ebene Wellen

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{X}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \mp \omega t)} \quad \text{Komplexes Feld}$$

$$\text{Re } \mathbf{X}(\mathbf{r}, t) \quad \text{Physikalisches Feld}$$

$$\nabla \rightarrow i \mathbf{k} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \mp i \omega$$

Zeitgemittelte Energiedichte, Pointingvektor, Impuls

$$\bar{\omega}_F = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0|^2 \quad \bar{\mathbf{S}} = c \frac{\mathbf{k}}{k} \bar{\omega}_F = c^2 \bar{\boldsymbol{\pi}}_F$$

Wellenpakete

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k}, t)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k}, t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\eta=\pm 1} \mathbf{X}(\mathbf{k}, \eta) e^{-i\eta \omega_k t} \quad \omega_k = c k \quad (10.38)$$

Inversion der Fouriertransformation

$$\text{aus } \int d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

$$\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k}', t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} \mathbf{X}(\mathbf{r}, t)$$

Wegen (10.38) können die $\mathbf{X}(\mathbf{k}, \eta = +1)$ und $\mathbf{X}(\mathbf{k}, \eta = -1)$ aus $\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k}, t)$ für zwei Werte von t oder aus $\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{k}, t)$ und seine Zeitableitung bestimmt werden.

Teil V

Das elektromagnetische Feld in Materie

Kapitel 11

Makroskopische Felder

Im Prinzip erlauben die Maxwell-Gleichungen von Teil III das elektromagnetische Feld beliebiger Materieanordnungen zu berechnen, sobald die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ exakt bekannt sind. In einer solchen *mikroskopischen* Theorie wird die gesamte Materie in dem betrachteten Raumbereich in Punktladungen (Elektronen und Atomkerne) zerlegt, deren Bewegungszustand dann Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ definiert. Für Materieanordnungen von *makroskopischen* Dimensionen (z.B. Kondensator mit Dielektrikum oder stromdurchflossene Spule mit Eisenkern) ist eine *mikroskopische* Rechnung in der Praxis weder durchführbar noch erstrebenswert, da *experimentell doch nur räumliche und zeitliche Mittelwerte der Felder kontrollierbar sind*. Wir werden uns daher im Folgenden mit raum-zeitlichen Mittelwerten befassen.

11.1 Makroskopische Mittelwerte

Wenn man an mikroskopischen Details nicht interessiert ist, kann man sie durch eine räumliche Mittelung über viele Atomabstände oder Gitterkonstanten eliminieren. Die Mittelung von einem Feld $A(\mathbf{r}, t)$ wird durch die Faltung mit einer geeigneten Funktion $f(\mathbf{r})$ definiert,

$$\langle A \rangle(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}' A(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) f(\mathbf{r}') \quad \text{mit} \quad \int d^3\mathbf{r}' f(\mathbf{r}') = 1. \quad (11.1)$$

Die Funktion f sei bei $\mathbf{r}' = 0$ zentriert und nicht negativ. Die einfachste Wahl hat die Form einer „Kasten“-Funktion:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{b^3} \theta(b/2 - |r_x|) \theta(b/2 - |r_y|) \theta(b/2 - |r_z|), \quad (11.2)$$

also einem kubischen Kasten mit dem Volumen $\Delta V = b^3$ und mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt. Um Unstetigkeiten zu vermeiden kann u.U. eine stetige Funktion, wie z.B. eine Gaußfunktion geeigneter sein:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/2} b^3} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}|^2}{b^2}\right). \quad (11.3)$$

Die Mittelungslänge b soll sehr groß gegenüber der Skala der mikroskopischen Ladungsfluktuationen in einem Material (also der Größe der Elementarzellen) aber klein gegenüber der Skala, auf der die zu studierenden Phänomene variieren, also typischerweise kleiner als die Wellenlänge λ , sein.

Auf ähnliche Weise werden die Felder auch über die Zeit gemittelt, damit Fluktuationen mit sehr kurzen Zeitskalen (wie z.B. Schwingungen von Molekülen) vernachlässigt werden können. Die Form dieser Zeitmittelung ist ähnlich zu (11.1). Hier führt man eine „Mittlungsfunktion“ $\bar{f}(t)$, die durch eine Mittelungszeit τ charakterisiert ist, die sehr groß gegenüber der Skala der mikroskopischen Zeitfluktuationen.

Wir wollen im Folgenden Zusammenhänge zwischen den Mittelwerten (11.1) für Ladungs- und Stromdichte einerseits und den Feldern andererseits herstellen. Ausgangspunkt sind die *mikroskopischen* Maxwell-Gleichungen.

Mikroskopische Maxwell-Gleichungen

Homogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (11.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (11.5)$$

Inhomogene Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (11.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (11.7)$$

Makroskopische Felder

Wenn wir annehmen, dass in (11.1) Differentiationen nach \mathbf{r} und t unter dem Integral ausgeführt werden dürfen, dann bekommen wir unmittelbar

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle (\mathbf{r}, t) = \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle (\mathbf{r}, t); \quad \frac{\partial}{\partial r_i} \langle A \rangle (\mathbf{r}, t) = \langle \frac{\partial A}{\partial r_i} (\mathbf{r}, t) \rangle; \quad \text{etc.}, \quad (11.8)$$

so erhalten wir aus (11.4)-(11.7) völlig analoge Gleichungen für die Mittelwerte:

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0; \quad \nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle + \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = 0 \quad (11.9)$$

und

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}; \quad \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle}{\partial t} = \mu_0 \langle \mathbf{j} \rangle . \quad (11.10)$$

Die homogenen Gleichungen (11.9) bleiben beim Übergang von den *mikroskopischen* Feldern \mathbf{E}, \mathbf{B} zu den *makroskopischen* Feldern

$$\mathcal{E} \equiv \langle \mathbf{E} \rangle; \quad \mathcal{B} \equiv \langle \mathbf{B} \rangle \quad (11.11)$$

erhalten. Diese Eigenschaft folgt aus der Linearität der Maxwellgleichungen.

In den inhomogenen Gleichungen (11.10) wollen wir nun $\langle \rho \rangle$ und $\langle \mathbf{j} \rangle$ geeignet aufteilen.

11.2 Freie und gebundene Ladungsträger

Wir befassen uns zunächst in (11.10) mit dem Zusammenhang zwischen \mathcal{E} und seinen Quellen. Dazu zerlegen wir

$$\langle \rho \rangle = \rho_b + \rho_f, \quad (11.12)$$

wobei ρ_b die im Sinne von (11.1) gemittelte Dichte der *gebundenen* Ladungsträger (b steht für 'bound') darstellt, ρ_f die gemittelte Dichte der *freien* Ladungsträger (f steht für 'free').

Freie Ladungsträger sind z.B. Leitungselektronen in Metallen, Ionen in Gasen oder Elektrolyten. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie unter dem Einfluss eines äußeren Feldes einen makroskopischen Strom bilden.

Gebundene Ladungsträger sind z.B. die Gitterbausteine eines Ionen-Kristalls (wie $NaCl$ mit den Gitterbausteinen Na^+ und Cl^-) oder die Elektronen von Atomen und Molekülen. Gebunden bedeutet dabei nicht, dass die Ladungsträger total unbeweglich sind, sondern nur, dass sie durch starke rücktreibende Kräfte an bestimmte *Gleichgewichtslagen* gebunden sind. Unter dem Einfluss des äußeren elektrischen Feldes werden diese Ladungen lediglich um kleine Abstände verschoben, also polarisiert. Es entsteht eine sogenannte

Dielektrische Polarisation.

Die Polarisation kann einerseits durch die Ausrichtung der Moleküle erfolgen, die bereits eine asymmetrische Ladungsverteilung zeigen (sog. polare Moleküle: (Fig. 11.1 oben)). Andererseits können in ursprünglich symmetrischen Molekülen Ladungen verschoben und somit Dipolmomente induziert werden, die sich dem äußeren Feld entsprechend ausrichten (Fig. 11.1 unten).

Die *makroskopische Ladungsdichte* ist gegeben (wegen (11.1)) durch die Ladungsdichte, gemittelt über ein Volumen $\Delta V \sim b^3$, das sehr viele Moleküle enthält. In so einem Volumen kompensieren sich positive und negative Ladungen: die gemittelte Ladungsdichte scheint also auch in Präsenz eines \mathbf{E} -Feldes zu verschwinden.

Betrachten wir dagegen das Dipolmoment der einzelnen Moleküle in Präsenz eines externen \mathbf{E} -Feldes (Fig. 11.1 unten) sieht man, dass dieser Vektor (ungefähr) die gleiche Richtung für alle Moleküle hat. Bildet man die vektorielle Summe der einzelnen Dipolmomente in dem Volumen ΔV erhält man ein Gesamtdipolmoment \mathbf{d} , das proportional zur Anzahl der Moleküle, also zum Volumen ΔV anwächst. Deswegen verschwindet sein Mittelwert berechnet nach (11.1) nicht.

Nach (1.32) erzeugt in \mathbf{r} ein elektrischer Dipol \mathbf{d} ein Potential

$$\phi_{\Delta V}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (11.13)$$

wo \mathbf{r}' ein Punkt innerhalb ΔV ist.¹

In völliger Analogie zur Ladungs- und Stromdichte kann man die *dielektrische Dipoldichte* oder *Polarisation* \mathbf{P} definieren als

$$\mathbf{P} = \frac{\text{elektrisches Dipolmoment}}{\text{Volumen}}. \quad (11.14)$$

Im Prinzip sollte in (11.14) der Limes $\text{Volumen} \rightarrow 0$ gebildet werden. Da wir aber ohnehin nur an makroskopischen Mittelwerten interessiert sind, reicht es in der Praxis wenn, wie oben erwähnt, das Volumen $\Delta V \sim b^3 \ll \lambda^3$.

Die Polarisation eines nichtleitenden Materials (*Dielektrikum*) ist charakterisiert durch eine Polarisationsdichteverteilung $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ in jedem Punkt \mathbf{r} des Materials. Das Potential einer solchen Dipolverteilung ist durch die Summe über alle Volumina ΔV von Beiträgen wie (11.13) gegeben. Diese Summe kann durch ein Integral über das Gesamtvolumen ersetzt werden wobei $\mathbf{d} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') dV'$ ist:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (11.15)$$

Dieser Ausdruck kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \left[\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} df' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \end{aligned} \quad (11.16)$$

wobei \mathbf{n}' der nach außen gerichtete Normaleinheitsvektor des Flächenelements $df' = \mathbf{n}' df'$ ist. Hierin kann das Oberflächenintegral des 1. Terms als Potential einer Flächenladungsdichte und das Volumenintegral des 2. Terms als Potential einer Volumenladungsdichte betrachtet werden.

Aus (11.16) können wir also das elektrostatische Potential einer Dipolverteilung (11.16) als Überlagerung des Potentials der Ladungsdichte der gebundenen Ladungsträger

$$\boxed{\rho_b(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})} \quad (11.17)$$

und der Flächenladungsdichte

$$\boxed{\gamma_b(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}} \quad (11.18)$$

betrachten. Für das entsprechende \mathbf{E} -Feld erhalten wir aus (11.16)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial V} \gamma_b(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} df' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \rho_b(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (11.19)$$

¹Voraussetzung ist $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg b \sim (\Delta V)^{1/3}$, d. h. nochmals brauchen wir Abstände, die viel größer als atomare Längen sind

Nimmt man ein genügend großes Volumen, auf dessen Oberfläche keine gebundene Ladungen sind, dann verschwinden die Oberflächenintegrale in (11.16) und (11.19).

Wir haben mit (11.17) den Zusammenhang zwischen der Ladungsdichte der gebundenen Ladungsträger und der Polarisationsladungsdichte hergestellt. Wir benutzen (11.17) zusammen mit (11.10) (links) und erhalten

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f \quad (11.20)$$

oder nach Einführung der *dielektrischen Verschiebung*, \mathcal{D} ,

$$\boxed{\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \quad (11.21)$$

erhalten wir

$$\boxed{\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_f} \quad (11.22)$$

(11.22) ersetzt also die erste inhomogene Gleichung (11.10), wobei nur die *freien* Ladungsträger als Quellen der dielektrischen Verschiebung dienen.

11.3 Mikroskopische Ströme

Wir wollen nun noch die zweite inhomogene Gleichung in (11.10) umformen. Analog zu (11.12) teilen wir auf:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_b \quad (11.23)$$

Dabei ist:

\mathbf{j}_f die von der Bewegung der freien Ladungsträger herrührende, gemäß (11.1) gemittelte, Stromdichte.

\mathbf{j}_b die von der Bewegung der gebundenen Ladungsträger herrührende (gemittelte) Stromdichte.

Solange freie und gebundene Ladungen sich nicht untereinander mischen, gilt der Ladungserhaltungssatz für freie und gebundene Ladungen unabhängig. Entsprechend gilt also die *Kontinuitätsgleichung für freie und gebundene Ladungen und deren Strömen getrennt*.

Betrachten wir also die Zeitableitung von (11.17) zusammen mit der Kontinuitätsgleichung für gebundene Ladungsträger

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_b = \nabla \cdot \mathbf{j}_b \quad (11.24)$$

Diese Gleichung legt nahe einen Strom

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (11.25)$$

einzuführen und diesen für \mathbf{j}_b zu nehmen. Allerdings stellt $\mathbf{j}_b = \mathbf{j}_P$ nicht die allgemeine Lösung von (11.24) dar. Man kann in der Tat einen beliebigen divergenzfreien Strom addieren.

Wir schreiben also

$$\mathbf{j}_b = \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M \quad (11.26)$$

mit

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_M = 0. \quad (11.27)$$

Nach (11.25) stellt \mathbf{j}_P den Strom dar, der aus der Bewegung elektrischer Dipole stammt.

Der Stromanteil \mathbf{j}_M stammt dagegen aus den molekularen Kreisströmen d. h. solchen, welche magnetische Dipole erzeugen. In Analogie zu (11.14) definieren wir die *magnetische Dipoldichte* oder *Magnetisierung* als

$$\mathbf{M} = \frac{\text{magnetisches Dipolmoment}}{\text{Volumen}}. \quad (11.28)$$

Nach (5.26) erzeugt in \mathbf{r} ein magnetisches Dipolmoment \mathbf{m} in \mathbf{r}' ein Vektorpotential

$$\mathbf{A}_M(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (11.29)$$

Analog zu (11.16) erhalten wir für eine Verteilung magnetischer Dipole $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{A}_m(\mathbf{r}) &= \int dV' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \int dV' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \int_V dV' \left[-\nabla_{\mathbf{r}'} \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \end{aligned} \quad (11.30)$$

Mittels der vektoriellen Version des Gauß'schen Satzes² kann man das erste Integral in ein Integral über die Oberfläche umwandeln

$$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} df' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (11.31)$$

Analog zum Fall der dielektrischen Polarisation, können wir das Vektorpotential einer Verteilung magnetischer Dipole(11.31) als Überlagerung des Vektorpotentials einer *Magnetisierungsstromdichte*

$$\boxed{\mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M}} \quad (11.32)$$

mit dem Vektorpotential einer *Magnetisierungsflächenstromdichte*

$$\boxed{\mathbf{i}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n}} \quad (11.33)$$

² (siehe Vorlesung „Vektoralgebra“). Verwenden Sie den Gauß'schen Satz $\int_V dV \nabla \cdot \mathbf{u} = \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} df$ mit $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{e}$ und \mathbf{e} einen beliebigen konstanten Vektor.

betrachten. Es ist offensichtlich, dass aus (11.32) (11.27) folgt.

In Analogie zu (11.21) definieren wir das *Makroskopische Magnetfeld*

$$\mathcal{H} \equiv \frac{\mathcal{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (11.34)$$

Aus (11.32), (11.21), (11.25) und der zweiten von (11.10) erhalten wir

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathcal{B} - \mathbf{j}_M = (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_M) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \mathbf{j}_M = (\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P) + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}. \quad (11.35)$$

Also

$$\nabla \times \mathcal{H} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \mathbf{j}_f, \quad (11.36)$$

was die zweite nichthomogene Gleichung im Vakuum (11.10) ersetzt, wobei nur die *freien* Ströme als Quellen des Magnetfeldes \mathcal{H} dienen.

Bemerkungen

- 1.) Ein mikroskopisches Analogon besitzen nur die Felder \mathcal{E} , \mathcal{B} , nämlich \mathbf{E} , \mathbf{B} (vgl. (11.11)). \mathcal{D} und \mathcal{H} sind nur *Hilfsfelder*, die wir einführen, um komplizierte elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie pauschal zu erfassen.
- 2.) Wie im Fall der dielektrischen Polarisierung wird in der Regel eine makroskopische magnetische Polarisation (oder Magnetisierung) dadurch zustandekommen, dass vorhandene elektrische (oder magnetische) Dipole im Feld *ausgerichtet* werden oder dass Dipole vom Feld *induziert* werden (vgl. Fig. 11.1). Im Normalfall sind *permanente* magnetische Dipole ohne äußeres Feld statistisch verteilt und ergeben nach Mittelung über ein makroskopisches Volumen keine Polarisation (oder Magnetisierung).
Ausnahmen dazu sind *ferromagnetische Materialien*, in denen eine makroskopische Magnetisierung ohne äußeres Feld vorhanden ist.
- 3.) Die homogene Gleichungen (11.9) gelten nur für die Felder \mathcal{E} und \mathcal{B} aber im Allgemeinen nicht für \mathcal{D} und \mathcal{H} .
- 4.) Beachten Sie, dass die Lorentzkraft weiterhin die \mathbf{E} und \mathbf{B} oder wenn gemittelt die \mathcal{E} und \mathcal{B} Felder enthält:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = q(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{B}). \quad (11.37)$$

Zusammenfassend werden in der Materie die Gleichungen (11.9)-(11.10) ersetzt durch folgende Makroskopischen Feldgleichungen
Homogene Gleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0} \quad (11.38)$$

Inhomogene Gleichungen

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f; \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}_f} \quad (11.39)$$

Mit den Verknüpfungen

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}} \quad (11.40)$$

Die Gleichungen (11.38)-(11.39) haben formal eine ähnliche Struktur wie (11.4)-(11.7). Allerdings reichen diese Gleichungen noch nicht aus, um - bei gegebener freier Ladungs- und Stromdichte ρ_f, \mathbf{j}_f - die vier Felder $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ zu bestimmen.

Auch die Verknüpfungen (11.40) helfen nicht weiter, wenn man die Polarisierungen \mathbf{P} und \mathbf{M} nicht kennt. Die Schwierigkeit ist eben, dass diese Polarisierungen nicht von außen vorgegeben werden, sondern wiederum von den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{H} abhängig sind. Diese Verknüpfungen können im Prinzip beliebig kompliziert ausfallen.

Lineare Medien

Zum Glück kann man für die meisten Substanzen ein linearen Zusammenhang annehmen, der zu einer deutlichen Vereinfachung der Gleichungen (11.38)-(11.40) führt. Für viele Materialien ist in der Tat die dielektrische Polarisation proportional zu \mathbf{E} , d. h.

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (11.41)$$

wobei χ_e die *dielektrische Suszeptibilität* ist. Daraus folgt die Proportionalität zwischen \mathbf{D} und \mathbf{E}

:

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}} \quad (11.42)$$

mit der Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon = (1 + \chi_e) \epsilon_0 . \quad (11.43)$$

Die Dielektrizitätskonstante ist eine Eigenschaft des Materials. In den nächsten Kapiteln werden wir einfache Modelle zur Bestimmung dieser Konstante studieren. ϵ ist ein Skalar nur in isotropen Medien: in anisotropen Medien ist diese Konstante ein Tensor 2. Stufe. Für höhere Frequenzen hängt ϵ auch von der Frequenz (und evtl. vom Wellenvektor) ab.

Gleichermaßen gilt für die magnetische Polarisation in vielen Materialien

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} . \quad (11.44)$$

Die Proportionalitätskonstante χ_m heißt *magnetische Suszeptibilität*. Aus (11.44) erhalten wir einen linearen Zusammenhang zwischen \mathbf{B} und \mathbf{H} :

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}} , \quad (11.45)$$

mit der *magnetischen Permeabilität*

$$\mu = (1 + \chi_m) \mu_0 . \quad (11.46)$$

Die Verknüpfungen (11.40), sowie (11.42) und (11.45) sind höchst unglücklich, weil sie für \mathbf{E} und \mathbf{B} Felder asymmetrisch sind. Auf dem selben Grund haben Formeln in der Magnetostatik μ_0 im *Zähler*, während die entsprechende Formel in der Elektrostatik ϵ_0 im *Nenner* haben. Diese Asymmetrie hat allerdings seine praktische Bedeutung: in (11.40), (11.42) und (11.45) sind \mathcal{E} und \mathcal{H} die unabhängigen Felder, weil diese experimentell am besten kontrollierbar sind. In der Elektrostatik ist es einfacher das \mathcal{E} Feld, durch z.B. Spannungen, zu kontrollieren. In der Magnetostatik dagegen ist es einfacher \mathcal{H} durch Ströme zu kontrollieren.

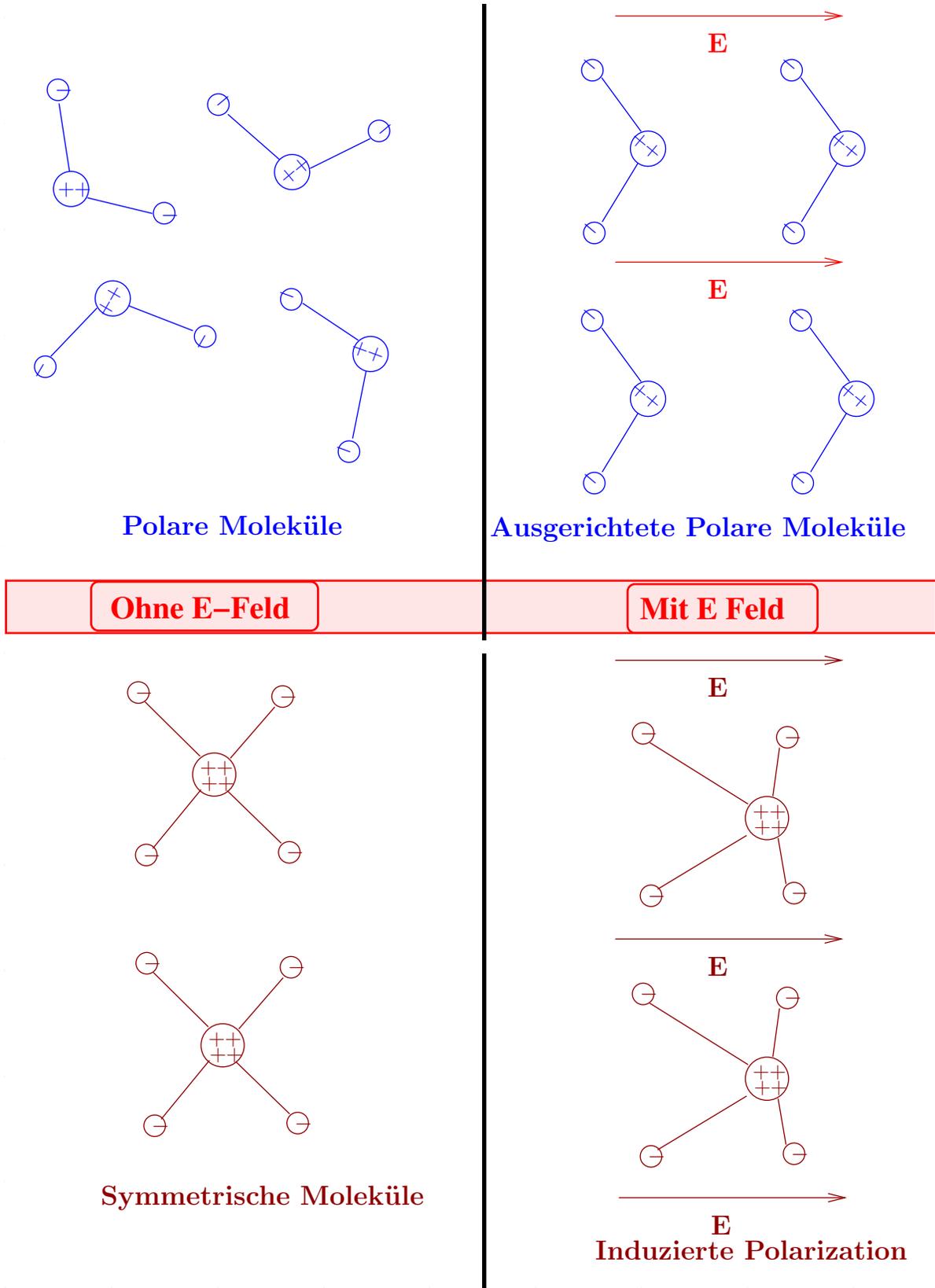


Abbildung 11.1: {polfig}

Kapitel 12

Verhalten des elektromagnetischen Feldes an Grenzflächen

Betrachtet man ϵ und μ als frequenzunabhängige, skalare Konstanten, dann lassen sich formell die Maxwell Gleichungen in einem linearen, isotropen Medium (11.38), (11.39) mit Hilfe von (11.42) und (11.45) in der gleichen Form wie die Maxwell Gleichungen im Vakuum (6.25) schreiben, wobei $\mu_0 \rightarrow \mu$ und $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ und die freie Ladungs- und Stromdichte erscheinen. Betrachtet man Effekte innerhalb eines *einzigsten* Dielektrikums (also keine Effekte an den Grenzflächen) lassen sich die bereits hergeleiteten Ergebnisse für Felder im Vakuum auf die in einem Dielektrikum mit der einfachen Transformation $\mu_0 \rightarrow \mu$ und $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ erweitern. Unter anderem ist die Phasengeschwindigkeit der EM Wellen in einem Medium ((12.36) unten) nicht gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Neue physikalische Effekte bekommt man, wenn die Frequenzabhängigkeit von ϵ und μ (Dispersion) oder der Übergang zwischen zwei Dielektrika mit unterschiedlichen Konstanten ins Spiel kommen. Wir betrachten zunächst den letzteren Effekt.

12.1 Allgemeine Stetigkeitsbedingungen

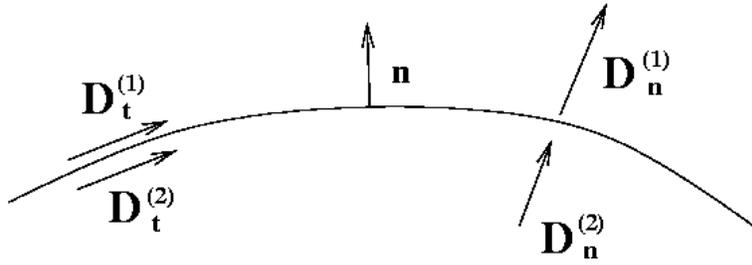
Aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen ergeben sich eine Reihe von Konsequenzen für das Verhalten der Felder an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit verschiedenen elektrischen und magnetischen Eigenschaften.

1.) Normalkomponenten von \mathbf{B} und \mathbf{D}

Wir hatten im Absch. 3.1.1 bereits mit Hilfe des Gauß'schen Satzes für \mathbf{E} gezeigt, dass aus $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ folgt, dass die Normalkomponente des \mathbf{E} -Feldes eine Unstetigkeit $\frac{\gamma}{\epsilon_0}$ durch eine Grenzfläche hat, auf der eine Flächenladungsdichte γ liegt (vgl. (3.14)). Mit Hilfe des Stokes'schen Satzes hatten wir dagegen gezeigt, dass aus $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ folgt, dass die Tangentialkomponente von \mathbf{E} stetig ist.

Auf identische Weise folgt aus

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (12.1)$$



dass die Normalkomponente B_n von \mathbf{B} stetig durch die Grenzfläche hindurch ist:

$$\boxed{B_n^{(1)} = B_n^{(2)}}, \quad (12.2)$$

während die Normalkomponente von \mathbf{D} eine Unstetigkeit γ_f hat¹

$$\boxed{D_n^{(1)} - D_n^{(2)} = \gamma_f}, \quad (12.3)$$

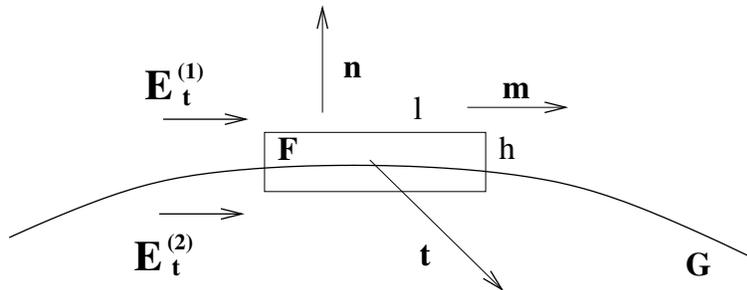
mit γ_f der Flächeladungsdichte der freien Ladungsträger auf der Grenzfläche. Für Dielektrika mit $\gamma_f = 0$ ist also die Normalkomponente von \mathbf{D} stetig. Dagegen ist die Normalkomponente von \mathbf{E} auf der Grenzfläche eines Dielektrikums unstetig, wie wir sehen werden. Als natürliche Konsequenz von (12.3) ist $D_n^{(1)}$ auf der äusseren Oberfläche eines Metalles gleich γ_f .

2.) Tangentialkomponenten von \mathbf{E} und \mathbf{H}

Wir benutzen:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_f, \quad (12.4)$$

und wenden den Integralsatz von Stokes auf eine rechteckige Fläche F (Skizze) an.



Die Fläche F habe Kanten der Länge l tangential zur Grenzfläche G und der Länge h senkrecht dazu. \mathbf{n} sei die Normale zu G und \mathbf{t} die Normale zu F (also $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$), dann ist die Kante l parallel zum Einheitsvektor \mathbf{m} , wobei

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}. \quad (12.5)$$

¹ **Zu Beachten:** Die Konvention für die Indizes (1) und (2) für \mathbf{D} und für die unten besprochene Vektorfelder ist folgende: $\mathbf{D}^{(1)}$ ist das Feld auf der Außenseite und $\mathbf{D}^{(2)}$ das Feld auf der Innenseite der Grenzfläche (Fig. 126). Der Index „n“ steht für „Normalkomponente“, „t“ für „Tangentialkomponente“.

Der Satz von Stokes gibt für die erste von (12.4)

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{f} = \oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_F \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{f} \quad (12.6)$$

Wir nehmen l und h beliebig klein, so dass die Fläche F innerhalb von F nahezu glatt und die Felder konstant sind, allerdings sei $h \ll l$. In diesem Limes gibt (12.6)

$$l (\mathbf{E}_t^{(2)} - \mathbf{E}_t^{(1)}) \cdot \mathbf{m} = -h l \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{t}. \quad (12.7)$$

Für $h \rightarrow 0$ verschwindet der Teil mit $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Da \mathbf{m} beliebig gewählt werden kann (auf der Oberfläche), folgt die Stetigkeit der Tangentialkomponente von \mathbf{E} :

$$\boxed{\mathbf{E}_t^{(1)} = \mathbf{E}_t^{(2)}}, \quad (12.8)$$

Ganz analog ergibt die zweite Gleichung von (12.4) (wir lassen von vornerein den $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ -Teil weg):

$$l (\mathbf{H}_t^{(2)} - \mathbf{H}_t^{(1)}) \cdot \mathbf{m} = I_f \quad (12.9)$$

wo I_f die Stromstärke der durch F fließenden (freien) Ströme ist. Für endliche Stromdichten würde dieser Term im Limes $h \rightarrow 0$ verschwinden, aber nicht im Fall einer endlichen *Flächenstromdichte* (freier Ladungen) \mathbf{i}_f . Analog zur Flächenladungsdichte γ definiert man eine Flächenstromdichte \mathbf{i} als

$$\mathbf{i} = \lim_{h \rightarrow 0} h \mathbf{j}. \quad (12.10)$$

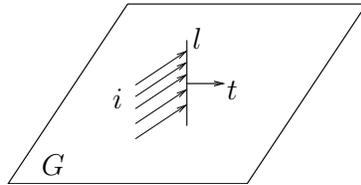
In Analogie mit Kap. 4.1 haben wir also (vgl. (4.3))

$$\mathbf{i} = \sum_i \gamma_i \mathbf{v}_i. \quad (12.11)$$

Betrachten wir eine infinitesimale Linie der Länge l auf der Oberfläche G (siehe Abb.), dann fließt durch l ein Strom²

$$I = l \mathbf{t} \cdot \mathbf{i}, \quad (12.12)$$

wo \mathbf{t} die Normale an l auf der Fläche G ist.



²genauer gesagt durch eine beliebige, infinitesimale Oberfläche F , die l beinhaltet, und die nicht auf G steht.

Aus (12.9) mit (12.12) erhalten wir also

$$I_f = l \mathbf{i}_f \cdot \mathbf{t} . \quad (12.13)$$

(12.9) mit (12.13) und (12.5) gibt also

$$- (\mathbf{H}_t^{(1)} - \mathbf{H}_t^{(2)}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}) = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_t^{(1)} - \mathbf{H}_t^{(2)})) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{i}_f \quad (12.14)$$

für beliebige Vektoren \mathbf{t} (tangential zu G) gibt das

$$\boxed{\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_t^{(1)} - \mathbf{H}_t^{(2)}) = \mathbf{i}_f} . \quad (12.15)$$

Der Sprung in der Tangentialkomponente von \mathbf{H} ist also gleich der Flächenstromdichte in die Richtung senkrecht zu \mathbf{H} . Für ein normales Dielektrikum (also kein Leiter oder Supraleiter) verschwindet \mathbf{i}_f , so dass die Tangentialkomponente von \mathbf{H} stetig ist.

Zusammenfassend erhalten wir also für ein *normales* Dielektrikum (**ohne Flächenladungs- und Flächenstromdichten**), dass die folgenden Komponenten durch die Oberfläche zwischen zwei Dielektrika hindurch ³ stetig sind:

$$\boxed{B_n, \quad D_n, \quad E_t, \quad H_t} . \quad (12.16)$$

12.2 Lineare, isotrope Medien

Falls

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (12.17)$$

gilt, findet man aus (12.2), (12.8), (12.3) und (12.15):

$$\boxed{\mu_1 H_n^{(1)} = \mu_2 H_n^{(2)}} ; \quad \boxed{\frac{D_t^{(1)}}{\epsilon_1} = \frac{D_t^{(2)}}{\epsilon_2}} \quad (12.18)$$

und

$$\boxed{\epsilon_1 E_n^{(1)} - \epsilon_2 E_n^{(2)} = \gamma_f} ; \quad \boxed{\mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{B}_t^{(1)}}{\mu_1} - \frac{\mathbf{B}_t^{(2)}}{\mu_2} \right) = \mathbf{i}_f} . \quad (12.19)$$

Beispiel: Dielektrikum im Plattenkondensator

Wir betrachten einen Plattenkondensator Fig. 12.1 bestehend aus zwei (im Prinzip unendlich ausgedehnten) Metallplatten mit den Flächenladungsdichten $+\gamma$ und $-\gamma$. In der Mitte zwischen den Platten befindet sich ein Dielektrikum (Konstanten ϵ, μ).

Aus Symmetriegründen zeigt \mathbf{D} (und daher \mathbf{E}) überall in z -Richtung und hängt nur von z ab. Damit \mathbf{D} im Unendlichen verschwindet, muss \mathbf{D} überall außerhalb der Platten verschwinden: $\mathbf{D}_{out} = 0$ (konsistent mit dem Gauß'schen Theorem, da die Gesamtladung im Kondensator 0 ist).

³das Vakuum kann auch als Dielektrikum mit $\mu = \mu_0$ und $\epsilon = \epsilon_0$ betrachtet werden

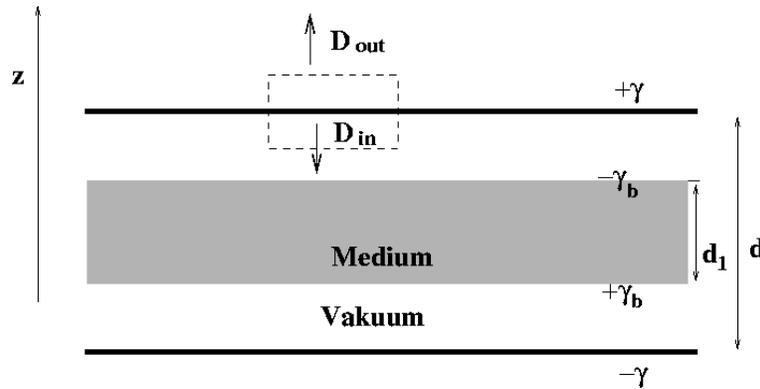


Abbildung 12.1: Plattenkondensator {kondens}

Innerhalb des Kondensator ergibt das Gauß'sche Theorem $\mathbf{D}_{in} = -\gamma \mathbf{e}_z$. Da D_n stetig ist, gilt das auch innerhalb des Dielektrikums.

Also ist im Dielektrikum $\mathbf{E} = -\frac{\gamma}{\epsilon} \mathbf{e}_z$. Auf der Oberfläche des Dielektrikums hat daher \mathbf{E} eine Unstetigkeit (von unten nach oben), die einer Flächendichte gebundener Ladungen γ_b entspricht:

$$E_n^{(1)} - E_n^{(2)} = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} + \frac{\gamma}{\epsilon} = -\frac{\gamma(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon_0 \epsilon} \equiv \frac{\gamma_b}{\epsilon_0} < 0. \quad (12.20)$$

Die Ladungsdichte γ_b schirmt die Ladung der Platten ab.

Die Spannung des Kondensators ist

$$V = (d - d_1) \frac{\gamma}{\epsilon_0} + d_1 \frac{\gamma}{\epsilon}. \quad (12.21)$$

Die Kapazität eines Kondensators ist definiert als Q/V , also für unseren Kondensator mit Fläche F

$$C = \frac{\gamma F}{V}. \quad (12.22)$$

Die Kapazität eines Kondensators wird in Farad (F) gemessen *Farad = Coulomb/Volt*. Das Verhältnis zwischen den Kapazitäten eines Kondensators, der mit Dielektrikum vollständig gefüllt ist ($d_1 = d$) und eines mit Vakuum ($d_1 = 0$) gibt die Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums

$$\frac{C_{Diel}}{C_{Vak}} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}. \quad (12.23)$$

12.2.1 Elektrische Leitfähigkeit in Metallen

In *reellen* (also nicht-idealen) Metallen erzeugt ein \mathbf{E} -Feld einen Strom innerhalb des Metalles. Die Größe und Richtung des Stromes hängt im Prinzip auf komplexe Weise von \mathbf{E} ab, doch, wie im Fall von Dielektrika, gilt für nicht zu große \mathbf{E} eine lineare Abhängigkeit (Ohm'sches Gesetz)

$$\mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E}, \quad (12.24)$$

wo die *Leitfähigkeit* σ oft als konstanter Skalar betrachtet werden kann, kann aber (wie bei ϵ) von der Frequenz abhängig und für anisotrope Metalle ein Tensor sein.

Aus (12.24) und (12.8) folgt für die Tangentialkomponente von \mathbf{j}_f :

$$\boxed{\frac{\mathbf{j}_{ft}^{(1)}}{\sigma_1} = \frac{\mathbf{j}_{ft}^{(2)}}{\sigma_2}} . \quad (12.25)$$

Für die Normalkomponente folgt über die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (12.26)$$

bei Anwendung des Gauß'schen Satzes (wie in (12.3))

$$\boxed{j_{fn}^{(1)} - j_{fn}^{(2)} = -\frac{\partial \gamma_f}{\partial t}} . \quad (12.27)$$

Speziell für stationäre Ströme folgt die Stetigkeit der Normalkomponenten

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0 \quad \Rightarrow \quad j_{fn}^{(1)} = j_{fn}^{(2)} . \quad (12.28)$$

Dann folgt aus (12.3), dass auf der Oberfläche zwischen zwei Metallen, durch die ein Strom j_f fließt, sich eine Flächenladungsdichte

$$\gamma_f = j_{fn} \left(\frac{\epsilon^{(1)}}{\sigma^{(1)}} - \frac{\epsilon^{(2)}}{\sigma^{(2)}} \right) \quad (12.29)$$

bildet.

Übergang Leiter (1) - Nichtleiter (2)

Da im Nichtleiter kein Strom fließen kann, folgt aus (12.28)

$$j_{fn}^{(1)} = j_{fn}^{(2)} = 0 , \quad (12.30)$$

und damit über (12.24)

$$E_n^{(1)} = 0 , \quad (12.31)$$

da $\sigma_1 \neq 0$. Dagegen folgt für $E_n^{(2)}$ aus (12.19):

$$\epsilon_2 E_n^{(2)} = -\gamma_f . \quad (12.32)$$

Insbesondere für die *Elektrostatik* ist, wegen $\mathbf{j}_f = 0$, auch

$$\mathbf{E}_t^{(1)} = 0 ; \quad (12.33)$$

dann fordert (12.8)

$$\mathbf{E}_t^{(2)} = 0 , \quad (12.34)$$

also steht das \mathbf{E} -Feld senkrecht zur Leiteroberfläche; es ist null innerhalb des Leiters, wie wir bereits gesehen haben.

12.3 Reflexion und Brechung von Licht

Wie bereits erwähnt können die makroskopischen Maxwell-Gleichungen (11.38),(11.39) in linearen, isotropen Medien auf die gleiche Weise wie im Vakuum behandelt werden. In Abwesenheit freier Ladungen ($\rho_f = 0 = \mathbf{j}_f$) lassen sich z.B. die Gleichungen (11.38) wie in Kap. 9 entkoppeln. Man erhält die Wellengleichungen

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0; \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} = 0, \quad (12.35)$$

wobei c' die Phasengeschwindigkeit im Medium ist

$$\boxed{\frac{1}{c'^2} = \epsilon\mu} \quad (12.36)$$

Monochromatische, ebene Wellen

Da wir im Folgenden das Verhalten des elektromagnetischen Feldes an ebenen Grenzflächen untersuchen wollen, betrachten wir spezielle Lösungen von (12.35) in Form ebener Wellen, z.B.:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}, \quad (12.37)$$

wobei zwischen ω und \mathbf{k} die Beziehung

$$\omega = c' k = \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (12.38)$$

gelten muss. Wie in Kap. 9 findet man, dass \mathbf{E} , \mathbf{H} und \mathbf{k} senkrecht zueinander stehen.

Gleichung (12.38) unterscheidet sich von (9.11) dadurch, dass in der letzteren c eine Konstante ist, während c' im Allgemeinen von ω abhängt, da $\epsilon = \epsilon(\omega)$.

Die Komponenten verschiedener Frequenz ω in einer monochromatischen ebenen Welle laufen mit verschiedener Geschwindigkeit $c' = c'(\omega)$: das Wellenpaket behält seine Form im Laufe der Zeit nicht bei (**Zerfließen oder Dispersion** von Wellenpaketen; vgl. hierzu Abschnitt 10.3).

Phasen- vs. Gruppengeschwindigkeit

Je nach Verlauf von $\epsilon(\omega)$ kann $c' > c$ werden. Dies bedeutet keinen Widerspruch zur Relativitätstheorie, da die *Phasengeschwindigkeit* $v_{ph} = c'$ nicht identisch ist mit der *Gruppengeschwindigkeit*

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} \quad (12.39)$$

eines Wellenpaketes, dessen Amplitude auf die Umgebung der Wellenzahl k_0 konzentriert ist; der Energietransport in einem solchen Wellenpaket ist durch v_g und nicht durch v_{ph} bestimmt.

Koplanarität

Wir untersuchen nun das Verhalten einer Lichtwelle, beschrieben durch (12.37), an einer ebenen Grenzfläche (Skizze): Aus (12.8) folgt

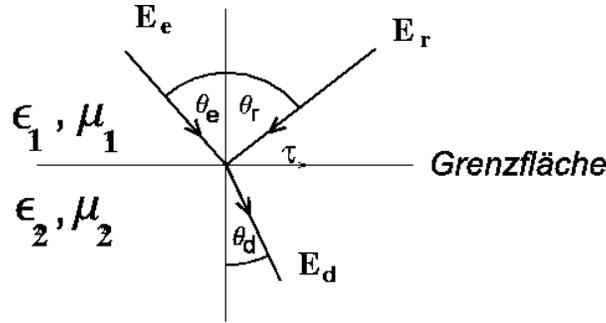


Abbildung 12.2: {figrefl}

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_r) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_d \quad (12.40)$$

für alle Zeiten t und alle Positionen \mathbf{r} auf der Grenzfläche; $\boldsymbol{\tau}$ sei ein Einheitsvektor parallel zur Grenzfläche, \mathbf{E}_e , \mathbf{E}_r und \mathbf{E}_d bezeichnen die elektrische Feldstärke der einfallenden, reflektierten und durchgehenden Lichtwelle. Damit (12.40) gelten kann müssen alle Terme die gleiche Zeitabhängigkeit haben, also mit der gleichen Frequenz schwingen:

$$\omega_e = \omega_r = \omega_d. \quad (12.41)$$

Für ein festes t , muss (12.40) für alle \mathbf{r} auf der Grenzfläche gelten, also: $\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}$
für ein beliebiges \mathbf{r} auf der Grenzfläche, es folgt also

$$\mathbf{k}_{e\parallel} = \mathbf{k}_{r\parallel} = \mathbf{k}_{d\parallel} \quad (12.42)$$

aus dieser Beziehung folgt, dass alle \mathbf{k} auf einer Ebene stehen (*Koplanarität*) [mehr in B.1.3]

Reflexionsgesetz

Aus (12.42) folgt (siehe Fig. (12.2))

$$k_e \sin \theta_e = k_r \sin \theta_r, \quad (12.43)$$

mit (12.41), $k_e = k_r$, das *Reflexionsgesetz*:

$$\theta_e = \theta_r. \quad (12.44)$$

Brechungsgesetz

Aus (12.41) ergibt sich $k_e c_e = \omega = k_d c_d$, also

$$\frac{k_e}{k_d} = \frac{c_d}{c_e} = \frac{\sqrt{\epsilon_e \mu_e}}{\sqrt{\epsilon_d \mu_d}} = \frac{n_e}{n_d}, \quad (12.45)$$

so dass mit (12.42), also $k_e \sin \theta_e = k_d \sin \theta_d$, das *Brechungsgesetz*

$$n_e \sin \theta_e = n_d \sin \theta_d \quad (12.46)$$

folgt. Hier ist

$$n_a = \frac{c}{c_a} = \frac{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (12.47)$$

der Brechungsindex eines Mediums mit konstanten ϵ_a, μ_a .

Wertet man die in (12.40) noch enthaltenen Bedingungen für die Amplituden aus, so erhält man die **Fresnel'schen Formeln**, das **Brewster'sche Gesetz** (Erzeugung linear polarisierten Lichts) und die **Totalreflexion** (Faser-Optik) (ÜB).

Bemerkung

Wir werden sehen, dass $\epsilon(\omega)$ im Allgemeinen komplex sein kann, also auch k ist komplex. Das bedeutet, dass eine elektromagnetische Welle im Medium geschwächt wird (Absorption).

12.4 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in leitenden Materialien

Wir betrachten einen Ohm'schen Leiter mit ebener Grenzfläche und Leitfähigkeit σ in dem kein Ladungstau auftritt ($\rho_f = 0$). Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen (11.38) und (11.39): lauten nach einsetzen von (12.24)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (12.48)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \sigma \mathbf{E} = 0;$$

$$\mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E} \neq 0. \quad (12.49)$$

Als Lösung von (12.48) setzen wir an

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}, \quad (12.50)$$

mit $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ (folgt aus $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$). Mit einem analogen Ansatz für \mathbf{H} finden wir aus (12.48):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\omega}(\mathbf{k} \times \mathbf{E}); \quad i(\mathbf{k} \times \mathbf{H}) + i\epsilon\omega \mathbf{E} - \sigma \mathbf{E} = 0. \quad (12.51)$$

Benützt man $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}k^2 = -\mathbf{E}k^2$ und eliminiert man im letzten Ausdruck von (12.51) \mathbf{E} oder \mathbf{H} , so erhält man

$$\frac{-ik^2}{\mu\omega} + i\epsilon\omega - \sigma = 0,$$

also

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right). \quad (12.52)$$

Komplexe Wellenzahlen

Aus (12.52) sieht man, dass in einem Leiter, k komplex sein kann. Wir berechnen nun den Real- und Imaginärteil von k . Dafür setzen wir

$$k = \alpha + i\beta; \quad k^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \quad (12.53)$$

(α, β reell), so folgt (für ϵ und σ reell):

$$\alpha^2 - \beta^2 = \mu \epsilon \omega^2; \quad 2\alpha\beta = \mu \omega \sigma. \quad (12.54)$$

Eliminiert man in der ersten Gleichung α mit Hilfe der zweiten Gleichung, so entsteht:

$$\beta^4 - \frac{1}{4}(\mu \omega \sigma)^2 + \beta^2 \mu \epsilon \omega^2 = 0. \quad (12.55)$$

Da β reell sein soll, kommt als Lösung nur

$$\beta^2 = \frac{\mu \epsilon \omega^2}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2} - 1 \right) \quad (12.56)$$

in Frage. Analog:

$$\alpha^2 = \frac{\mu \epsilon \omega^2}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2} + 1 \right). \quad (12.57)$$

Für $\sigma \rightarrow 0$ folgt:

$$\beta \rightarrow 0; \quad \alpha^2 \rightarrow \mu \epsilon \omega^2 \quad (12.58)$$

in Einklang mit (12.38). Da $\mu \omega \sigma \geq 0$, müssen α und β nach (12.54) gleiches Vorzeichen haben. Für $\beta \neq 0$ (d.h. $\sigma \neq 0$) wird eine auf eine Metalloberfläche einfallende Lichtwelle im Metall exponentiell gedämpft; für eine in positiver x -Richtung laufende ebene Welle wird nämlich

$$\exp\{i(kx - \omega t)\} = \exp\{i(\alpha x - \omega t)\} \exp\{-\beta x\}, \quad (12.59)$$

wobei mit $\alpha > 0$ auch $\beta > 0$ sein muss. (Ausbreitungsrichtung = Richtung der Dämpfung) **Grenzfälle**

- 1.) Bei hoher Leitfähigkeit ($\sigma \rightarrow \infty$) wird die Lichtwelle praktisch *total reflektiert*, da die Eindringtiefe $d \sim \beta^{-1} \sim \sigma^{-1/2}$ verschwindet ((12.56)).
- 2.) Für hohe Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty$) ist zu beachten, dass σ gemäß (14.31) frequenzabhängig ist: σ wird für $\omega \rightarrow \infty$ rein imaginär, also k^2 in (12.52) reell; das Material wird durchsichtig. Diesen Effekt kann man mit **harter** Röntgenstrahlung nachweisen.

Skin-Effekt

Als Folge der Dämpfung β können wegen (12.49) Wechselströme nur in einer Oberflächenschicht des Leiters fließen, deren Dicke durch β^{-1} bestimmt ist (*Skin-Effekt*).

12.5 Wellen in einem metallischen Hohlleiter

Wir betrachten die Ausbreitung *elektromagnetischer Wellen in einem Gebiet, das von metallischen Randflächen begrenzt* ist. Zur Vereinfachung betrachten wir einen *idealen Leiter* ($\sigma \rightarrow \infty$) als Grenzfläche.

Die *Randbedingungen* für die Komponenten von \mathbf{E} und \mathbf{B} an den Grenzflächen eines idealen Metalles folgen aus der Tatsache, dass im Metall kein elektrisches Feld existieren kann.

- Demzufolge muß die *Tangentiale Komponente von \mathbf{E} verschwinden*.
- Die *Normalkomponente von \mathbf{B} muss zunächst nur stetig sein*. Da es aber im Metall kein elektrisches Feld gibt, kann dort das Magnetfeld allenfalls statisch sein, und das ist bei einer sich ausbreitenden Welle nicht möglich. Also verschwindet auch die Normalkomponente von \mathbf{B} .

Als Beispiel betrachten wir ein unendlich langes (in Richtung z) Rohr mit rechteckigem Querschnitt (Kanten a und b). Das Rohr bestehe aus ideal leitendem Material ($\sigma \rightarrow \infty$). Wir suchen nach Lösungen der Maxwellgleichungen (im Vakuum) ist der Form einer propagierenden Welle, also pro Feldkomponente wie

$$g(\mathbf{r}, t) = f(x, y)e^{i(kz - \omega t)},$$

wobei f eine noch zu bestimmende Funktion ist

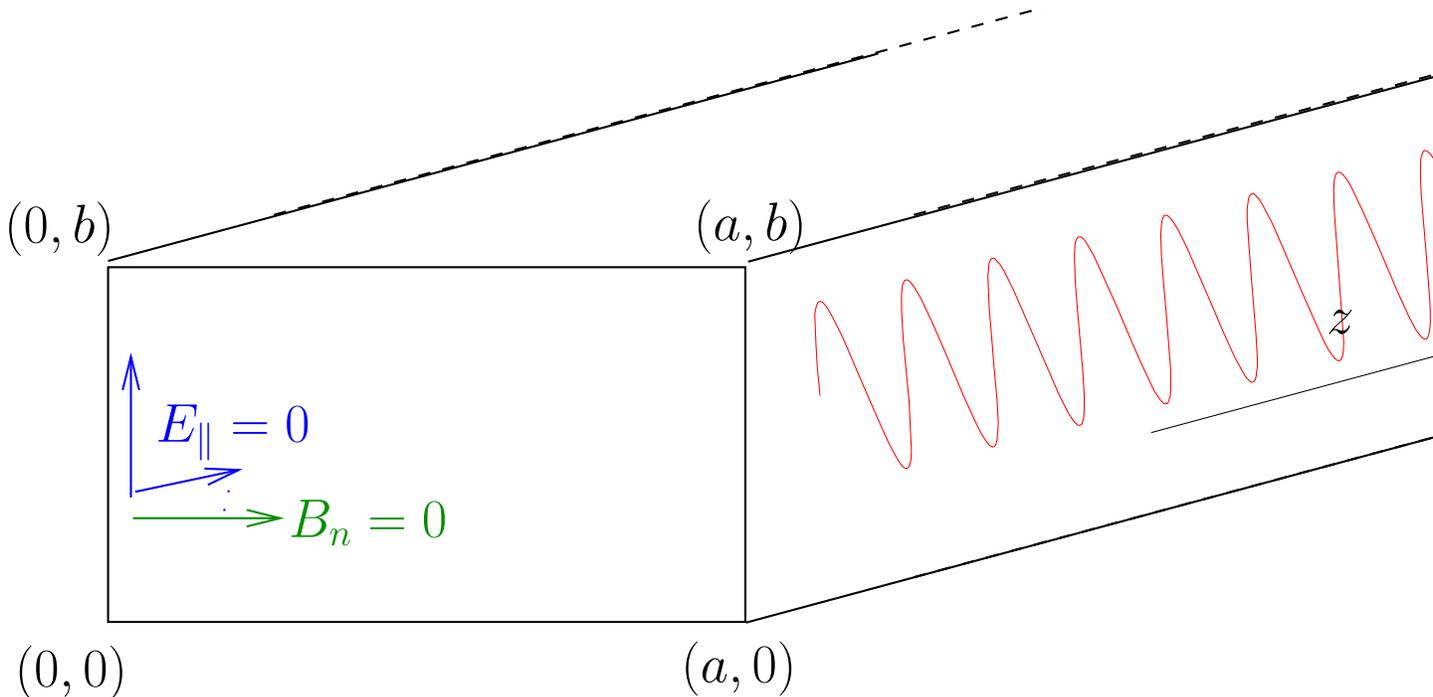


Abbildung 12.3: {hohl}

Aus den obigen Überlegungen

$$\mathbf{E}_t = 0 \quad B_n = 0 \quad (12.60)$$

erhalten wir die Randbedingungen

$$E_y = E_z = B_x = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases} \quad (12.61)$$

$$E_x = E_z = B_y = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = b \end{cases} \quad (12.62)$$

Die richtige Lösung der Maxwell Gleichungen muss natürlich auch die *Wellengleichung* erfüllen, und zwar für jede einzelne Komponente $g(\mathbf{r}, t)$ von \mathbf{E} und \mathbf{B} :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) g(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.63)$$

Mit der Methode der Separation der Variablen [mehr in B.1.10], kann man einen Ansatz für die Funktionen f in (12.60) der Form

$$f(x, y) = c a(x) b(y), \quad (12.64)$$

machen, wo $a(x)$ ($b(y)$) eine geeignete Linearkombination von $\exp(\pm ik_x x)$ ($\exp(\pm ik_y y)$) ist (im Grunde \sin oder \cos), welche die Randbedingungen erfüllt, ist. Dann lautet die Bedingung (12.63)

$$k_x^2 + k_y^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (12.65)$$

Für die z -Komponente von \mathbf{E} haben wir wegen (12.61)

$$E_z = \gamma \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(kz - \omega t)} \quad (12.66)$$

so dass die „erlaubten“ Werte von k_x, k_y diskret sind:

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \quad k_y = \frac{m\pi}{b} \quad m, n \in N_0. \quad (12.67)$$

Aus $\nabla \times B = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ erhält man

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} = -i\mu \epsilon \omega E_y, \quad (12.68)$$

was für $x = 0$ und $x = a$ gibt

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, x = a \quad (12.69)$$

und analog

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = 0, y = b, \quad (12.70)$$

was die Lösung

$$B_z = \gamma' \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)} \quad (12.71)$$

gibt.

Für die weiteren Komponenten bekommt man ähnliche Bedingungen.

Zusammenfassend kann man den Ansatz für diese Komponenten wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ \beta \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ \gamma \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \quad (12.72)$$

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ \beta' \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ \gamma' \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)} \quad (12.73)$$

$$m, n \in N_0; .$$

Minimale Frequenz

Durch Einsetzen von (12.65) und (12.67) erhält man die Bedingung

$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} .$$

Man kann aus (12.73) (12.72) sehen, dass in einer Lösung mit $n = m = 0$ nur B_z nicht verschwindet. Diese Lösung ist aber nicht erlaubt wegen $\nabla \cdot B = 0$. Die minimale Lösung hat also n oder $m = 1$.

Aus diesen Überlegungen kann man sofort eine "Ausbreitungsbedingung" für Wellen im Hohlleiter herleiten: k ist nur dann reell, wenn

$$\omega > \omega_{nm}, \quad \text{mit} \quad \omega_{nm} = c \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

gilt. Man sieht, dass sich die Dispersionsbeziehung im Hohlleiter von jener im freien Vakuum unterscheidet, so lange a und b endlich sind. Das war zu erwarten. Unterhalb einer gewissen Grenzfrequenz ω_{10} (für $a > b$) ist überhaupt keine Wellenausbreitung möglich! Diese Frequenz geht mit wachsendem a gegen 0. Ein Hohlleiter fungiert also als Niedrigfrequenzfilter.

Ausbreitungs-Moden

Wir werden zunächst einige allgemeine Eigenschaften der erlaubten Lösungen studieren.

(Keine) TEM-Moden

TEM-Moden steht für *transversal-elektrische und magnetische Moden*. Wie bereits gesehen sind diese die einzige Art von Wellen, die sich im Vakuum ausbreiten können. In einem Hohlleiter sind diese Moden dagegen nicht ausbreitungsfähig.

Das kann man durch Anwendung der Maxwell-Gleichungen für den Fall $B_z = E_z = 0$ beweisen:

$$0 = (\nabla \times \mathbf{E})_z = \partial_x E_y - \partial_y E_x \quad (12.74)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y = 0 .$$

Das gibt

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)E_x = (\partial_x^2 + \partial_y^2)E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad n = m = 0. \quad (12.75)$$

Was, wie gesagt, nicht ausbreitungsfähig ist.

Die Tatsache, dass keine Ausbreitung von TEM-Moden möglich ist, ist eine *allgemeine Eigenschaft von Hohlleitern die eine zusammenhängende Topologie haben*, also nicht nur von rechteckigen. Der TEM-Typ tritt aber bei nichtzusammenhängende Topologien, wie z.B. beim Koaxialkabel auf.

Spezialfälle

(1.) (TM-Welle)

Mit $B_z = 0$, d.h. man hat ein rein *transversales* \mathbf{B} -Feld. Man nennt die zugehörige Welle *TM-Welle* (transversal-magnetisch). Nichttriviale Lösungen für die Felder ergeben sich hier nur, falls $n > 0$ und $m > 0$, was man durch Einsetzen der Gleichungen (12.72) in die Ansätze erkennt. Die niedrigste ausbreitungsfähige Frequenz für eine TM-Welle im Hohlleiter ist demnach durch

$$\omega_{TM} = c\pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

gegeben.

(2.) (TE-Welle)

Mit $E_z = 0$, und nun ist das \mathbf{E} -Feld transversal. Man spricht von einer *TE-Welle* (transversal-elektrisch). In diesem Fall hat man schon nichttriviale Lösungen, falls *einer der beiden Indizes n und m von Null verschieden ist*. Die niedrigste ausbreitungsfähige Frequenz ist

$$\omega_{TE} = \frac{c\pi}{a},$$

falls $a > b$.

Nomenklatur

Für die Bezeichnung verschiedener Moden in Hohlleitern, die durch die Werte von n und m gekennzeichnet sind, gibt es ein Nomenklatursystem. Man stellt der Grundeigenschaft der Welle (TM bzw TE) die Indizes n und m zur Seite: TM_{nm} bzw. TE_{nm} . Die *niedrigste ausbreitungsfähige Welle ist demnach TE_{10}* . Diese Welle wird in der Technik am häufigsten angewandt.

Lösungen

Die Konstanten $\alpha^{(l)}$, $\beta^{(l)}$ und $\gamma^{(l)}$ in (12.72),(12.73) werden durch einsetzen in die Maxwell-Gleichungen bestimmt. Man kann zeigen, dass die Werte dieser Parameter von zwei freien Parametern δ und δ' abhängen. Die Lösungen sind:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{n\pi}{a}k\delta + \frac{m\pi}{b}\frac{\omega}{c}\delta' & c\alpha' &= \frac{n\pi}{a}k\delta' - \frac{m\pi}{b}\frac{\omega}{c}\delta \\
\beta &= \frac{m\pi}{b}k\delta - \frac{n\pi}{a}\frac{\omega}{c}\delta' & c\beta' &= \frac{m\pi}{b}k\delta' + \frac{n\pi}{a}\frac{\omega}{c}\delta \\
\gamma &= -i\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\delta & c\gamma' &= i\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\delta'
\end{aligned} \tag{12.76}$$

Kapitel 13

Energie, Impuls und Drehimpuls des makroskopischen Feldes

Zur Vereinfachung werden wir von nun an die kalligraphische Notation für makroskopische (gemittelte) Felder nicht mehr benutzen und die gleichen Symbole für makroskopische und mikroskopische Felder benutzen, solange kein Missverständnis besteht. Wir haben also $E \rightarrow \mathbf{E}$, $D \rightarrow \mathbf{D}$, $B \rightarrow \mathbf{B}$, $H \rightarrow \mathbf{H}$, ...

In Kap. 8 haben wir Energie, Impuls und Drehimpuls des mikroskopischen Feldes eingeführt und dieses Konzept in Teil IV auf das Strahlungsfeld im Vakuum angewendet. Wir wollen im Folgenden die Betrachtungen von Kap. 8 auf das makroskopische Feld übertragen.

13.1 Energie

Ausgangspunkt für die Energiebilanz in Kap. 8 war die von einem (mikroskopischen) Feld (\mathbf{E}, \mathbf{B}) an einem System geladener Massenpunkte pro Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$\frac{dW_M}{dt} = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV . \quad (13.1)$$

Grundlage von (13.1) ist die Lorentz-Kraft, z.B. für eine Punktladung q :

$$\mathbf{K} = q \left(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) , \quad (13.2)$$

deren magnetischer Anteil zu (13.1) keinen Beitrag liefert. Mit (11.1) ist es klar, dass die selbe Gleichungen für die gemittelte Kraft $\langle \mathbf{K} \rangle$ als Funktion der makroskopischen Felder gelten.

Arbeit der freien Ladungen

Die an den freien Ladungen der Dichte ρ_f vom makroskopischen Feld pro Zeiteinheit

geleistete Arbeit ist dann (13.1):

$$\frac{dW_M}{dt} = \int \mathbf{j}_f \cdot \mathbf{E} dV. \quad (13.3)$$

Die rechte Seite von (13.3) können wir mit (11.39) zu

$$\frac{dW_M}{dt} = \int \left(\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV \quad (13.4)$$

umformen. Wie in Kap. 8 können wir (13.4) symmetrisieren, mit Hilfe der Identität

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (13.5)$$

und (11.38),

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (13.6)$$

Man erhält:

$$\frac{dW_M}{dt} = - \int dV \left\{ \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\}. \quad (13.7)$$

Der Vergleich mit (8.6) zeigt, dass

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}} \quad (13.8)$$

als Energiestromdichte des makroskopischen Feldes (Poynting-Vektor) zu deuten ist (vgl. (8.9)).

Lineare, isotrope Medien

Zur Interpretation der restlichen Terme betrachten wir die Näherung linearer Medien:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (13.9)$$

Dann wird

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (13.10)$$

und wir können analog (8.10) die Größe

$$\boxed{\omega_F = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})} \quad (13.11)$$

als Energiedichte des makroskopischen Feldes interpretieren. Der Erhaltungssatz (8.13) bleibt mit den neuen Definitionen (13.8),(13.11) unverändert:

$$\frac{dW_M}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V \omega_F dV + \int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} = 0. \quad (13.12)$$

13.2 Impuls, Drehimpuls

Nach (13.2) ist

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \quad (13.13)$$

die Änderung des Impulses der Probeladung q im Feld (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Für die Impulsänderung eines Systems freier Ladungen, beschrieben durch ρ_f, \mathbf{j}_f im Feld (\mathbf{E}, \mathbf{B}) folgt:

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int dV (\rho_f \mathbf{E} + (\mathbf{j}_f \times \mathbf{B})) . \quad (13.14)$$

Analog zu Abschnitt 8.2 formen wir (13.14) mit

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f; \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}_f \quad (13.15)$$

um zu

$$\frac{d\mathbf{P}_M}{dt} = \int dV \left\{ \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) + (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right\} . \quad (13.16)$$

Wir symmetrisieren (13.16) mit Hilfe von

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (13.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_M}{dt} &= \int dV \left\{ \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \right. \\ &\quad \left. (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{D} - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \right\} . \end{aligned} \quad (13.18)$$

Wie in Kap. 8 lässt sich dann

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}_F = \mathbf{D} \times \mathbf{B}} \quad (13.19)$$

als Impulsdichte des makroskopischen elektromagnetischen Feldes interpretieren (vgl. (8.40)). Da in dem restlichen Teil von (13.18) verglichen mit (8.23) jeweils die Paare \mathbf{E}, \mathbf{D} (statt \mathbf{E}, \mathbf{E}) und \mathbf{B}, \mathbf{H} (statt \mathbf{B}, \mathbf{B}) erscheinen, erhält man aus dem Vergleich mit (8.26) (im Fall linearer Medien) für den Maxwell Spannungstensor¹

$$\boxed{T_{im} = \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \delta_{im} - E_i D_m \right) + \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \delta_{im} - H_i B_m \right)} . \quad (13.20)$$

Der Erhaltungssatz (8.31) bleibt mit den neuen Definitionen (13.19),(13.20) unverändert:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_M + \int_V \boldsymbol{\pi}_F dV)_i + \oint_F \sum_{m=1}^3 T_{im} df_m = 0} , \quad (13.21)$$

Analog erhält man für die Drehimpulsdichte (vgl. (8.41))

$$\boldsymbol{\lambda}_F = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\pi}_F . \quad (13.22)$$

¹Anmerkung: wegen (11.42) und (11.45) bleibt T_{im} ein symmetrischer Tensor für den Fall linearer, isotroper Medien.

Kapitel 14

Elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie

In den vorherigen Kapiteln haben wir die Materialgleichungen (11.38), (11.39) mit der Annahme einer Linearabhängigkeit, (11.42), (11.45), vereinfacht.

In diesem Kapitel wollen wir diese Beziehungen und ihre Grenzen diskutieren, sowie Schätzungen über ihre Größen anhand einfacher Modelle machen.

14.1 Materialgleichungen

In der Regel, würde man erwarten, dass die Felder \mathbf{P} und \mathbf{M} Funktionale von \mathbf{E} und \mathbf{B} sind. Sie können auch von äußeren Parametern wie z.B. der Temperatur T abhängen:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}[\mathbf{E}, \mathbf{B}, T]; \quad (14.1)$$

entsprechend für \mathbf{M} .

Zur Vereinfachung betrachten wir \mathbf{P} als Funktional nur von \mathbf{E} und T . Bisher haben wir (14.1) durch die lineare, skalare Form (11.41) vereinfacht. Wir wollen nun die Abweichungen von dieser Form diskutieren. Wir führen hier die Diskussion für \mathbf{P} versus \mathbf{E} durch. Die gleichen Argumente gelten auch für \mathbf{M} versus \mathbf{B} oder \mathbf{H} .

1.) Nicht-lokale Effekte

Auch wenn die Polarisation \mathbf{P} linear in \mathbf{E} ist kann diese eine nicht-lokale Abhängigkeit in Raum und Zeit haben:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{y} d\tau \epsilon_0 \chi_e(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \mathbf{E}(\mathbf{y}, \tau). \quad (14.2)$$

Dadurch dass χ_e nur von der Differenz $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ abhängt, haben wir Translationsinvarianz angenommen, was eine vernünftige Annahme ist. Die Faltung in (14.2) hat eine einfachere Form im Fourier-Raum

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_0 \chi_e(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega). \quad (14.3)$$

Die Nichtlokalität erzeugt also eine Abhängigkeit von χ_e und ϵ von der Frequenz und vom Wellenvektor.

2.) Anisotropieeffekte

In anisotropen Medien sind im Allgemeinen \mathbf{P} und \mathbf{E} nicht parallel zueinander. χ_e und daher ϵ sind also Tensoren 2. Stufe:

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{e\ ij} E_j \quad D_i = \epsilon_{i,j} E_j \quad (14.4)$$

3.) Nicht-lineare Effekte

Der funktionale Zusammenhang (14.2) war zwar nicht-lokal aber linear. Ein allgemeiner lokaler, aber nicht-linearer Zusammenhang lässt sich als

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{e\ ij} E_j + \chi_{ijk} E_j E_k + \chi_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots$$

schreiben. Dabei sind χ_{ijk} bzw. χ_{ijkl} die nicht-linearen Suszeptibilitätstensoren 3.ter und 4.ter Stufe. Sie beschreiben verschiedene optische Effekte wie die SHG (Frequenzverdoppelung): Erzeugung von Licht mit der Frequenz 2ω mit einem Laserstrahl der Frequenz ω , etc.

4.) Temperaturabhängigkeit

χ_e und ϵ werden i.a. eine Temperaturabhängigkeit haben.

14.2 Dielektrika

Unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes \mathbf{E} stellt sich in einem nichtleitenden, polarisierbaren Medium (einem *Dielektrikum*) eine Polarisation \mathbf{P} ein. In Fig. 11.1 haben wir 2 Typen unterschieden.

1.) Induzierte Polarisation

Durch das \mathbf{E} -Feld können Elektronen und Kerne in Atomen oder Molekülen relativ zueinander verschoben und Dipole in Feldrichtung erzeugt (**induziert**) werden. Auf diese Weise entsteht eine beinahe temperaturunabhängige Polarisation.

2.) Orientierungspolarisation

Schon vorhandene (*permanente*) elektrische Dipole werden im \mathbf{E} -Feld ausgerichtet. Dem ordnenden Einfluss des Feldes wirkt die thermische Bewegung entgegen und die resultierende makroskopische Polarisation ist stark temperaturabhängig. Für $\mathbf{E} = 0$ sind die Richtungen der elementaren Dipole statistisch verteilt und es ist $\mathbf{P} = 0$.

14.2.1 Dielektrische Funktion im Fall induzierter Polarisation: Beispiel

Wir haben in (14.3) gesehen, dass ϵ (bzw. χ_e) im Allgemeinen frequenzabhängig sind. Dies zeigt sich bei schnell oszillierenden Feldern, wobei „schnell“ bedeutet Frequenzen

der Größenordnung der typischen Molekularfrequenzen. Um die Frequenzabhängigkeit von $\epsilon(\omega)$ zu verstehen, wollen wir ein vereinfachtes Modell (das Lorentzmodell) für die Polarisierung (gültig für den Fall induzierter Polarisierung: Punkt 2 oben) betrachten: ¹

Lorentzmodell

Wir nehmen an, dass die Elektronen in einem Atom oder Molekül gedämpfte harmonische Schwingungen mit der Eigenfrequenz ω_n ausführen. Dann lautet die Bewegungsgleichung für ein Elektron eines Atoms (oder Moleküls) unter dem Einfluss eines periodischen \mathbf{E} -Feldes (die komplexe Notation hat die selbe Bedeutung wie im Absch. 9):

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}_n + \Gamma_n \frac{d}{dt}\mathbf{r}_n + \omega_n^2 \mathbf{r}_n = \frac{e}{M_e} \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t), \quad (14.5)$$

wo \mathbf{r}_n die Auslenkung bzgl. der Gleichgewichtslage des Elektrons ist. Mit dem Ansatz

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n^0 \exp(-i\omega t) \quad (14.6)$$

findet man als Lösung von (14.5)

$$\mathbf{r}_n = \frac{e}{M_e(\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_n)} \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t). \quad (14.7)$$

Hat man n_n Elektronen mit Eigenfrequenz ω_n pro Volumeneinheit, dann gilt für die Dipoldichte

$$\mathbf{P} = \sum_n e n_n \mathbf{r}_n = \frac{e^2}{M_e} \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \sum_n \frac{n_n}{(\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_n)}. \quad (14.8)$$

Es folgt für die dielektrische Funktion:

$$\epsilon - \epsilon_0 = \epsilon_0 \chi_e = \frac{e^2}{M_e} \sum_n \frac{n_n}{\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_n}. \quad (14.9)$$

Der Dämpfungsterm in (14.5) trägt pauschal der Tatsache Rechnung, dass die atomaren Oszillatoren durch Stöße zwischen den Atomen oder Molekülen Energie verlieren. Dies hat zur Folge, dass χ_e bzw. ϵ komplex werden.

Aus (14.9) ist es ersichtlich, dass die *Näherung einer frequenzunabhängigen χ_e bzw. ϵ nur bis zu Frequenzen ω der Größenordnung der kleinsten Schwingungsfrequenz ω_n gültig ist.*

Für hohe Frequenzen $\omega \gg \omega_{n,max}$ haben wir aus (14.9)

$$\epsilon \approx \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}\right) \quad (14.10)$$

mit der *Plasma Frequenz*

$$\omega_P^2 = \frac{N e^2}{\epsilon_0 M_e} \quad N = \sum_n n_n \quad (14.11)$$

¹Die Abhängigkeit vom Wellenvektor, die erst bei räumlichen Fluktuationsskalen der Ordnung der intermolekulare Abstände vorkommt, wird hier nicht diskutiert.

14.2.2 Orientierungspolarisation: Temperaturabhängigkeit der Polarisation

Wir setzen homogene und isotrope Medien voraus; dann gilt für den Anteil der Polarisation, der von der Ausrichtung permanenter Dipole \mathbf{p} im \mathbf{E} -Feld herrührt:

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p} \rangle_T, \quad (14.12)$$

wobei N die Zahl der Atome pro Volumeneinheit ist und $\langle \mathbf{p} \rangle_T$ sich durch Mittelung der Dipole mit Betrag p bzgl. ihrer Richtung zum \mathbf{E} -Feld bei gegebener Temperatur T ergibt. Diese kann man mit Hilfe der Energie eines Dipols in einem \mathbf{E} -Feld

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (14.13)$$

((2.41)) bestimmen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit bei gegebener Temperatur T , dass sich ein elementares Dipol mit einem Winkel θ zum \mathbf{E} -Feld orientiert, proportional zum Boltzmannfaktor

$$\exp\left(\frac{-U(\theta)}{kT}\right) = \exp\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}{kT}\right) = \exp(\xi \cos \theta), \quad (14.14)$$

mit

$$\xi = \frac{pE}{kT}. \quad (14.15)$$

Dann ist die Mittelung $\langle \mathbf{p} \rangle_T$ entlang der \mathbf{E} -Richtung (\mathbf{n}_E) gegeben durch

$$\mathbf{n}_E \cdot \langle \mathbf{p} \rangle_T = p \langle \cos \theta \rangle_T = p \frac{\int d(\cos \theta) \cos \theta \exp(\xi \cos \theta)}{\int d(\cos \theta) \exp(\xi \cos \theta)} \quad (14.16)$$

Der Nenner in (14.16) sorgt für die richtige Normierung.

Die Auswertung der Integrale in (14.16) ergibt:

$$P = Np \left\{ \frac{1}{\tanh \xi} - \frac{1}{\xi} \right\}. \quad (14.17)$$

Diskussion:

Fall 1: starke Felder, tiefe Temperaturen:

$$\xi = \frac{pE}{kT} \gg 1, \quad (14.18)$$

so dass - wie zu erwarten - mit

$$P = Np \quad (14.19)$$

der **Sättigungswert** erreicht wird. In dem Fall, gilt der lineare Ansatz (11.41) nicht mehr.

Fall 2: schwache Felder, hohe Temperaturen:

$$\xi = \frac{pE}{kT} \ll 1, \quad (14.20)$$

so dass mit

$$\coth\xi = \frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{3} + \dots \quad (14.21)$$

folgt:

$$P = \frac{Np^2}{3kT} E, \quad (14.22)$$

der oben diskutierte **lineare Bereich**.

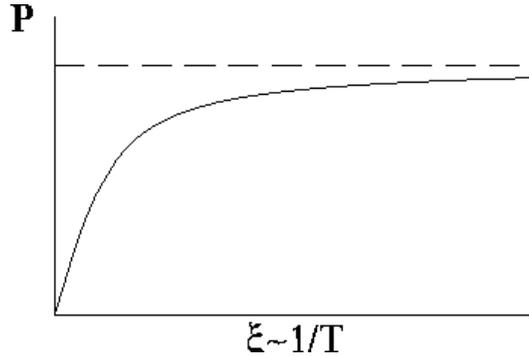


Abbildung 14.1:

Bemerkung:

Das obige Verfahren wird unten auf die Behandlung des Paramagnetismus übertragen werden, indem man die Energie des Dipols \mathbf{p} im \mathbf{E} -Feld: $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$, durch $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ ersetzt, wobei \mathbf{m} das (permanente) magnetische Dipolmoment ist.

14.3 Elektrische Leitfähigkeit und Zusammenhang mit der dielektrischen Funktion

Die Beziehung zwischen Strom und \mathbf{E} Feld ist durch das Ohm'sche Gesetz (12.24) gegeben, wobei im Allgemeinen σ von der Frequenz abhängig ist. Wir wollen nun zeigen, dass zwischen $\sigma(\omega)$ und $\epsilon(\omega)$ eine einfache Beziehung besteht. Diese Beziehung kann man verstehen, wenn man formell auch die Stromdichten der beweglichen Elektronen in einem Metall als gebundene Ströme betrachtet.² Dann folgt aus der Beziehung zwischen \mathbf{j} und \mathbf{P} in (11.25) in Frequenzraum

$$\mathbf{j}_P = -i \omega \mathbf{P}, \quad (14.23)$$

sowie aus $\mathbf{j}_P = \sigma \mathbf{E}$ und $\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$ die entsprechende Beziehung zwischen σ und ϵ :

$$\sigma(\omega) = -i \omega (\epsilon - \epsilon_0). \quad (14.24)$$

oder

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{i \sigma}{\omega}. \quad (14.25)$$

²Diese Annahme ist vernünftig, da diese Ströme vom \mathbf{E} -Feld erzeugt werden und nicht vom \mathbf{B} -Feld und daher tragen sie nicht zur Magnetisierung bei, also gehören zu j_P .

Der wesentliche Unterschied zwischen Metall und Isolator zeigt sich nur bei $\omega \rightarrow 0$: ein Metall ist charakterisiert durch einen nichtverschwindenden Wert von $\sigma(\omega \rightarrow 0)$ ($\epsilon(\omega \rightarrow 0)$ divergiert), ein Isolator (Dielektrikum) durch einen endlichen Wert von $\epsilon(\omega \rightarrow 0)$. Bei hohen Frequenzen kann man zwischen Metallen und Isolatoren nicht mehr unterscheiden. Der Grund ist, dass auch die „freien“ Ladungen in einem Metall oszillieren und nicht mehr von den „gebundenen“ unterschieden werden können.

Lorentzmodell Dasselbe Lorentzmodell (14.5) kann daher auch für Metalle verwendet werden, indem auch *ungebundene* Elektronen eingeführt werden. Das kann man formell durch Einführung einer verschwindenden Eigenfrequenz für $n = 0$

$$\omega_0 = 0 \quad (14.26)$$

machen.

Aus (14.9) und (14.24) kann man unmittelbar die frequenzabhängige Leitfähigkeit ablesen. Wir teilen diese in einen *metallischen* Term aus der $\omega_0 = 0$ Mode und den Beiträgen aus den Moden mit endlichen Frequenzen (*dielektrischer Term*):

$$\sigma(\omega) = \sigma_{met}(\omega) + \sigma_{diel}(\omega) . \quad (14.27)$$

Der zweite Term lässt sich leicht mit Hilfe von (14.24) aus (14.9) ablesen. Den wollen wir nicht weiter diskutieren.

Der metallische Term ist durch die *Drude Formel*

$$\sigma_{met}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \quad (14.28)$$

beschrieben, mit der *Gleichstromleitfähigkeit*

$$\sigma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{M_e} \quad (14.29)$$

und der *mittleren Stoßzeit*

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_0} . \quad (14.30)$$

Dabei ist n_0 die Dichte der ungebundenen (*metallischen*) Elektronen.

Für hohe Frequenzen haben wir aus (14.10) und (14.24)

$$\sigma_\omega \approx i \frac{\omega_P^2}{\omega} : \quad (14.31)$$

die Leitfähigkeit wird rein imaginär: *die ohmische Dissipation verschwindet*.

14.4 Para- und Diamagnetismus

Eine Magnetisierung \mathbf{M} kann (analog dem Fall der Polarisation \mathbf{P}) auf folgende Weise entstehen:

1.) Orientierungsmagnetisierung (Paramagnetismus)

Permanente elementare magnetische Dipole (unter anderem auch die Spins der freien Elektronen in einem Metall) werden in einem äußeren Magnetfeld gegen die thermische Bewegung ausgerichtet und führen zu einer makroskopischen Magnetisierung \mathbf{M} , die in die Richtung von \mathbf{B} orientiert ist. Der paramagnetische Beitrag $\chi_{m,para}$ zu χ_m ist also positiv. Ohne Magnetfeld sind die elementaren Dipolmomente \mathbf{m} bzgl. ihrer Richtung statistisch verteilt und man erhält im makroskopischen Mittel $\mathbf{M} = 0$.

2.) Induzierte Magnetisierung (Diamagnetismus)

Im Magnetfeld ändern sich die Bahnen der Elektronen, insbesondere ihr Drehimpuls. Eine solche Änderung des Drehimpulses ist nach (5.30) mit einer Änderung des magnetischen Dipolmoments des Atoms verbunden. Atome, die kein permanentes magnetisches Dipolmoment haben, erhalten also im äußeren Magnetfeld ein *induziertes* Dipolmoment. Diese induzierten molekularen Ringströme sind dissipationsfrei. Aufgrund der Lenz'schen Regel erzeugen sie ein induziertes Moment welches dem des äußeren Feldes entgegengesetzt ist. Der diamagnetische Beitrag $\chi_{m,dia}$ zu χ_m ist also negativ. *Typischerweise ist χ_m sehr klein ($|\chi_{m,dia}| \sim 10^{-6}$)*, so dass in der Präsenz permanenter Dipole der paramagnetische Anteil stets gewinnt.

Eine Ausnahme bilden die Supraleiter, die perfekte Diamagnete sind mit $\chi_m = -1$: in einem Supraleiter kann kein \mathbf{B} eindringen (Meißner-Ochsenfeld-Effekt).

3.) Kollektive Magnetisierung (Ferromagnetismus)

In ferromagnetischen Materialien ordnen sich die permanenten magnetischen Dipole unterhalb einer kritischen Temperatur spontan, d.h. ohne äußere Felder. Hier ist also $\mathbf{M} \neq 0$ mit $\mathbf{H} = 0$.

Die obige Diskussion zeigt eine grundlegende Differenz zur dielektrischen Polarisierung. Während (im isotropen Fall und bei $\omega = 0$) \mathbf{P} sich in beiden Fällen in die Richtung von \mathbf{E} orientiert, und daher χ_e stets positiv ist, haben diamagnetische Materialien ein $\chi_m < 0$, paramagnetische ein $\chi_m > 0$.

Die Magnetisierung \mathbf{M} hängt also im Allgemeinen vom äußeren Feld und der Temperatur ab. Da Kräfte vom \mathbf{B} -Feld erzeugt werden, sollten wir entsprechend (14.1) eigentlich

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}[\mathbf{B}, T] \quad (14.32)$$

betrachten. Es ist jedoch üblich, (14.32) durch

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}[\mathbf{H}, T] \quad (14.33)$$

zu ersetzen, da \mathbf{H} über die Stromdichte \mathbf{j}_f praktisch leichter kontrollierbar ist als \mathbf{B} .

Paramagnetismus

In (5.31) haben wir folgenden Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls \mathbf{L} und magnetischem Dipolmoment geladener Teilchen hergestellt

$$\boxed{\mathbf{m} = g \frac{q}{2m} \mathbf{L}} . \quad (14.34)$$

Die Energie des Dipols im äußeren Feld ist durch (5.36) gegeben. Ähnlich wie in (14.22) erhalten wir bei hohen Temperaturen

$$\mathbf{M} = \frac{N \mathbf{m}^2}{3KT} \mathbf{B} = \frac{N \mathbf{m}^2}{3KT} \mu \mathbf{H} , \quad (14.35)$$

also das paramagnetische Anteil der magnetische Suszeptibilität

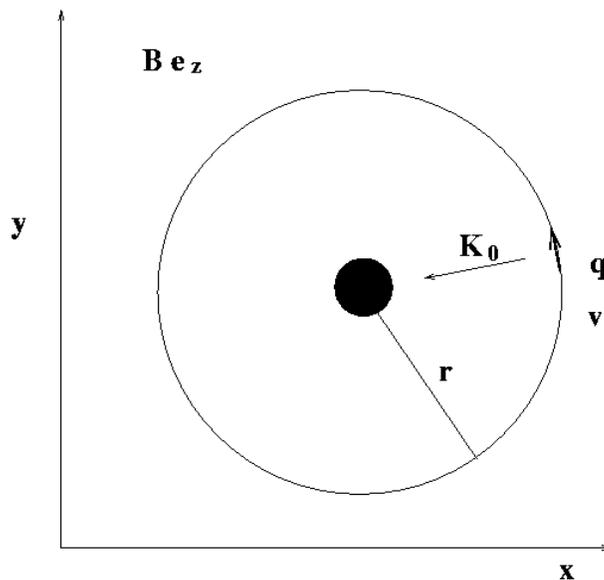
$$\chi_{m,para} \approx \frac{N \mathbf{m}^2}{3KT} \mu_0 , \quad (14.36)$$

wo μ durch μ_0 ersetzt wurde, da $\chi_{m,para} \ll 1$ und dadurch $\mu = (1 + \chi_m) \mu_0 \approx \mu_0$. Setzt man in der Tat typische Werte für einen Festkörper ein ($N \sim 0.1 \text{Å}^{-3}$, $T \sim 300 \text{K}$) erhält man

$$\chi_{m,para} \approx \sim 10^{-3} . \quad (14.37)$$

Modellrechnung für Diamagnetismus

Wir wollen das Zustandekommen des Diamagnetismus quantitativ näher formulieren. Als einfachstes, klassisches Modell betrachten wir ein um den Atomkern kreisendes Elektron (Ladung q) unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes (B in z -Richtung). Zur Vereinfachung nehmen wir eine kreisförmige Bahn (Skizze).



Wenn die Geschwindigkeit des Elektrons v ist, dann ist die gesamte Zentripetalkraft K (gegeben durch die anziehende Kraft des Kernes K_0 und die des B -Feldes)

$$K = \frac{m v^2}{r} = K_0 - q v B \quad (14.38)$$

nach der Anordnung der Skizze. Für konstante K_0 und r ändert sich v (für kleine B) um die (kleine) Menge ³

$$\Delta v \equiv v(B) - v(B = 0) = -\frac{rqB}{2m} + O(B^2) . \quad (14.39)$$

Im linearen Regime kann der $O(B^2)$ Term konsistent vernachlässigt werden. (14.39) entspricht dann einer Änderung des Drehimpulses $\Delta \mathbf{L} = \mathbf{e}_z \Delta L_z$ mit

$$\Delta L_z = m r \Delta v = -\frac{r^2 q B}{2} . \quad (14.40)$$

Zusammen mit (14.34) entspricht dies einem zusätzlichen magnetischen Moment (hier $g = 1$, weil es sich um Elektronenbahnen handelt)

$$\Delta \mathbf{m}_{mag} = -\frac{q^2 r^2}{4m} \mathbf{B} . \quad (14.41)$$

Wenn $Z N$ die Elektronendichte, $q = -e$ ist und r eine typische Atomlänge $r = a_0$ (der Bohr'sche Radius) dann ist die induzierte Magnetisierung

$$\mathbf{M} \sim -\frac{Z N e^2 a_0^2}{4m} \mathbf{B} . \quad (14.42)$$

Wie bereits erwähnt zeigt diese antiparallel zum \mathbf{B} -Feld. Wie beim Paramagnetismus können wir μ durch μ_0 ersetzen (Achtung, gilt nur wenn $\chi_m \ll 1$, also z.B. nicht in einem Supraleiter wo $\chi_m = -1$!) und erhalten

$$\chi_{m,dia} = -\frac{Z N e^2 a_0^2 \mu_0}{4m} . \quad (14.43)$$

Setzt man typische Zahlen ein, erhält man als Abschätzung

$$\chi_{m,dia} \approx -10^{-6} \quad (14.44)$$

also einen Faktor 1000 kleiner als $\chi_{m,para}$ (14.37). Allerdings gibt es in einem Stoff freie magnetische Momente nur dann, wenn es ungepaarte Elektronen gibt. Systeme mit ausschließlich gepaarten Elektronen sind daher diamagnetisch.

³Das bekommt man indem man (14.38) bis auf ersten Ordnung in Δv entwickelt.

Teil VI

Quellen elektromagnetischer Strahlung

⋮

Kapitel 15

Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen

15.1 Problemstellung

Bei Anwesenheit von Ladungen haben wir die inhomogenen Gleichungen (vgl. (7.15), (7.16))

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}, \quad (15.1)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (15.2)$$

mit der Nebenbedingung (Lorenz-Eichung)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (15.3)$$

zu lösen. Das Problem ist also die Lösung einer inhomogenen Wellengleichung

$$\square \Psi(\mathbf{r}, t) = \gamma(\mathbf{r}, t), \quad (15.4)$$

wo Ψ für ϕ , A_i und γ für ρ/ϵ , μj_i steht.

Green'schen Funktionen

Die allgemeine Lösung von (15.4) setzt sich aus der (in Abschnitt 9 diskutierten) allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung (9.9) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Wellengleichung zusammen. Zur Konstruktion einer speziellen Lösung von (15.4) benutzen wir die Methode der *Green'schen Funktionen*: Mit der Definition der Green'schen Funktion:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (15.5)$$

können wir als (formale) Lösung angeben:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \gamma(\mathbf{r}', t') d^3 r' dt' \quad (15.6)$$

wie man durch Einsetzen von (15.6) in (15.4) direkt bestätigt. Dabei wird ohne (die an sich nötigen) Skrupel die Reihenfolge von Integration bzgl. \mathbf{r}', t' und Differentiation bzgl. \mathbf{r}, t vertauscht.

15.2 Konstruktion von G

Die Green'sche Funktion hat zwei fundamentale Eigenschaften:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') \quad (15.7)$$

aufgrund der Invarianz von (15.5) gegen Raum- und Zeit-Translationen;

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') = 0 \quad \text{für } t < t' \quad (15.8)$$

wegen des Kausalitätsprinzips.

Wir transformieren wegen (15.7) $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ und $t - t' \rightarrow t$ und suchen eine Lösung der Differentialgleichung

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r}, t) = -\delta^3(\mathbf{r})\delta(t) . \quad (15.9)$$

Dazu führen wir eine Fouriertransformation bezüglich der Zeitkoordinate durch:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int G(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega . \quad (15.10)$$

Mit Hilfe von

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega t} d\omega , \quad (15.11)$$

wird (15.9) zu

$$\frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \left[\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\mathbf{r}, \omega) + \delta(\mathbf{r}) \right] = 0 . \quad (15.12)$$

Da diese Gleichung für alle t verschwinden muß, müssen auch alle Fourierkoeffizienten verschwinden:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\mathbf{r}, \omega) = -\delta(\mathbf{r}) . \quad (15.13)$$

Zur Lösung dieser Gleichung benutzen wir die Eigenschaft (die wir im Absch.15.2.1 beweisen werden) gültig für eine beliebige, ausreichend (auch im Ursprung) differenzierbare Funktion $f(r)$ des Betrages $r = |\mathbf{r}|$:

$$\nabla^2 \frac{f(r)}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - 4\pi f(0)\delta(\mathbf{r}) . \quad (15.14)$$

Als Ansatz für $G(\mathbf{r}, \omega)$ nehmen wir genau diese Form

$$G(\mathbf{r}, \omega) = \frac{f_\omega(r)}{r} , \quad (15.15)$$

dann gibt (15.13)

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{r} \left(f_\omega''(r) + \frac{\omega^2}{c^2} f_\omega(r) \right) - 4\pi f_\omega(0) \delta(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}), \quad (15.16)$$

was die Lösungen

$$f_\omega(r) = \frac{1}{4\pi} e^{\pm i\omega r/c} \quad (15.17)$$

hat. Durch Fouriertransformation (15.10) erhält man mit Hilfe von (15.17), (15.15)

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega(t \mp r/c)} d\omega = \frac{1}{4\pi r} \delta(t \mp \frac{r}{c}). \quad (15.18)$$

Das *Kausalitätsprinzip* (15.8) zwingt uns, die Lösung mit dem oberen (-) Vorzeichen zu wählen. Diese Greensfunktion ist die sogenannte „retardierte“ Greensfunktion, weil diese eine *verzögerte* Antwort ($t = \frac{r}{c}$) beschreibt. Die Funktion mit dem + Vorzeichen heißt „avancierte“ Greensfunktion, weil in diesem Fall die Antwort *vor* deren Ursache stattfindet. Die *retardierte* Greensfunktion für die Wellengleichung lautet also (wir führen die relativen Koordinaten $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ $t - t'$ wieder ein):

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right). \quad (15.19)$$

Interpretation von G

Die Inhomogenität in (15.5) stellt eine punktförmige Quelle dar, welche zur Zeit t' am Ort \mathbf{r}' für eine (infinitesimal) kurze Zeit angeschaltet wird. Die von dieser Quelle hervorgerufene Störung breitet sich als Kugelwelle mit der Geschwindigkeit c aus. Die **retardierte** Greensfunktion (15.19) erfüllt also folgende physikalische Erwartungen:

- i) Die Kugelwelle G muss für $t < t'$ nach dem Kausalitätsprinzip verschwinden.
- ii) Sie muss am Ort \mathbf{r} zur Zeit $t = t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ ankommen, da elektromagnetische Wellen sich mit der (endlichen) Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum ausbreiten.

Gleichung (15.6) zeigt, wie man die Potentiale \mathbf{A}, ϕ zu gegebener Quellen-Verteilung ρ, \mathbf{j} aus den Beiträgen für punktförmige Quellen aufbauen kann.

15.2.1 Beweis von (15.14)

(15.14) kennen wir bereits aus der Elektrostatik für den Fall $f(r) = 1$. Schon in diesem Fall führt die naive Anwendung des Laplace-Operators in Polarkoordinaten (hier brauchen wir nur den r -Anteil)

$$\nabla^2 g(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r g(r)) \quad (15.20)$$

zum **falschen** Ergebnis $\nabla^2 1/r = 0$, was die ganze Elektrostatik und -dynamik entkräften würde. Der Grund ist, dass (15.20) nicht in der Nähe von $r = 0$ angewandt werden kann, wo die Funktion singulär ist. Es ist dagegen klar, dass für $r > 0$, (15.20) korrekt sein

muss. $\nabla^2 f(r)/r$ besteht also aus einem regulären Anteil ∇_{reg}^2 (gegeben in (15.20)), der für jedes $r > 0$ gültig ist und einem irregulären Anteil bei $r = 0$. Aus (15.20) ist es klar, dass

$$\nabla_{reg}^2 \frac{f(r)}{r} = \frac{1}{r} f''(r). \quad (15.21)$$

Um den irregulären Anteil zu bestimmen integrieren wir $\nabla^2 f(r)/r$ in einer Kugel $K(a)$ mit Radius a :

$$\begin{aligned} \int_{K(a)} \nabla^2 \frac{f(r)}{r} d^3\mathbf{r} &= \int_{K(a)} \nabla \cdot \left(\nabla \frac{f(r)}{r} \right) d^3\mathbf{r} = \\ \oint_{\partial K(a)} \left(\nabla \frac{f(r)}{r} \right) \cdot \mathbf{n} df &= 4\pi a^2 \left(\frac{f'(a)}{a} - \frac{f(a)}{a^2} \right), \end{aligned} \quad (15.22)$$

wo wir das Gauß'sche Theorem, sowie

$$\nabla \frac{f(r)}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \left(\frac{f'(r)}{r} - \frac{f(r)}{r^2} \right) \quad (15.23)$$

benutzt haben. Den irregulären Anteil bekommen wir indem wir den Limes von (15.22) für $a \rightarrow 0$ nehmen:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{K(a)} \nabla^2 \frac{f(r)}{r} d^3\mathbf{r} = -4\pi f(0) \quad (15.24)$$

was bedeutet, dass in der Nähe von $r = 0$

$$\nabla_{irreg}^2 \frac{f(r)}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r}) f(0). \quad (15.25)$$

Insgesamt also haben wir (15.14)

$$(\nabla_{irreg}^2 + \nabla_{reg}^2) \frac{f(r)}{r} = \frac{f''(r)}{r} - 4\pi \delta(\mathbf{r}) f(0). \quad (15.26)$$

15.3 Lösung der Wellengleichung und retardierte Potentiale

Die (asymptotisch verschwindende) Lösung der Wellengleichung (15.4) von (15.6) ist also mit (15.19) gegeben durch:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}' \int dt' \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \gamma(\mathbf{r}', t') = \int d^3\mathbf{r}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \gamma(\mathbf{r}', t_{ret}) \quad (15.27)$$

wo wir im letzten Term die Integration über t' mit Hilfe der δ -Funktion durchgeführt haben und die retardierte Zeit

$$t'_{ret} = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c \quad (15.28)$$

eingeführt haben. Die Differenz $t - t_{ret}$ ist die Zeit, die ein Lichtstrahl braucht, um von \mathbf{r}' den Aufpunkt \mathbf{r} zu erreichen. Die Interpretation von (15.27) ist, dass ein Quellenelement

$\gamma(\mathbf{r}', t')$ im Punkt \mathbf{r}' bei der Zeit t' das Potential im Aufpunkt \mathbf{r} erst *bei einer späteren Zeit* $t = t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ beeinflusst, d.h. die Information bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit.

Die Allgemeine Lösung der Wellengleichung ist gegeben durch die partikuläre Lösung (15.27) plus eine beliebige Lösung der homogenen Wellengleichung, d.h. eine beliebige Linearkombination monochromatischer, ebenen Wellen wie in (9.9).

Angewandt auf Ladungen und Ströme gibt (15.27) die *retardierten Potentiale*

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t') \delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' dt' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t'_{ret})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (15.29)$$

und

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' dt' = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t'_{ret})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' . \quad (15.30)$$

Die Lösungen (15.29) und (15.30) sind über (15.3) bzw. die Ladungserhaltung (6.3) miteinander verknüpft.

Die Ausführung der Integrationen in (15.29) und (15.30) wollen wir anhand von einigen praktisch wichtigen Spezialfällen untersuchen; dabei werden wir besonders auf die im Argument der δ -Distribution enthaltene Retardierung achten.

quasistationäre Felder

Vernachlässigt man die Retardierung in (15.29) und (15.30),

$$\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \rightarrow \delta(t - t'), \quad (15.31)$$

so erhält man *quasistationäre Felder*:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (15.32)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (15.33)$$

welche den gleichen Ausdruck wie in der Elektrostatik und in der Magnetostatik haben. Diese Potentiale treten in der Theorie elektrischer Netzwerke und Maschinen auf. Die Näherung (15.31) ist gerechtfertigt, wenn ρ und \mathbf{j} sich während der Zeit, die eine elektromagnetische Welle braucht, um die Distanz $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ zurückzulegen, (praktisch) nicht ändert.

Zeitlich periodische Quellen-Verteilungen

Für periodische Quellen-Verteilungen

$$\rho(\mathbf{r}', t') = \rho(\mathbf{r}') \exp(-i\omega t'); \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{j}(\mathbf{r}') \exp(-i\omega t') . \quad (15.34)$$

Dann folgt aus (15.29), (15.30):

$$\phi = \phi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t); \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (15.35)$$

mit ($k = \omega/c$)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (15.36)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (15.37)$$

Die Diskussion der Integrale (15.36), (15.37) werden wir im Abschnitt 16 wieder aufgreifen.

Potentiale bewegter Punktladungen

Für eine sich auf der *Bahn* $\mathbf{x}(t)$ bewegende Punktladung q können wir

$$\rho(\mathbf{r}', t') = q \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t')); \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = q \mathbf{v}(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t')) \quad (15.38)$$

schreiben. Dann kann in ((15.29), mittlerer Term) die \mathbf{r}' - Integration mit Hilfe der δ -Funktion ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \int \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}(t')) \delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' dt' \quad (15.39) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \int \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|} dt', \end{aligned}$$

analog

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu q}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v}(t') \delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|} dt'. \quad (15.40)$$

Zur Ausführung der t' - Integration benutzen wir

$$\int g(t') \delta(\xi(t')) dt' = \frac{g(t_{ret})}{|\xi'(t_{ret})|}, \quad (15.41)$$

wobei

$$\xi(t') \equiv t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{x}(t')|/c \quad (15.42)$$

der Argument der delta-Funktion ist. Die *retardierte Zeit* t_{ret} ist dann die (in diesem Fall einzige, s.u.) Nullstelle von ξ , i. e. sie erfüllt die Gleichung

$$t_{ret} - t + |\mathbf{r} - \mathbf{x}(t_{ret})|/c = 0 \quad (15.43)$$

ist. Diese *retardierte Zeit* t_{ret} ist nicht so einfach auszuwerten¹, wegen der impliziten t' -Abhängigkeit in $\mathbf{x}(t')$.

t_{ret} trägt der endlichen Laufzeit der elektromagnetischen Welle vom momentanen Teilchenort \mathbf{x} zum Aufpunkt \mathbf{r} Rechnung.

Die Ableitung von ξ lautet

$$\xi'(t') \equiv \kappa(t') = 1 - \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \cdot \boldsymbol{\beta}(t'), \quad (15.44)$$

¹Diese retardierte Zeit ist nicht die gleiche wie in (15.28)!

wo wir den *Abstandsvektor*

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{x}(t') . \quad (15.45)$$

und

$$\boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\mathbf{v}}{c} . \quad (15.46)$$

eingeführt haben.

Zu beachten ist, dass $\xi'(t')$ stets positiv ist, da $|\boldsymbol{\beta}| < 1$. Aus diesem Grund gibt es immer maximal eine Nullstelle t_{ret} von $\xi(t') = 0$. Anderfalls würde man dieselbe Punktladung gleichzeitig (für den Beobachter) an zwei oder mehr verschiedenen Stellen sehen können.

Wir erhalten also aus (15.39),(15.40) die **Liénard-Wichert-Potentiale**

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{R\kappa} \right]_{ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right]_{ret} \quad (15.47)$$

und analog

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{R\kappa} \right]_{ret} . \quad (15.48)$$

Hier haben wir die Bezeichnung $[\dots]_{ret}$ eingeführt, was bedeutet, dass alle Größen zwischen $[\dots]_{ret}$ bei der (durch (15.43) selbkskonsistent zu bestimmender) retardierten Zeit zu betrachten sind.

Der Grenzfall $v \rightarrow 0$ ergibt das Coulomb-Potential:

$$\mathbf{A} \rightarrow 0; \quad \phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon R} . \quad (15.49)$$

15.4 Elektromagnetische Strahlung bewegter Punktladungen

Von Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch lokalisierte Ladungs- und Strom-Verteilungen sprechen wir, wenn der Energiefluss durch die unendlich ferne Oberfläche nicht verschwindet,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} \neq 0 . \quad (15.50)$$

Das bedeutet, dass die Felder \mathbf{E} , \mathbf{B} nicht stärker als R^{-1} abfallen dürfen, da die Oberfläche wie R^2 anwächst. Solche Felder nennt man **Strahlungsfelder**, im Gegensatz zu den **statischen** Feldern, welche mit R^{-2} abfallen.

Wir wollen nun zeigen, dass beschleunigte Punktladungen **strahlen**; dazu müssen wir die zu (15.47) und (15.48) gehörenden Felder über

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (15.51)$$

berechnen, wobei wir für ϕ , \mathbf{A} die Form (15.39), (15.40) benutzen wollen. Wir werden in der (ziemlich komplizierten) Herleitung *jeweils immer nur die führenden Terme behalten, und $O(R^{-2})$ -Terme stets vernachlässigen*.

Für das \mathbf{B} -Feld haben wir

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \frac{\mu q}{4\pi} \int \mathbf{v}(t') \overbrace{\delta(t' - t + R(t')/c)}^{(A)} \overbrace{\frac{1}{R(t')}}^{(B)} dt'. \quad (15.52)$$

Hier wurden die beiden Terme, auf die der ∇ -Operator angewandt werden muss, mit (A) und (B) markiert. Da $\frac{\partial}{\partial r_i} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}(t')|} = O(1/R^2)$ ist, kann man die Anwendung von ∇ auf den Term (B) vernachlässigen (das ist der Term, der in der Magnetostatik das Magnetfeld gibt). Für die δ -Funktion haben wir dagegen

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \delta(\underbrace{t' - t + R(t')/c}_{\xi(t')}) = \delta'(\xi(t')) \frac{R_i(t')}{cR(t')}, \quad (15.53)$$

wo wir die Notation (15.42) benutzt haben. Um eine partielle Integration durchführen zu können, ist es zweckmässig die Ableitung der δ -Funktion bezüglich ξ in einer bezüglich t' umzuwandeln:

$$\delta'(\xi(t')) = \frac{1}{\frac{\partial \xi}{\partial t'}} \frac{\partial}{\partial t'} \delta(\xi(t')) = \frac{1}{\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \delta(\xi(t')). \quad (15.54)$$

(15.52) wird also

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu q}{4\pi} \int \frac{1}{R(t')} \frac{1}{\kappa(t')} \boldsymbol{\beta}(t') \times \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \delta(\xi(t')) dt' + O(1/R^2). \quad (15.55)$$

Mittels partieller Integration kann man die $\frac{\partial}{\partial t'}$ auf die restlichen Terme verschieben:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu q}{4\pi} \int \delta(\xi(t')) \frac{\partial}{\partial t'} \left[\frac{1}{R(t')} \frac{1}{\kappa(t')} \boldsymbol{\beta}(t') \times \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \right] dt' + O(1/R^2). \quad (15.56)$$

Wir müssen im Prinzip alle diese Terme nacheinander ableiten. Diese Aufgabe wird deutlich vereinfacht, wenn man sich auf die *leading* (führende) Terme in $1/R$ beschränkt. In der Tat hängt der Ausdruck zwischen den $[\dots]$ in (15.56) von t' von zwei Funktionen ab, nämlich $\mathbf{R}(t')$ und $\boldsymbol{\beta}(t')$. Da $\frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{R}(t') = -\mathbf{v}(t')$ verliert man beim Ableiten von $\mathbf{R}(t')$ stets eine Potenz in R . Solche Terme können daher vernachlässigt werden. Ebenfalls geschieht beim Ableiten des Betrages $\frac{\partial}{\partial t'} R(t') = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}/R$.

Dagegen ergibt die Ableitung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\beta}$

$$\frac{\partial}{\partial t'} \boldsymbol{\beta}(t') = \mathbf{a}(t')/c \quad (15.57)$$

gerade die Beschleunigung des Teilchens: hier „verliert“ man keine Potenz von R .

Diese Überlegung zeigt schon, dass *leading* Terme in $1/R$ proportional zu \mathbf{a} sein müssen. Wir führen daher in (15.56) die Ableitung bezüglich t' nur da wo $\boldsymbol{\beta}$ auftaucht durch, nämlich explizit und in der Funktion $1/\kappa$. Für die letztere haben wir

$$\frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{\kappa(t')} = \frac{1}{\kappa(t')^2} \mathbf{a}(t') \cdot \frac{\mathbf{R}(t')}{cR(t')} + O(1/R). \quad (15.58)$$

Wir ersetzen auch, wie oben

$$\delta(\xi(t')) = \frac{1}{\kappa(t')} \delta(t' - t_{ret}), \quad (15.59)$$

führen die Größe

$$S \equiv \kappa R = R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/c \quad (15.60)$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu q}{4\pi c} \int dt' \frac{1}{S(t')} \delta(t' - t_{ret}) \left[\mathbf{a}(t') \times \frac{\mathbf{R}(t')}{S(t')} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbf{a}(t') \cdot \frac{\mathbf{R}(t')}{S(t')} \right) \left(\boldsymbol{\beta}(t') \times \frac{\mathbf{R}(t')}{S(t')} \right) \right] + O(1/R^2). \end{aligned} \quad (15.61)$$

Das Integral über t' kann leicht mit Hilfe der δ -Funktion durchgeführt werden. Nach Einführung des Vektors²

$$\mathbf{M} \equiv \frac{\mathbf{R}}{S} \quad (15.62)$$

schreiben wir \mathbf{B} in einer kompakten Form

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_2} \quad (15.63)$$

mit dem $O(1/R)$ Term (Strahlungsfeld) \mathbf{B}_s aus (15.61):

$$\boxed{\mathbf{B}_s = \frac{\mu q}{4\pi c} \left[\frac{1}{S} \mathbf{a} \times \mathbf{M} + \frac{1}{S} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{M}) (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{M}) \right]_{ret}} \quad (15.64)$$

und \mathbf{B}_2 der restliche $O(1/R^2)$ Term ist.

Für das \mathbf{E} -Feld erhält man aus (15.51) mit einer ähnlichen Rechnung

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_2} \quad (15.65)$$

mit

$$\boxed{\mathbf{E}_s = \frac{\mu q}{4\pi} \left[\frac{1}{S} \mathbf{a} \cdot \mathbf{M} (\mathbf{M} - M\boldsymbol{\beta}) - \frac{1}{S} M \mathbf{a} \right]_{ret}} \quad (15.66)$$

Man kann sich leicht vergewissern, dass ähnliche Beziehungen wie bei den ebenen Wellen bestehen, nämlich

$$\boxed{\mathbf{E}_s \cdot [\mathbf{N}]_{ret} = 0 \quad \mathbf{B}_s = \frac{1}{c} [\mathbf{N}]_{ret} \times \mathbf{E}_s \cdot}, \quad (15.67)$$

wo

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (15.68)$$

der Verbindungs-Einheitsvektor ist.

²Was für kleine β dem Einheitsvektor von \mathbf{R} entspricht

Für die $O(1/R^2)$ Felder ergibt sich nach langer Rechnung

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{\mathbf{M} - M\boldsymbol{\beta}}{S^2} (1 - \beta^2) \right]_{ret} \quad (15.69)$$

Es gilt eine der Beziehungen wie in (15.67):

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{c} [\mathbf{N}]_{ret} \times \mathbf{E}_2 \quad (15.70)$$

so dass auch das gesamte \mathbf{B} stets senkrecht zu $[\mathbf{N}]_{ret}$ und zu \mathbf{E} ist.

15.5 Energiestromdichte

Da \mathbf{E}_s und \mathbf{B}_s wie $1/R$ abfallen, fällt die Energiestromdichte (Pointing-Vektor) \mathbf{S} wie $1/R^2$ ab. Mit Hilfe von (15.67) bekommen wir für ihren *leading* ($O(1/R^2)$)-Anteil

$$\mathbf{S}_s = - \frac{\mathbf{E}_s \times (\mathbf{E}_s \times [\mathbf{N}]_{ret})}{\mu c} = \frac{[\mathbf{N}]_{ret}}{\mu c} E_s^2 \quad (15.71)$$

Wir erhalten

$$\mathbf{S}_s = \left[\frac{q^2 \mathbf{N}}{16\pi^2 \epsilon c^3 \kappa^6 R^2} \left(\mathbf{N} \times [(\mathbf{N} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}] \right)^2 \right]_{ret} \quad (15.72)$$

Da $|\mathbf{S}| \sim R^{-2}$, ist die Ausstrahlungsbedingung (15.50) erfüllt und wir haben das Ergebnis, dass beschleunigte Punktladungen, $\mathbf{a} \neq 0$, strahlen.

Dass geradlinig, gleichförmig bewegte Punktladungen ($\mathbf{a} = 0$) nicht strahlen, folgt ohne jede Rechnung aus dem Relativitätsprinzip: Das Ruhe-System der Punktladung ist dann ein Inertialsystem, in dem das elektrische Feld das Coulomb-Feld ist und das magnetische Feld, per Definition, verschwindet, so dass $\mathbf{S} = 0$ wird.

Im nichtrelativistischen Limes $\beta \ll 1$, kann man $\kappa \approx 1$, und die Retardierung vernachlässigen: (15.72) gibt

$$\mathbf{S}_s = \frac{q^2 \mathbf{N}}{16\pi^2 \epsilon c^3 R^2} |\mathbf{N} \times \mathbf{a}|^2 \quad \beta \ll 1 \quad (15.73)$$

also ist die Strahlungsintensität maximal senkrecht zur Teilchenbeschleunigung. Im *relativistischen* Fall (ÜB) $1 - \beta \ll 1$ und für den Fall $\mathbf{a} \parallel \boldsymbol{\beta}$ (Bremsstrahlung) ist die maximale Intensität in einem kleinen Winkel nach vorne ausgerichtet. Das kommt dadurch, dass für $\beta \approx 1$, der Term κ im Nenner in (15.72) sehr klein wird wenn \mathbf{R} *beinahe* parallel zu $\boldsymbol{\beta}$ ist (siehe (15.44)). *Genau* nach vorne verschwindet aber S_s wegen des Zählers in (15.72).

Beispiele:

1.) Bremsstrahlung:

Wenn ein geladenes Teilchen (z.B. Elektron) in einem äußeren Feld abgebremst wird (z.B. beim Aufprall auf ein Target), dann entsteht Bremsstrahlung. Daraus resultiert das kontinuierliche *Röntgenspektrum*.

2.) Synchrotron-Strahlung:

Die Bewegung geladener Teilchen auf Kreisbahnen ist auch eine beschleunigte Bewegung. Die dabei entstehende Strahlung ist ein wesentliches Problem bei zyklischen Teilchenbeschleunigern (Synchrotron); ein Teil der zugeführten Energie geht durch Strahlung *verloren*. Auch hier wird Röntgenstrahlung erzeugt.

3.) Strahlungsdämpfung:

Im klassischen Atommodell bewegen sich die gebundenen Elektronen auf Kreis- bzw. Ellipsenbahnen um den Atomkern. Dabei strahlen sie als beschleunigte Ladungen kontinuierlich elektromagnetische Wellen ab. Der resultierende Energieverlust führt zu instabilen Bahnen und schließlich zum Kollaps des Atoms im klassischen Modell. Dieser Widerspruch zur experimentellen Beobachtung wird erst in der Quantentheorie bzw. Quantenelektrodynamik (QED) aufgelöst.

Kapitel 16

Multipolstrahlung

16.1 Langwellen-Näherung

Für eine Quellen-Verteilung der Form

$$\rho = \rho(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t); \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (16.1)$$

hatten wir in Abschnitt 15.3

$$\phi = \phi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t); \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (16.2)$$

gefunden, sowie (mit $k = \omega/c$)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (16.3)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'.$$

Bei der Diskussion von (16.3) können wir uns im Folgenden auf $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ beschränken, da \mathbf{A} und ϕ direkt über die Lorenz-Konvention zusammenhängen: Aus

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (16.4)$$

folgt mit (16.2)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{c^2}{i\omega} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (16.5)$$

Zur Bestimmung der Felder im ladungsfreien Bereich werden wir allerdings das skalare Potential nicht mehr brauchen, da

$$-i\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}) = c^2 \nabla \times \mathbf{B}. \quad (16.6)$$

Alle Felder können mittels \mathbf{A} bestimmt werden.

Langwellen - Näherung

Zur weiteren Behandlung von (16.3) betrachten wir die Langwellen - Näherung

$$a_0 \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (16.7)$$

wobei a_0 den Radius einer Kugel angibt, welche die Ladungs- und Stromverteilung umfaßt. Wir nehmen den Koordinatenursprung im Mittelpunkt dieser Kugel, so daß $r' \leq a_0$.

Beispiele

Für die optische Strahlung von Atomen ist $a_0 \approx 10^{-8}$ cm, $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-5}$ cm; analog für die γ -Strahlung von Atomkernen: $a_0 \approx 10^{-13}$ cm, $\lambda \approx 10^{-11}$ cm.

Auf der anderen Seite, gibt es technisch interessante Fälle, bei denen $a_0 \sim \lambda$ ist, z.B. Antennen deren Länge der Größenordnung der Wellenlänge ist (Antenne $\lambda/4$ ÜB)

Bei der Diskussion von (16.3) sind nun die Längen a_0 , λ und r wesentlich. Wir untersuchen folgende Fälle:

Fall 1 : $a_0 < r \ll \lambda$ (Nahzone)

Dann ist

$$k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{2\pi}{\lambda}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll 1 \quad (16.8)$$

und wir erhalten (vgl. (15.32)):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (16.9)$$

Der Ortsanteil der Potentiale zeigt nach (16.9) die gleiche Struktur wie in Elektro- und Magnetostatik. Angesichts der Zeitabhängigkeit (16.2) spricht man von **quasi-stationären Feldern**. Dieser Fall ist relevant für elektrische Netzwerke.

Fall 2 : $a_0 \ll \lambda \ll r$ (Fernzone)

Dieser ist der Fall von Interesse für *elektromagnetische Strahlung*

Wegen

$$kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1 \quad (16.10)$$

können wir dann die Taylor-Reihe in (\mathbf{r}'/r) entwickeln (vgl. Elektrostatik)

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sum_n \frac{(-)^n}{n!} (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^n r \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} = r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) \quad (16.11)$$

und in ((16.3)) benutzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \dots \quad (16.12) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{\exp(ikr)}{r} \underbrace{\exp(-ik\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r)}_{1 - i\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}k} \underbrace{\left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^{-1}}_{1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 \exp(ikr)}{4\pi r} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \underbrace{\left\{ 1 + \left(\frac{1}{r} - ik\right)(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}') + \dots \right\}}_{\approx \{1 - i\frac{\omega}{c}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}')\}}$$

mit $k = \omega/c$ und dem Richtungsvektor

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (16.13)$$

Im letzten Term in (16.12) haben wir wegen (16.10) $1/r$ im Vergleich zu k vernachlässigt.

16.2 Elektrische Dipol-Strahlung

Wir berechnen den ersten Term in (16.12)

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \exp(ikr)}{4\pi r} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}'), \quad (16.14)$$

der, im Gegensatz zur Magnetostatik, nicht verschwindet, da die Stromdichte nicht stationär ist. Den können wir wie folgt umformen (vgl. Magnetostatik):

$$\begin{aligned} \int_V j_i(\mathbf{r}') d^3r' &= \int_V \nabla' \cdot (r'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}')) d^3r' - \int_V r'_i (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) d^3r' \\ &= \int_{\partial V} r'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{f}' - \int_V r'_i (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) d^3r' = -i\omega \int_V r'_i \rho(\mathbf{r}') d^3r', \end{aligned} \quad (16.15)$$

wo wir das Volumen groß genug gewählt haben, so daß das Oberflächenintegral verschwindet, und die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} - i\omega\rho = 0 \quad (16.16)$$

ausgenutzt haben.

Mit der Definition $\mathbf{d} = \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3r$ wird $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ dann zu

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \mathbf{d}. \quad (16.17)$$

Für die Berechnung der Felder beschränken wir uns wie in Absch. 15 auf Strahlungsterme, d. h. Terme $\sim r^{-1}$. Wie da bereits gesehen, liefern Ableitungen bzgl. r_i des Betrages r zu Termen niedriger Ordnung.

Die *leading* Terme in der Rotation von (16.17) kommen aus Ableitungen des $\exp(ikr)$ -Termes. Da wirkt der ∇ -Operator:

$$\nabla \exp(ikr) \rightarrow i k \mathbf{N} \exp(ikr). \quad (16.18)$$

Wir erhalten also

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi c} \omega^2 \frac{\exp(ikr)}{r} (\mathbf{N} \times \mathbf{d}). \quad (16.19)$$

(es gibt immer Korrekturen $O(\lambda/r)^2$).
 Aus (16.6) folgt für das \mathbf{E} -Feld:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = i \frac{c^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = -c \mathbf{N} \times \mathbf{B}_0, \quad (16.20)$$

was auch bedeutet

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} \mathbf{N} \times \mathbf{E}_0 \quad (16.21)$$

wo wir (16.18) benutzt haben.

Energiestromdichte

Da $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{N} = 0$, können wir leicht die Energiestromdichte

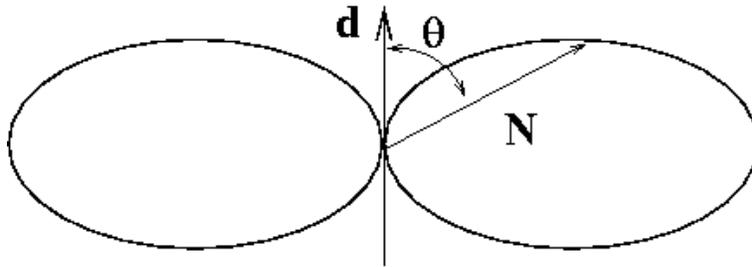
$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{c}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{N}) \times \mathbf{B}_0 = \frac{c}{\mu_0} \mathbf{N} B_0^2 \quad (16.22)$$

berechnen. Es muß beachtet werden, dass in (16.22) eigentlich der Realteil von $\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$ vor dem Quadrat gebildet werden muss. Wir finden daher

$$\mathbf{S}_0 = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \omega^4 d^2 \sin^2 \theta \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2} \mathbf{N}, \quad (16.23)$$

wobei θ der von \mathbf{N} und \mathbf{d} eingeschlossene Winkel ist. Für den zeitlichen Mittelwert folgt:

$$\bar{\mathbf{S}}_0 = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \omega^4 d^2 \frac{\sin^2 \theta}{2r^2} \mathbf{N}. \quad (16.24)$$



Der Dipol strahlt also nicht in Richtung von \mathbf{d} ($\theta = 0$), sondern maximal senkrecht zu \mathbf{d} ($\theta = 90^\circ$). Die $\sin^2 \theta$ -Abhängigkeit ist charakteristisch für Dipolstrahlung.

Bemerkungen

- 1.) Charakteristisch für Strahlungsfelder ist ihre Eigenschaft, dass \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{S} ein orthogonales Dreibein bilden (vgl. Kap. 9).
- 2.) Ein (mit der Frequenz ω) oszillierender Dipol ist nur durch beschleunigte Punktladungen realisierbar. (16.24) ist also konform mit der allgemeinen Aussage (15.72).

- 3.) Die Strahlung niedrigster Multipolarität ist Dipol-Strahlung ($l=1$), nicht Monopol-Strahlung ($l=0$)! In der Quantentheorie wird gezeigt, wie die Multipolarität der Strahlung und der Drehimpuls der Photonen zusammenhängen. Da Photonen einen Eigendrehimpuls haben (*Spin* 1), gibt es keine *Drehimpuls-freie* Strahlung, d.h. Monopol-Strahlung. Der Spin der Photonen ist direkt mit der Tatsache verknüpft, dass Strahlungsfelder Vektor-Felder sind.

16.3 Magnetische Dipol-Strahlung

Wir betrachten jetzt den Nächsten Term der Entwicklung (16.12)

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\exp(ikr)}{r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}') d^3r'; . \quad (16.25)$$

Wir zeigen jetzt, dass das verbleibende Integral durch das magnetische Dipolmoment und den elektrischen Quadrupolmoment bestimmt ist. Um dies zu sehen, benutzen wir die Identität:

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{j} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) \times \mathbf{N} + \frac{1}{2}\{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{j} + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{j})\mathbf{r}'\} . \quad (16.26)$$

Mit der Definition

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) dV'$$

(4.41) des magnetischen Dipolmoments wird der erste Teil in (16.26):

$$\mathbf{A}_1^{(m)}(\mathbf{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\exp(ikr)}{r} (\mathbf{m} \times \mathbf{N}). \quad (16.27)$$

Der magnetische Dipol-Anteil des Vektorpotentials geht formal in den elektrischen Dipol-Anteil (16.17) über, wenn man

$$\frac{1}{c}(\mathbf{m} \times \mathbf{N}) \rightarrow \mathbf{d} \quad (16.28)$$

ersetzt. Damit kann man aus (16.19) und (16.20) für die Feldstärken sofort ablesen (die Ableitung von \mathbf{N} ergibt Terme höherer Ordnung und kann vernachlässigt werden):

$$\mathbf{B}_1^{(m)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \omega^2 \frac{\exp(ikr)}{r} (\mathbf{N} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{N})) \quad (16.29)$$

und

$$\mathbf{E}_1^{(m)}(\mathbf{r}) = -c (\mathbf{N} \times \mathbf{B}_1^{(m)}) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \omega^2 \frac{\exp(ikr)}{r} c \mathbf{m} \times \mathbf{N} . \quad (16.30)$$

Ein Vergleich mit (16.19) zeigt, dass (bis auf ein Minus-Zeichen) die magnetische Dipolstrahlung die gleiche Form wie die elektrische aufweist, indem \mathbf{E} mit \mathbf{B} sowie \mathbf{d} mit \mathbf{m} vertauscht. Entsprechend sieht die im Zeitmittel abgestrahlte Energie ähnlich wie in (16.24) aus:

$$\bar{\mathbf{S}}_1^{(m)} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \omega^4 m^2 \frac{\sin^2 \theta}{2r^2} \mathbf{N}, \quad (16.31)$$

wo θ jetzt der Winkel zwischen \mathbf{m} und \mathbf{N} ist. Der Unterschied zwischen der magnetischen und der elektrischen Dipolstrahlung liegt also in der **Polarisation**: für einen elektrischen Dipol liegt der Vektor des elektrischen Feldes in der von \mathbf{N} und \mathbf{d} aufgespannten Ebene (allerdings senkrecht zu \mathbf{N}), für einen magnetischen Dipol liegt \mathbf{E} senkrecht zu der von \mathbf{N} und \mathbf{m} aufgespannten Ebene.

Die elektrische Dipolstrahlung ist um den Faktor $\frac{c^2 d^2}{m^2} \propto \frac{c^2 \rho^2}{j^2} = \frac{c^2}{v^2}$ stärker als die magnetische Dipolstrahlung, es sei denn, die letzte verschwindet, weil z. B., keine freien Ladungen, sondern nur (divergenzfreie) Ströme vorhanden sind.

16.4 Elektrische Quadrupol-Strahlung

Wir befassen uns nun mit dem 2. Term in (16.26), der auf

$$\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\exp(ikr)}{2r} \int \{ \mathbf{j}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}) \} d^3 r' \quad (16.32)$$

führt. Das Integral in (16.32) kann nun auf den in Abschnitt 1.5 eingeführten elektrischen Quadrupoltensor zurückgeführt werden. Analog (16.15) formen wir um (\mathbf{N} ist unabhängig von \mathbf{r}'):

$$\begin{aligned} & \int_V j_i(\mathbf{r}') (N_m r'_m) d^3 r' + \int_V r'_i j_m(\mathbf{r}') N_m d^3 r' \\ &= N_m \int_V \nabla' \cdot (r'_m r'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}')) d^3 r' - N_m \int_V r'_m r'_i \nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &= -i\omega N_m \int_V r'_m r'_i \rho(\mathbf{r}') d^3 r', \end{aligned} \quad (16.33)$$

wobei der Divergenzterm in (16.33) in ein verschwindendes Oberflächenintegral umgewandelt worden ist und die Ladungserhaltung benutzt wurde. Also:

$$\int_V \{ \mathbf{j}(\mathbf{r}')(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}') + \mathbf{r}'(\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \} d^3 r' = -i\omega \int_V \mathbf{r}' (\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 r', \quad (16.34)$$

und wir können (16.32) schreiben als:

$$\mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \omega^2 \frac{\exp(ikr)}{2r} \int (\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (16.35)$$

Für die Felder folgt bei Beachtung von (16.18)

$$\mathbf{B}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = ik \left(\mathbf{N} \times \mathbf{A}_1^{(e)}(\mathbf{r}) \right) \quad (16.36)$$

und mit (16.6)

$$\mathbf{E}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = -c \left(\mathbf{N} \times \mathbf{B}_1^{(e)}(\mathbf{r}) \right). \quad (16.37)$$

Mit Hilfe des elektrischen Quadrupoltensors, gegeben durch seine Komponenten

$$Q_{mn} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \{ 3r'_m r'_n - r'^2 \delta_{mn} \} d^3 r', \quad (16.38)$$

erhalten wir für $\mathbf{B}_1^{(e)}$ den Ausdruck:

$$\mathbf{B}_1^{(e)}(\mathbf{r}) = -i \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \omega^3 \frac{\exp(ikr)}{6r} (\mathbf{N} \times \mathbf{Q}(\mathbf{N})), \quad (16.39)$$

wobei der Vektor $\mathbf{Q}(\mathbf{N})$ die Komponenten

$$Q(\mathbf{N})_m = \sum_{n=1}^3 Q_{mn} N_n \quad (16.40)$$

hat. Man beachte, dass der 2. Term in (16.38) zu (16.39) keinen Beitrag liefert (denn $\delta_{mn} N_n = N_m$)!

Energiestromdichte

Wie oben berechnen wir nun die Energiestromdichte

$$\mathbf{S}_1^{(e)} = \frac{c}{\mu_0} (\operatorname{Re} \mathbf{B}_1^{(e)} e^{-i\omega t})^2 \mathbf{N} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \omega^6 \frac{\sin^2(kr - \omega t)}{36r^2} (\mathbf{N} \times \mathbf{Q}(\mathbf{N}))^2 \mathbf{N}. \quad (16.41)$$

Nach Zeitmittelung wird (16.41) zu

$$\overline{\mathbf{S}}_1^{(e)} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \frac{\omega^6}{72r^2} (\mathbf{N} \times \mathbf{Q}(\mathbf{N}))^2 \mathbf{N}. \quad (16.42)$$

Der Unterschied zur Dipolstrahlung bzgl. der Frequenzabhängigkeit ist offensichtlich. Der zusätzlichen ω^2 -Potenz in S entspricht ein zusätzliches $\omega = kc$ in den Feldern, was dem nächsten Term in der Entwicklung in $a_0 k = a_0/\lambda$ entspricht (a_0 ist die Größe des Ladungsbereiches). Die Quadrupolstrahlung wird wichtig, wenn $a_0/\lambda \sim 1$ wird.

Axialsymmetrie

Zur Diskussion der Winkelabhängigkeit betrachten wir den Fall der Axialsymmetrie (vgl. Abschnitt 1.5): θ sei der Winkel zwischen der Symmetrieachse des Quadrupols und dem Ortsvektor.

$$Q_{mn} = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n; \quad Q_{11} = Q_{22} = -\frac{Q_{33}}{2} = -\frac{Q_0}{3}. \quad (16.43)$$

In

$$(\mathbf{N} \times \mathbf{Q}(\mathbf{N}))^2 = Q(\mathbf{N})^2 - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{N}))^2 \quad (16.44)$$

wird dann

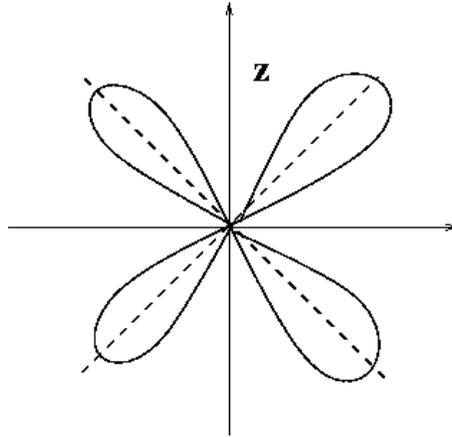
$$Q(\mathbf{N})^2 = \frac{Q_0^2}{9} (N_1^2 + N_2^2) + \frac{4}{9} Q_0^2 N_3^2 = \frac{Q_0^2}{9} (\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta) \quad (16.45)$$

sowie

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{N}) = N_n Q_{nn} N_n = -\frac{Q_0}{3} \sin^2 \theta + \frac{2}{3} Q_0 \cos^2 \theta; \quad (16.46)$$

also

$$(\mathbf{N} \times \mathbf{Q}(\mathbf{N}))^2 = Q_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (16.47)$$



Ergebnis:

$$\bar{\mathbf{S}}_1^{(e)} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \frac{\omega^6}{72r^2} Q_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \mathbf{N} . \quad (16.48)$$

Die elektrische Quadrupolstrahlung unterscheidet sich von der elektrischen und magnetischen Dipolstrahlung sowohl in der Frequenzabhängigkeit als auch in der Winkelverteilung.

Anwendung in der Atom- und Kernphysik

Atome und Kerne können unter Emission bzw. Absorption von elektromagnetischer Strahlung ihren Zustand ändern. Die Multipolentwicklung ist die für diese Situation passende Beschreibung des elektromagnetischen Feldes. In der Atomphysik dominiert in der Regel die Dipolstrahlung: Der Vergleich von (16.24) und (16.48) zeigt, dass elektrische Dipolstrahlung um einen Faktor der Größenordnung λ/a_0 stärker ist als elektrische Quadrupolstrahlung. Die erste dominiert auch die magnetische Dipolstrahlung, von der sie sich nach (16.24) und (16.31) um den Faktor $(v/c)^2$ unterscheidet. Die Verhältnisse sind in der Kernphysik komplizierter. Eine genaue Diskussion ist hier nur im Rahmen der **Quantentheorie** möglich.

Kapitel 17

Systematik der Multipolentwicklung

Dieser Teil der Vorlesung wird zu großem Teil aus dem Buch von W. Nolting „Grundkurs Theoretische Physik 3 Elektrodynamik“ *Vieweg, Braunschweig* entnommen.

Genauer werden, nach der 5 Auflage die Seiten 108-109, 111 bis 113 und 119 bis 126 benutzt (entspricht Teil des Abschnittes 2.3.5 sowie den Abschnitten 2.3.7-2.3.8) (Nach der 7. Auflage: Seiten 118-120 und 125-132).

In diesem Skriptum werden nur einige wenige Abweichungen oder Ergänzungen aufgeführt.

Verweise auf Gleichungen oder Abschnitte der Form (Nxxx) beziehen sich auf das Buch von Nolting (5 Auflage).

17.1 Eigenschaften der Kugelfunktionen (zu N2.3.5)

Für $m = 0$ sind die Kugelflächenfunktionen unabhängig von φ . Für azimutale Symmetrie kann man sich auf die $m = 0$ -Funktionen beschränken. Die Legendre Polynome P_l entsprechen lediglich den $m = 0$ Kugelflächenfunktionen, nur mit einer anderen Normierung.

$$Y_{l0}(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \quad (17.1)$$

17.2 Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Den Fall einer Flächeladungsdichte wollen wir nicht im Fall **azimutaler Symmetrie**, sondern allgemeiner nach Abs. N2.3.8 behandeln.

Im Abs. N2.3.8 betrachten wir zunächst den Fall einer allgemeinen Flächeladungsdichte $\sigma(r_0, \theta, \varphi)$.

Wir können diese nach Kugelflächenfunktionen (nach N2.158) entwickeln

$$\sigma(r_0, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \sigma_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (17.2)$$

mit den Koeffizienten

$$\sigma_{lm} = \int d\varphi d\cos\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \sigma(r_0, \theta, \varphi) \quad (17.3)$$

die vierte Randbedingung vom Abs. N2.3.8 gibt also (siehe Seite N123)

$$\sum_{l,m} \sigma_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{l,m} \frac{\epsilon_0}{r_0^2} a_{lm} (2l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (17.4)$$

also für die Koeffizienten

$$\epsilon_0 a_{lm} = \frac{r_0^2 \sigma_{lm}}{2l+1} \quad (17.5)$$

und für das Potential der Flächeladungsdichte

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{r_0^2}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l \sigma_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (17.6)$$

Im Fall azimuthaler Symmetrie sind nur die σ_{l0} Terme ungleich Null.

17.2.1 Punktladung

Der Fall einer Punktladung q in $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ ist ein Spezialfall mit

$$\sigma(r_0, \theta, \varphi) = \frac{q}{r_0^2} \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(\cos\theta - \cos\theta_0) \quad (17.7)$$

(diese Form erfüllt $\int \sigma df = q$), also

$$\sigma_{lm} = \frac{q}{r_0^2} Y_{lm}^*(\theta_0, \varphi_0). \quad (17.8)$$

Mit (17.8) und (17.6) erhält man Gl. (N2.169).

17.2.2 Strahlungsfelder

Für Strahlungsfelder brauchen wir statt der Entwicklung von $\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ (Gl. N2.169), die Entwicklung von

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = ik \sum_{l,m} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') h_l^{(1)}(kr_{>}) j_l(kr_{<}) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (17.9)$$

die wir ohne Beweis angeben. Hier sind j_l und $h_l^{(1)}$ sphärische Bessel- bzw. Hankelfunktionen. Diese sind die Lösung einer Gleichung wie (N2.145) indem man $\nabla^2 \rightarrow \nabla^2 + k^2$ ersetzt, was der homogenen Wellengleichung entspricht.

Für Punkte außerhalb des Quellenbereiches ($r > r'$) bekommt man für das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = i\mu k \sum_{l,m} h_l^{(1)}(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) \mathbf{j}_{lm}(k) \quad (17.10)$$

mit den Koeffizienten

$$j_{lm}(k) \equiv \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') j_l(k'). \quad (17.11)$$

Die ersten beiden Terme der Entwicklung (17.10) entsprechen den Multipoltermen, die wir in Kap. 16 gesehen haben.

17.3 Viewgraphs

Allgemein

Entwicklung nach orthonormalen Eigenfunktionen

$$\hat{O} U_n(x) = O_n U_n(x)$$

Eigenfunktionen eines Hermiteschen Operators

$$\int dx U_n^*(x) U_m(x) = \delta_{nm}$$

Orthogonalitätsbedingung

$$f_N(x) = \sum_n c_n U_n(x)$$

Vollständigkeit

$$c_n = \int dx U_n^*(x) f(x).$$

Bestimmung der Koeffizienten

Vollständigkeit auch: $\sum_n U_n^*(y) U_n(x) = \delta(x-y)$

da: $f(x) = \int dy \sum_n U_n^*(y) U_n(x) f(y) = \sum_n U_n(x) \int dy U_n^*(y) f(y)$

Kugelflaechenfunktionen

2) Funktionen der Kugelflaechen

In Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) laesst sich der Laplace-Operator wie folgt schreiben:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi},$$

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (2.145)$$

Die Eigenfunktionen des Operators $\Delta_{\vartheta, \varphi}$,

$$\Delta_{\vartheta, \varphi} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

heissen Kugelflaechenfunktionen:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi); \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l. \quad (2.146)$$

Sie bilden ein vollstaendiges System auf der Einheitskugel. Wir listen ihre wichtigsten Eigenschaften...

$$\hat{O} \equiv \Delta_{\theta, \phi} \quad x \equiv (\cos \theta, \phi)$$

Orthogonalitaet

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d \cos \vartheta Y_{l'm'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}.$$

Vollstaendigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta').$$

112

Entwicklung nach Kugelfunktionen

$$f(\mathbf{r}) = f(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} R_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (2.159)$$

$$R_{lm}(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d \cos \vartheta f(r, \vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi). \quad (2.160)$$

Legendre Polynome

nuetzlich bei Azymuthaler Symmetrie
(nur Abhaengigkeit von θ)

$$Y_{l,0}(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi},$$

$$P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l.$$

$$P_l(1) = 1$$

(2.152)

Orthogonalitaet

$$\int_{-1}^{+1} dz P_l(z) P_k(z) = \frac{2}{2l+1} \delta_{lk},$$

(2.153)

$$\int_{-1}^{+1} dz P_l^m(z) P_k^m(z) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lk},$$

(2.154)

Vollstaendigkeit

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(z') P_l(z) = \delta(z - z'),$$

(2.157)

Weitere Formeln

g) Additionstheorem:

$$\sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma) \quad (2.161)$$

($\gamma = \angle(\vartheta'\varphi', \vartheta\varphi)$).

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Y_{l0}(\vartheta)$$

→ KANN NICHT
VON WINKEL
ABHÄNGIG
SEIN;
KANN
 $\vartheta, \varphi = 0$
SETZEN

h) Spezielle Funktionen:

$$P_0(z) = 1,$$

$$P_1(z) = z,$$

$$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1),$$

$$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \dots;$$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi},$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta,$$

$$Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta e^{i2\varphi}$$

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi},$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right), \dots$$

$$Y_{l-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi)$$

Benutzen Sie (2.147) für $Y_{1,-1}$; $Y_{2,-2}$; $Y_{2,-1}$; ...

Loesung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Laplace Gleichung

$$\nabla^2 \Phi(r, \vartheta, \varphi) = 0$$

Entwicklung nach Kugelfunktionen

SEPARATIONSSATZ

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} R_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (2.162)$$

Laplace Operator ist "einfach"

$$\begin{aligned} 0 = \Delta \Phi &= \sum_{l,m} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2} \nabla_{\vartheta, \varphi}^2 \right\} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \\ &= \sum_{l,m} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R \right\} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

($R = R_{l,m}(r)$)

Gleichung fuer Radialanteil

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR}{dr} \right] - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0. \quad (2.163)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} rR$$

↔ Ansatz

$$R(r) = \frac{1}{r} u(r).$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u(r) = 0.$$

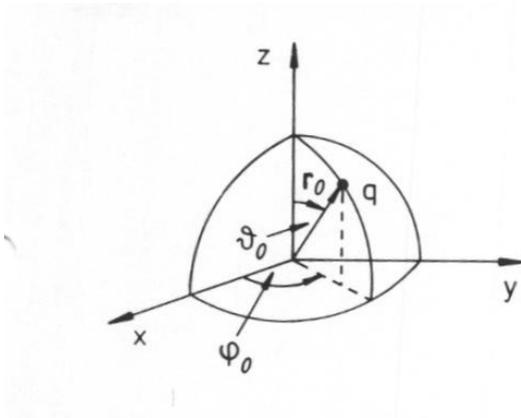
Allgemeine Loesung:

$$u(r) = A r^{l+1} + B r^{-l}.$$

also:

$$\left/ \Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left(A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \right/ \quad (2.164)$$

Potential einer allgemeinen Flacheladungsdichte



r_0 = Radius der Fläche

$\Phi_>(r)$: Potential für $r > r_0$,

$\Phi_<(r)$: Potential für $r < r_0$.

Flacheladungsdichte

Entwicklung nach Kugelfunktionen

$$\sigma(r_0, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \sigma_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Koeffizienten

$$\sigma_{lm} = \int d\varphi d\cos\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \sigma(r_0, \theta, \varphi)$$

Beispiel: Punktladung

$$\sigma(r_0, \theta, \varphi) = \frac{q}{r_0^2} \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

(diese Form erfüllt $\int \sigma df = q$)

$$\sigma_{lm} = \frac{q}{r_0^2} Y_{lm}^*(\theta_0, \varphi_0) .$$

Randbedingungen:

- 1) Φ regulär bei $r = 0$,
- 2) $\Phi \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$,
- 3) Φ stetig bei $r = r_0$
- 4) $\sigma = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi_{>}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{<}}{\partial r} \right)_{r=r_0}$ (Unstetigkeit in En)

Konsequenzen fuer die Entwicklung des Potentials

$$\text{Aus 1) } \Rightarrow \Phi_{<} = \sum_{l,m} A_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

$$\text{aus 2) } \Rightarrow \Phi_{>} = \sum_{l,m} B_{lm} r^{-(l+1)} Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

$$\text{aus 3) } \Rightarrow A_{lm} r_0^l = B_{lm} r_0^{-(l+1)} \equiv \frac{1}{r_0} a_{lm}.$$

Notation:

innerhalb ($r < r_0$): $r = r_{<}$, $r_0 = r_{>}$,

außerhalb ($r > r_0$): $r = r_{>}$, $r_0 = r_{<}$.

($r_{>}$: "der gr sste zwischen r_0 und r ")

Also, 1,2,3 gibt:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l,m} a_{lm} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$

kompakter

Somit ist die vierte Bedingung

$$\begin{aligned} \sigma(r_0, \vartheta, \varphi) &= \sum_{l,m} \sigma_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi_{>}}{\partial r_{>}} - \frac{\partial \Phi_{<}}{\partial r_{<}} \right)_{r_{>}=r_{<}=r_0} = \\ &= -\epsilon_0 \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \left[-(l+1) \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+2}} - l \frac{r_{<}^{l-1}}{r_{>}^{l+1}} \right]_{r_{<}=r_0} = \\ &= \frac{\epsilon_0}{r_0^2} \sum_{l,m} a_{lm} (2l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

Dies legt die Koeffizienten fest

$$\epsilon_0 a_{lm} (2l+1) = r_0^2 \sigma_{lm}$$

Und das Potential wird:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0 r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l r_0^2 \sigma_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$

Speziell fuer eine Punktladung in

$$r_0 \equiv (r_0, \theta_0, \phi_0)$$

$$\frac{\phi(r)}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|r-r_0|} = \frac{1}{\epsilon_0 r >} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r <}{r >}\right)^l [Y_{lm}^*(\vartheta_0, \varphi_0)] Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$
$$r \equiv (r, \theta, \phi)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung koennen wir

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

entwickeln

Ausserhalb des Ladungsgebietes:

$$r \gg r' \Leftrightarrow r' = r <, r = r >$$

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Mit den sphaerischen Multipolmomenten:

$$q_{lm} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi'),$$

Monopol (l=0)

Mit $Y_{00} = (4\pi)^{-1/2}$ folgt:

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d^3r' \rho(r') = \frac{q}{\sqrt{4\pi}}. \quad (2.175)$$

Dies stimmt bis auf den unwesentlichen Faktor $1/\sqrt{4\pi}$ mit (2.91) überein.

Dipol (l=1)

Mit den Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned} Y_{10}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r}, \\ Y_{11}(\vartheta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x + iy}{r}, \\ Y_{1-1}(\vartheta, \varphi) &= -Y_{11}^*(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

finden wir den folgenden Zusammenhang zwischen den sphärischen und den kartesischen Dipolmomenten (2.92):

$$\begin{aligned} q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z, \\ q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x + i p_y) = -q_{1-1}^*. \end{aligned} \quad (2.176)$$

(Quadrupol l=2)

Mit den Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned} Y_{20}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{3z^2 - r^2}{r^2}, \\ Y_{21}(\vartheta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{z}{r^2} (x + iy), \\ Y_{22}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta e^{i2\varphi} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{(x + iy)^2}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33}, \\ q_{21} &= -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{31} - i Q_{32}) = -q_{2-1}^*, \\ q_{22} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - Q_{22} - 2i Q_{12}) = q_{2-2}^*. \end{aligned}$$

Teil VII

Spezielle Relativität

Kapitel 18

Spezielle Relativitätstheorie und relativistische Elektrodynamik

18.1 Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie beruht auf zwei Grundannahmen (= Prinzipien), dem

1. **Relativitätsprinzip**, und dem
2. **Prinzip von der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit**.

Beide Annahmen werden durch experimentelle Befunde nahegelegt, doch geht auch eine gewisse philosophische Grundeinstellung darin ein.¹

18.1.1 Das Relativitätsprinzip

Wiederholung der Definition eines **Inertialsystems** : In einem solchen System **bleibt ein Massenpunkt im Zustand Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung**, wenn keine Kraft auf ihn einwirkt. Ein solches System ist realisiert in einem Bezugssystem, das sich relativ zum Fixsternhimmel in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung befindet.

Das **EINSTEINSche Relativitätsprinzip** besagt hingegen, daß **alle physikalischen Vorgänge in allen Inertialsystemen bei sonst gleichen Bedingungen gleich ablaufen**. Es ist durch kein Experiment möglich, eine absolute Geschwindigkeit eines Systems festzustellen. Daher muß auch die **mathematische Beschreibung aller physikalischen Vorgänge in allen Inertialsystemen gleichartig sein (Kovarianz)**.

Ein Spezialfall dieses EINSTEINSchen Relativitätsprinzips ist das **GALILEISChe Relativitätsprinzip**, das nur für die klassische Mechanik (Mechanik für Teilchengeschwindigkeiten $\ll c$) gilt, und welches in der Mechanik-Vorlesung behandelt wurde. Man kann es wie folgt formulieren:

¹ Eine umfangreiche Darstellung der speziellen Relativitätstheorie kann im gleichnamigen Vorlesungsskriptum von E. SCHACHINGER gefunden werden, welches von <http://www.itp.tu-graz.ac.at/lectures.html> heruntergeladen werden kann.

Man kann aufgrund mechanischer Experimente keine Aussagen über den Bewegungszustand eines gleichförmig bewegten Systems, in dem man sich befindet, machen.

18.1.2 Prinzip der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit c

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit hat den konstanten Wert

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

Gemäß diesem Prinzip ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit c sowohl vom Bewegungszustand des Beobachters als auch von dem der Lichtquelle völlig unabhängig (bei alleiniger Betrachtung von Inertialsystemen). In jedem Inertialsystem findet man, z.B. für die Ausbreitung der Wellenfront eines Lichtblitzes den Wert c , selbst wenn die Quelle relativ zu diesem System in gleichförmiger Bewegung ist.

Bei der Schaffung der Elektrodynamik zu Ende des vergangenen Jahrhunderts hielt man für die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen ein Medium (den sogenannten Äther) für nötig analog zur Ausbreitung der Schallwellen in Luft, oder einen anderen elastisch deformierbaren Körper.

Außerdem glaubte man (irrigerweise), daß das Relativitätsprinzip notwendigerweise die GALILEI-Transformation nach sich zieht. Daraus schloß man (irrigerweise), daß die Elektrodynamik das Relativitätsprinzip nicht erfüllt und daß es ein ausgezeichnetes Koordinatensystem gibt, das im "Äther" ruht. Man versuchte nun einen "Ätherwind" festzustellen, der dadurch entstehen sollte, daß sich die Erde bei ihrer Revolution um die Sonne relativ zum Äther bewegt.

Die Messung der Schallgeschwindigkeit kann im Prinzip auf einer Meßstrecke erfolgen mit einer Nachrichtenübermittlung mittels elektrischer oder optischer Signale (deren Geschwindigkeit c groß gegenüber der zu messenden Schallgeschwindigkeit ist) vom Anfang zum Ende der Strecke (Messung der "Einweggeschwindigkeit"). Ein derartiges Vorgehen ist bei der Messung der Vakuumlichtgeschwindigkeit c nicht möglich, da man keine Art von Signalen kennt, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit groß gegen c ist. Man ist daher gezwungen, das Lichtsignal, dessen Ausbreitungsgeschwindigkeit gemessen werden soll, am Ende der Messtrecke zu reflektieren und kann daher nur die Laufzeit für Hin- und Rückweg messen ("Zweiweggeschwindigkeit").

Das wichtigste der diesbezüglichen Experimente war der MICHELSON-Versuch: Im Äther ist die Lichtgeschwindigkeit gemäß der damaligen Ansicht $= c$, für andere Systeme muß man gemäß den Galilei-Transformationen umrechnen, (Abb. (18.1)a). Der gesamte Meßapparat bewegt sich relativ zum Äther mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} . Ein Beobachter im mitbewegten System S' stellt folgende Laufzeit t_2 für den Weg PS_2P fest (P = Position des halbdurchlässigen Spiegels, siehe Abb. (18.1)b):

$$t_2 = \frac{l_2}{c - v} + \frac{l_2}{c + v}$$

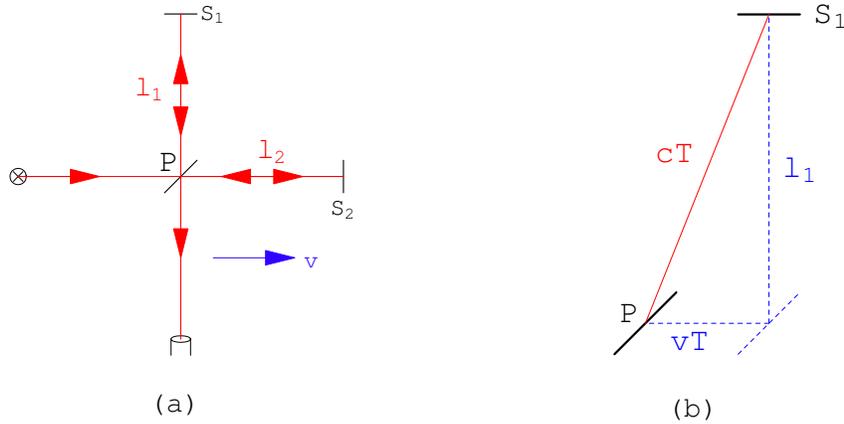


Abbildung 18.1: a) Der Michelsonversuch. b) Lichtweg bei Reflexion an S_1 . \vdots

Ebenso ergibt sich im mitbewegten System aus

$$c^2 T^2 = v^2 T^2 + l_1^2,$$

$$T^2(c^2 - v^2) = l_1^2 \Rightarrow T = \frac{l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

folgende Zeit t_1 für den Lauf PS_1P (Abb. (18.1)b):

$$t_1 = 2T = 2 \frac{l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Aus den beiden Laufzeiten

$$t_2 = (c + v + c - v) \frac{l_2}{c^2 - v^2} = 2 \frac{l_2 c}{c^2 - v^2} = 2 \frac{l_2/c}{1 - \beta^2}$$

$$t_1 = 2 \frac{l_1/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

mit

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{18.1}$$

ergibt sich folgender Zeit- und damit auch Phasenunterschied im Beobachtungsfernrohr:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c} \left[\frac{l_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{l_2}{1 - \beta^2} \right].$$

Ist der Apparat um 90° verdreht, ergeben sich folgende Änderungen und folgender Laufzeit- und Phasenunterschied:

$$l_1 \rightarrow l_2, \quad t_1 \rightarrow t'_1 = t_2, \quad t_2 \rightarrow t'_2 = t_1,$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2}{c} \left[\frac{l_1}{1 - \beta^2} - \frac{l_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right].$$

Wird nun das Interferometer während des Beobachtungsvorganges gedreht, sollte dadurch folgender Laufzeit- und damit auch Phasenunterschied resultieren:

$$\begin{aligned}\tau &= \Delta t' - \Delta t = \frac{2}{c} \left[\frac{l_1}{1 - \beta^2} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{l_2}{1 - \beta^2} - \frac{l_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] \\ \tau &= 2 \frac{l_1 + l_2}{c} \left[\frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right].\end{aligned}\tag{18.2}$$

Der unerwartete Nulleffekt konnte nur durch eine zusätzliche Hypothese (**FIZGERALD, LORENTZ**) erklärt werden: Bei Bewegung relativ zum Äther verkürzen sich Längen in der Bewegungsrichtung um den Faktor $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$; Längen in den transversalen Richtungen bleiben unverändert. Dann erhält man in den obigen Gleichungen für

$$l_1 = l_2 : \quad \Delta t = \Delta t' = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = 0.$$

Damit sind aber noch nicht alle Schwierigkeiten beseitigt; um den negativen Ausgang weiterer Experimente deuten zu können, waren noch zusätzliche Hypothesen über die Zeitdilatation und die Veränderung der Kräfte bei Bewegung relativ zum Äther erforderlich. Der Äther wird damit unbeobachtbar.

EINSTEIN vereinfachte 1905 die Situation in radikaler und revolutionärer Weise, indem er den Äther für die Lichtausbreitung für unnötig erklärte und die Gültigkeit des Relativitätsprinzips für alle physikalischen Vorgänge forderte. Weiters postulierte er, daß die Vakuumlichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen den Wert c hat. Er analysierte den Begriff der Gleichzeitigkeit und zeigte, daß jedes Inertialsystem seine eigene Zeit hat und daß Zeitangaben von einem System ins andere mittels der **LORENTZ-Transformation** durchgeführt werden müssen.

18.2 Die LORENTZtransformationen

System S : Koordinaten x_i , ($i = 1, 2, 3$), Zeit t ;

System S' : Koordinaten x'_i , ($i = 1, 2, 3$), Zeit t' .

Zur Vereinfachung der Berechnung seien die beiden Koordinatensysteme parallel und die Geschwindigkeit \mathbf{v} des Ursprungs von S' liege in der x_1 -Achse von S :

$$v_i = v\delta_{1i}.\tag{18.3}$$

Zur Zeit $t = t' = 0$ sollen die Ursprünge $x_i = x'_i = 0$ zusammenfallen und zu dieser Zeit werde ein Lichtblitz vom Ursprung ausgesandt. Zur in S gemessenen Zeit t ist die Wellenfront in $r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i x_i} = \sqrt{x_i x_i} = ct$ angekommen. (Hier wurde die sogenannte **EINSTEINSche Summenkonvention** eingeführt: Über zweifach auftretende Indizes wird summiert, in diesem Fall also über den Index i .) Es gilt dann:

$$c^2 t^2 - x_i x_i = 0.\tag{18.4}$$

Diese Gleichung muß in jedem Inertialsystem gelten, also S' ($c' = c$):

$$c^2 t'^2 - x'_i x'_i = 0. \quad (18.5)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird nun $x_0 = ct$ und $x'_0 = ct'$ gesetzt. Man fordert weiters das Bestehen der linearen Transformation:

$$x'_\alpha = \sum_{\beta=0}^3 a_{\alpha\beta} x_\beta. \quad (18.6)$$

zwischen S und S' . Für das bestehen einer solchen linearen Transformation sprechen folgende Tatsachen:

1. Die Homogenität und Isotropie des freien Raumes.
2. Die Bewegung eines kräftefreien Teilchens relativ zu einem Inertialsystem wird durch eine lineare Gleichung in den x_i beschrieben. Dies muß für jedes Inertialsystem gelten. Die obige Transformation aus einem Inertialsystem in ein anderes muß daher eine lineare Gleichung wieder affin in eine solche transformieren.

Bei unserer Wahl der Bewegungsrichtung gilt:

$$x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad (18.7)$$

d.h.: wir können von den Koordinaten x_2 und x_3 völlig absehen und die weiteren Überlegungen in der (x_0, x_1) -Ebene durchführen:

$$x'_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1, \quad (18.8)$$

$$x'_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1. \quad (18.9)$$

Setzt man diese Gln. in die sich aus Gln. (18.4) und (18.5) ergebende Bedingung ein, so folgt:

$$\begin{aligned} x_0'^2 - x_1'^2 &= [x_2'^2 + x_3'^2 = x_2^2 + x_3^2] = x_0^2 - x_1^2, \\ (a_{00}^2 - a_{10}^2)x_0^2 - 2(a_{10}a_{11} - a_{00}a_{01})x_0x_1 + (a_{01}^2 - a_{11}^2)x_1^2 &= x_0^2 - x_1^2, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{00}^2 - a_{10}^2 = 1, \quad a_{10}a_{11} - a_{00}a_{01} = 0, \quad a_{01}^2 - a_{11}^2 = -1$$

diese Gleichungen sollen für beliebige x_0, x_1 gelten. Die erste Gleichung der letzten Zeile wird durch den nachfolgenden Ansatz befriedigt:

$$a_{00} = \cosh u, \quad a_{10} = \sinh u;$$

aus der zweiten folgt:

$$\begin{aligned} a_{10}/a_{00} &= a_{01}/a_{11} = \tanh u, \\ a_{01} &= \rho \sinh u, \quad a_{11} = \rho \cosh u, \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich wegen der dritten:

$$\rho^2 = 1, \quad \rho = \pm 1.$$

Es wird $\rho = 1$ gewählt. (Für $\rho = -1$ erhalte man aus (18.8) und (18.9) eine Transformationsgleichung, bei der entweder die Zeit umgekehrt und/oder das Rechtssystem im Raum in ein Linkssystem transformiert werden würde.) Es ist also:

$$x'_0 = x_0 \cosh u + x_1 \sinh u, \quad (18.10)$$

$$x'_1 = x_0 \sinh u + x_1 \cosh u. \quad (18.11)$$

Der Ursprung von S' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu S und hat also Koordinaten [Gl. (18.3)]:

$$\beta = v/c, \quad x'_1 = 0, \quad x_1 = \beta x_0. \quad (18.12)$$

Damit folgt aus obigen Transformationsgleichungen:

$$0 = x_0 \sinh u + x_0 \beta \cosh u, \quad \tanh u = -\beta < 1,$$

und durch Umrechnung:

$$\begin{aligned} \cosh u &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma, \\ \sinh u &= \frac{\tanh u}{\sqrt{1 - \tanh^2 u}} = \frac{-\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\beta\gamma. \end{aligned}$$

Damit haben wir die **LORENTZ-Transformation** für eine Bewegung längs der x_1 -Achse mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ abgeleitet:

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1), & ct' &= \frac{ct - v/cx_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & (a) \\ x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta x_0), & x'_1 &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & (b) \\ x'_2 &= x_2, & x'_2 &= x_2, & (c) \\ x'_3 &= x_3, & x'_3 &= x_3. & (d) \end{aligned} \quad (18.13)$$

Die inversen Transformationen erhält man durch Auflösung des obigen Gleichungssystems, einfacher noch durch Anwendung des Relativitätsprinzips (**Wechsel des Systems ist gleichbedeutend mit Umkehr der Geschwindigkeit**):

$$\beta \rightarrow -\beta, \quad x'_i \rightarrow x_i, \quad x_i \rightarrow x'_i;$$

$$ct = \frac{ct' + \beta x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (18.14a)$$

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (18.14b)$$

$$x_2 = x'_2, \quad (18.14c)$$

$$x_3 = x'_3. \quad (18.14d)$$

Zusammen mit den Rotationen (siehe Sec. 18.5) bilden LORENTZ-Transformationen eine Gruppe. Alle physikalischen Größen transformieren sich gemäß diesen Transformationsgleichungen.

Das augenscheinlichste Ergebnis dieser neuen Transformationsgleichungen ist, daß die Zeit keine Invariante mehr ist. Als Grenzfall für $v \ll c$ und $\beta \ll 1$ enthalten obige Gleichungen die GALILEI-Transformationen.

18.3 Folgerungen aus den LORENTZ-Transformationen und deren Überprüfung

Für einen Beobachter \mathcal{B} in S ist S das "Ruhesystem" und S' das "bewegte System"; für einen Beobachter \mathcal{B}' in S' verhält es sich gerade umgekehrt. Wir nehmen von den obigen LORENTZ-Transformationen nur die Gleichung für die zur Systembewegung parallele Komponente und die Zeit:

$$\beta = \frac{v}{c} < 1, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} > 1,$$

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt), \quad (\text{a}) \quad x_1 = \gamma(x'_1 + vt'), \quad (\text{b}) \quad (18.15)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_1\right), \quad (\text{a}) \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'_1\right). \quad (\text{b}) \quad (18.16)$$

18.3.1 Relativierung des Begriffes der Gleichzeitigkeit

In jedem System werden alle Uhren untereinander synchronisiert. Das kann man Z.B. so machen: Zur Zeit $t = t' = 0$ wird vom Ursprung $x_i = x'_i = 0$ ein Lichtblitz ausgesendet. In jedem System befindet sich bei jeder Uhr ein Spiegel, der den Lichtblitz zum Ursprung reflektiert. Die Hälfte der ganzen Laufzeit ist dann die Zeit, die die Uhr in dem Moment anzeigen muß, als bei ihr der Lichtblitz eingetroffen ist.

\mathcal{B}' stellt fest, daß zwei Ereignisse an verschiedenen Orten seines Systems gleichzeitig eingetreten sind:

$$\begin{aligned} (x'_0, x'_1)_A &= (0, 0), \\ (x'_0, x'_1)_B &= (0, a') \end{aligned}$$

Um festzustellen, dass diese sich in zwei unterschiedlichen Punkten eintretenden Ereignissen muss Information übertragen werden. Z.B. können diese Ereignisse durch das Aufblitzen von Lichtern signalisiert werden, und diese Lichtblitze treffen bei dem in $x'_1 = a'/2$ befindlichen Beobachter \mathcal{B}' gleichzeitig ein.

Gemäß Gln. (18.15)b und (18.16)b gilt dann für den Beobachter \mathcal{B} in S :

$$\begin{aligned} (x_0, x_1)_A &= (0, 0), \\ (x_0, x_1)_B &= \gamma(\beta a', a'). \end{aligned}$$

Dem Beobachter \mathcal{B} erscheinen die beiden Ereignisse also nicht gleichzeitig. Wenn, umgekehrt, \mathcal{B} zwei Ereignisse an verschiedenen Orten gleichzeitig erscheinen, so sind diese für \mathcal{B}' nicht gleichzeitig. **Gleichzeitigkeit ist also ein Begriff, der jeweils nur in einem System Sinn hat, und ist somit keine Invariante der Transformationsgruppe.**

18.3.2 Zeitdilatation

Wir betrachten zwei Ereignisse, die im Ursprung von S' ($x'_i = 0$) zu den Zeiten $t' = 0$ und $t' = \Delta t'$ stattfinden (etwa Ablesen einer Uhr, die sich im Ursprung befindet). \mathcal{B}' mißt:

$$\begin{aligned}(x'_0, x'_1)_A &= (0, 0), \\ (x'_0, x'_1)_B &= (c\Delta t', 0).\end{aligned}$$

\mathcal{B} in S hingegen mißt für die beiden Ereignisse:

$$\begin{aligned}(x_0, x_1)_A &= (0, 0), \\ (x_0, x_1)_B &= \gamma(c\Delta t', v\Delta t').\end{aligned}$$

Daß \mathcal{B} für die beiden Ereignisse verschiedene Ortskoordinaten mißt, ist aufgrund des Bewegungszustandes von S leicht einsichtig. Daß \mathcal{B} jedoch für den Zeitunterschied die von $\Delta t'$ verschiedene Zeitspanne $\gamma\Delta t'$ mißt, ist ein vom klassischen Standpunkt abweichendes Resultat. Da $\gamma \geq 1$ ist, ist $\Delta t \geq \Delta t'$. Man sagt daher auch: **”Bewegte Uhren gehen langsamer”**. Genau dasselbe stellt \mathcal{B}' für eine in S ruhende Uhr fest; sie ist für \mathcal{B}' eine bewegte Uhr und scheint ihm langsamer zu gehen. Wir schreiben dies in der folgenden Form, weisen aber darauf hin, daß diese Beziehung mit grosser Vorsicht anzuwenden ist; eigentlich sollte man für Zeitumrechnungen immer Gleichung wie in den LORENTZ-Transformationen benutzen.

$$\Delta t_{ruh.} = \gamma \Delta t_{bew.} \quad (18.17)$$

Operationelle Beobachtung der Zeitdilatation

Beobachter \mathcal{B} hat in seinem System längs der x_1 -Achse an allen Orten Uhren aufgestellt und synchronisiert (in seinem System ist ja der Begriff der Gleichzeitigkeit sinnvoll). Die Uhren des Systems S' (dort ruhend) fliegen an denen des Systems S vorbei und werden mit den jeweils gegenüberliegenden Uhren von S verglichen. Dies ergibt zu den Zeitpunkten $t = 0$ bzw. $t = \Delta t$, die in Abb. 18.2 dargestellte Situation. Für einen Uhrenvergleich zum Nachweis der Zeitdilatation benötigt man mindestens 3 Uhren (z.B. in S' in $x'_1 = 0$; in S in $x_1 = 0$ und $x_1 = \ell$).

Experimenteller Nachweis der Zeitdilatation an Myonen

Myonen entstehen beim radioaktiven Zerfall des Pions (π -Mesons). Das Myon könnte als ein **schweres Elektron** bezeichnet werden ($m_\mu = 206 m_e$, $m_\mu c^2 = 106 \text{ MeV}$, mit m_e der Elektronenmasse.); es hat einen radioaktiven Zerfall mit einer **Lebensdauer von $2.2 \mu\text{s}$** :



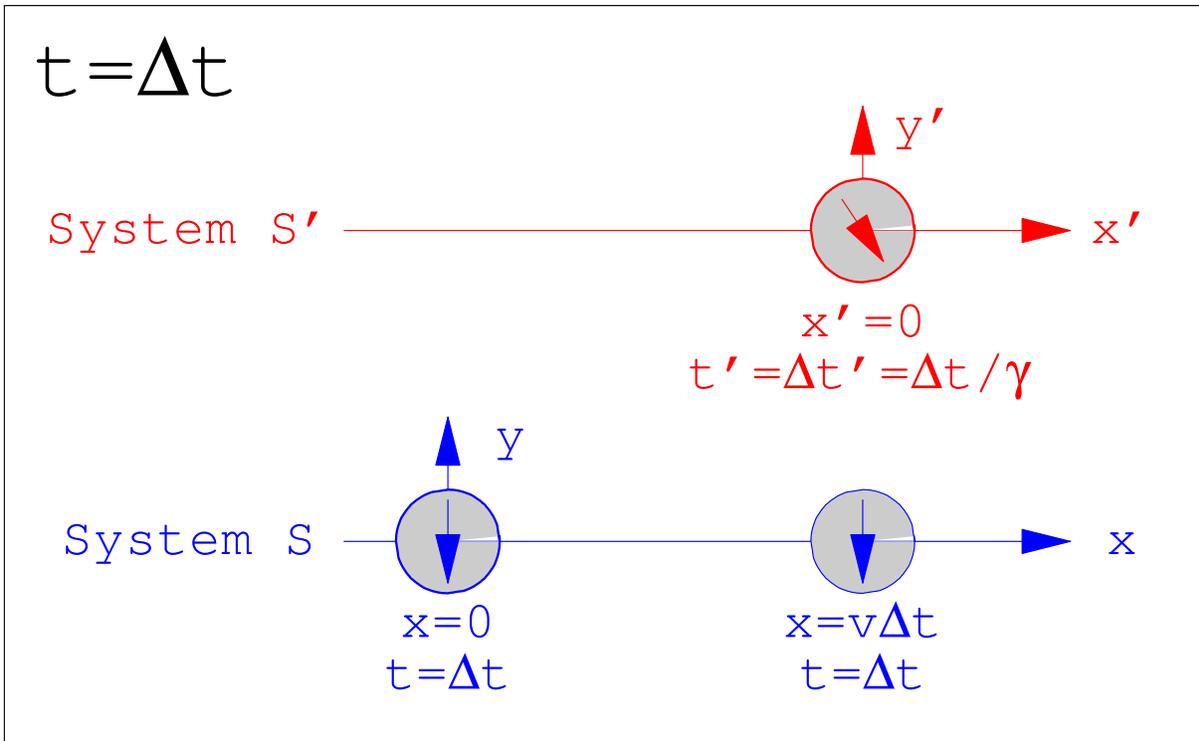
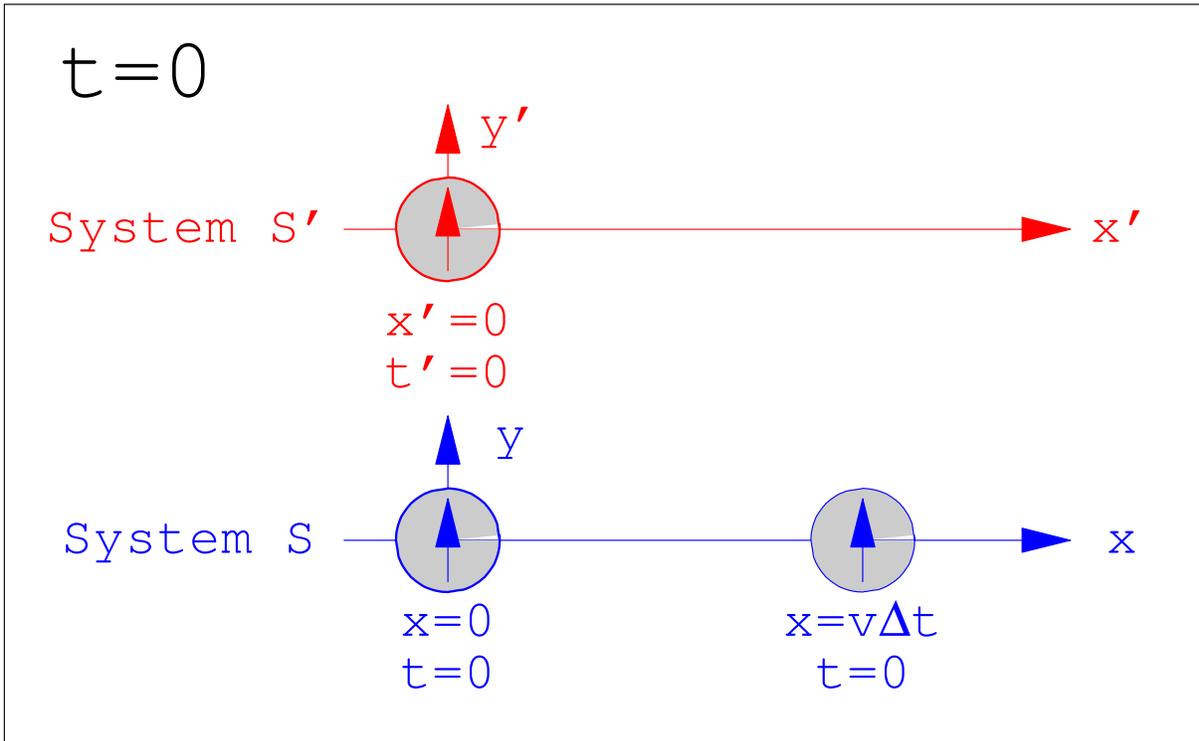


Abbildung 18.2: Zeitanzeigen der Uhren in verschiedenen bewegten Systemen \vdots

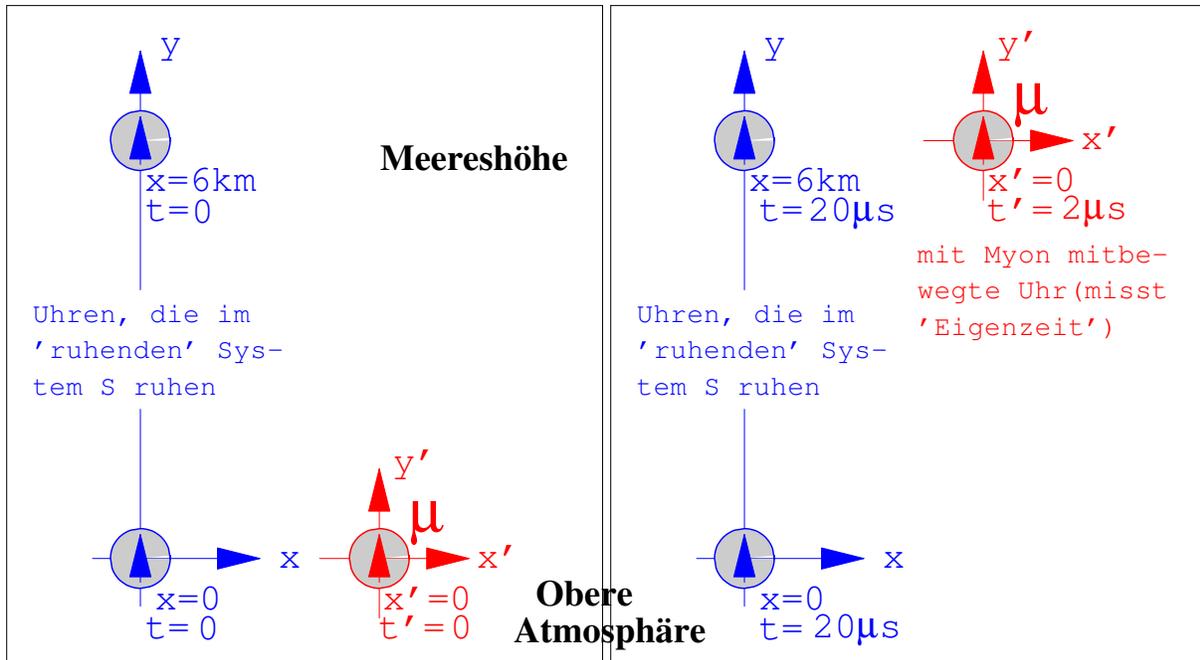
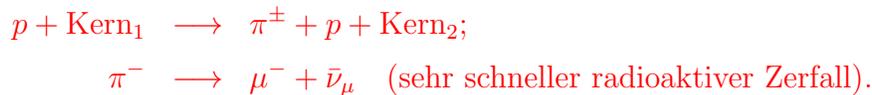


Abbildung 18.3: Myonen in der Atmosphäre

(μ^- symbolisiert ein negativ geladenes Myon, e^- ein Elektron, $\bar{\nu}_e$ ein Antineutrino und ν_μ ein μ -Neutrino.) Das Pion wird mittels einer Kernreaktion erzeugt:



(p symbolisiert hier ein Proton.) Myonen werden von einfallenden Teilchen der kosmischen Höhenstrahlung über die obige Pionenreaktion erzeugt und fliegen mit annähernd Lichtgeschwindigkeit weiter und können daher in $\tau_0 = 2.2 \mu\text{s}$ höchstens eine Strecke von 660 m zurücklegen. Man kann die Myonen aber noch in Meereshöhe, also nach einem Flugweg von 6 - 10 km, nachweisen. Die aus der LORENTZ-Transformation folgende Zeitdilatation erklärt diese Erscheinung.

Wenn ein Myon mit $\beta = 0.995$, d.h. $\gamma \approx 10$, fliegt, dann mißt man von der Erde aus anstelle von $\tau'_0 = 2.2 \mu\text{s}$ die längere mittlere Lebensdauer von $\tau_0 = \gamma\tau'_0 = 22 \mu\text{s}$. Diese Zeit reicht aus, um eine Strecke von 6 km zurückzulegen. Dieser Effekt wurde bei Beobachtungen genau untersucht. Wegen des statistischen Charakters des Zerfallsgesetzes ist dieses Experiment nicht so einfach durchzuführen, wie in Abb. 18.3 schematisiert dargestellt wurde. Es wurden die Myonenzahlen in verschiedenen Höhen registriert und daraus die Lebensdauer deduziert.²

Zwillingsparadoxon, Uhrenparadoxon

Zwei Uhren, eine fliegt im Raumschiff mit, die andere bleibt auf der Erde. (Von der Wirkung des Gravitationsfeldes auf die Uhr, die im Rahmen der allgemeinen Relativitäts-

²siehe J. H. SMITH, *Theory of Relativity* (Benjamin 1965), §3.5).

theorie behandelt werden kann, wird abgesehen.) Das Raumschiff beschleunigt bis nahe an c und fliegt gleichförmig bis zu einem die Strecke $c T_L = d_{\text{Erde}}$ entfernten Himmelskörper, kehrt dort um und fliegt gleichförmig wieder zurück. Ein Beobachter, der am Startpunkt der Rakete in Ruhe zurückbleibt, mißt folgende Flugzeit:

$$T_{\text{Erde}} = \frac{T_L c}{v} + \dots = \frac{T_L}{\beta} + \dots \quad (\text{Effekte der Beschleunigung})$$

bis zum Eintreffen des Raumschiffes am Zielpunkt. Ein Beobachter im fliegenden Raumschiff liest von seiner Uhr die Zeit (= Eigenzeit)

$$T_0 = \frac{T_{\text{Erde}}}{\gamma} = \frac{T_L}{\gamma\beta}$$

ab. Da $\gamma \geq 1$ ist, scheint für ihn die Zeit langsamer vergangen zu sein. Wenn der Raumfahrer zurückkehrt, **wird er weniger gealtert sein**, als sein auf der Erde zurückgebliebener Zwillingsbruder (von Wirkungen des Gravitationsfeldes abgesehen). Ein Beispiel:

$$\text{Erde} \longrightarrow \alpha\text{-Centauri} : T_L = 4.5 \text{ Jahre.}$$

Annahme: $\beta = 0.9 \rightarrow \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 1/0.435$

$$T_0 = \frac{T_L}{\gamma\beta} = 0.435 \cdot 1.11 \cdot T_L = 0.485 T_L.$$

Im System des Raumfahrers zeigt die Uhr also nur etwa halb so viel Zeit, wie das Licht zur Bewältigung dieser Strecke braucht.

$$T_{\text{Erde}} = \frac{T_L}{\beta} = 1.11 T_L.$$

Für den auf der Erde verbliebenen Zwillingsbruder vergeht also währenddessen die 1.11-fache Zeit, die das Licht braucht, um von α -Centauri zur Erde zu gelangen.

Die Anwendung der Speziellen Relativitätstheorie ist in diesem Falle eigentlich nicht gerechtfertigt, da Beschleunigungen auftreten. Die Behandlung obigen Vorganges nach der Allgemeinen Relativitätstheorie führt jedoch zum selben Ergebnis.³

Das g-2-Experiment am Myonspeicherring bei CERN

Die Zeitdilatation kann auch beim g-2 Experiment im Myonspeicherring beobachtet werden. Das Myon hat ein magnetisches Moment $\propto g$; dieses präzediert im Magnetfeld des Speicherringes (siehe Abb. 18.5a). Die Präzessionsgeschwindigkeit gestattet es, die Größe von g und damit des magnetischen Moments zu bestimmen. Die Präzession kann beobachtet werden, weil die Emission der Elektronen bzw. Positronen e^+ beim Zerfall des Myons

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu.$$

eine Vorzugsrichtung in Richtung des magnetischen Momentes hat. Die emittierten Elektronen bzw. Positronen werden mit Zählern registriert. Aus der Abnahme der Zählrate

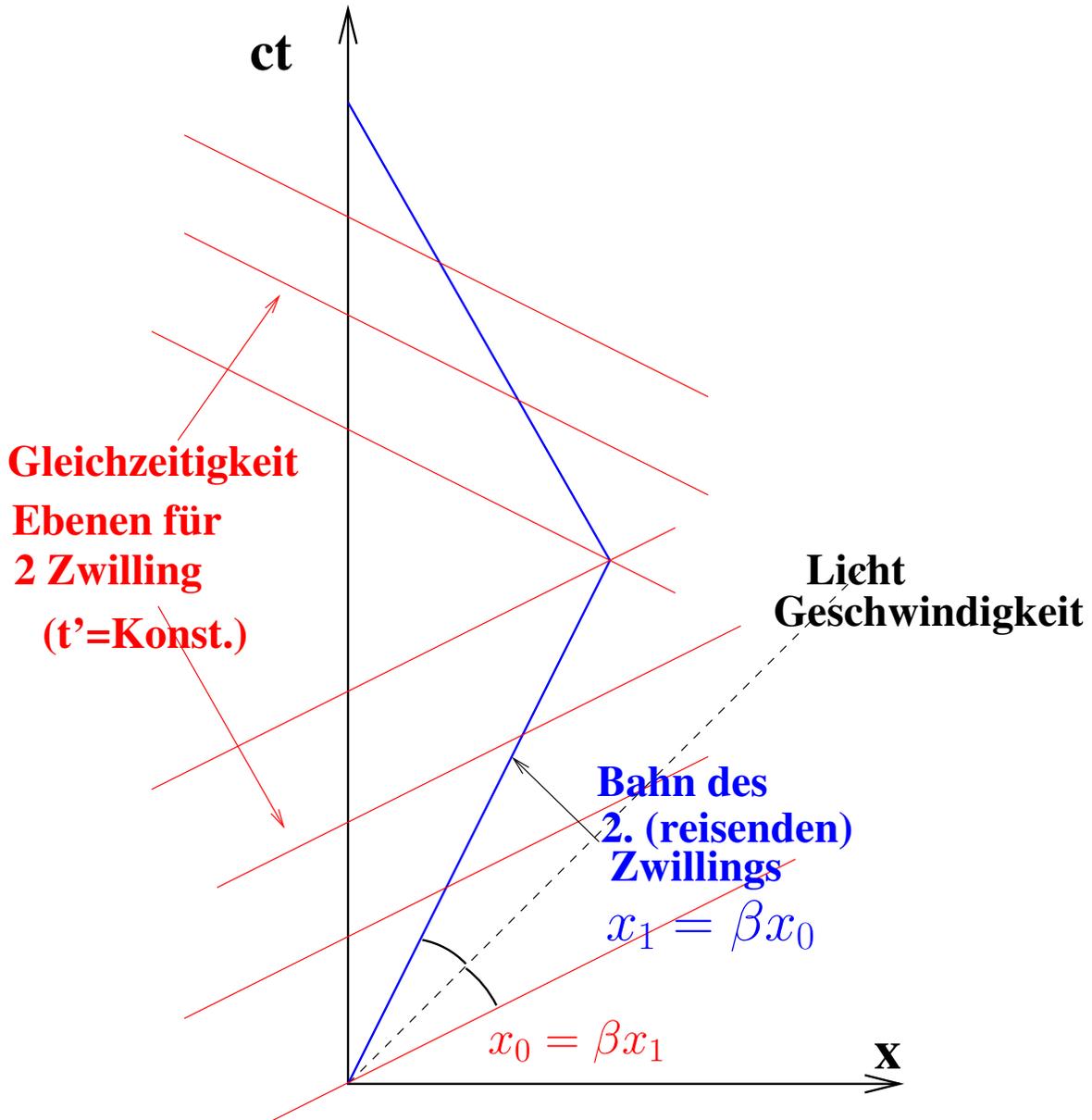


Abbildung 18.4: Minkowski Diagramm für die Reise des zweiten Zwillings im Referenzsystem des ersten (ruhenden) Zwillings. Es erklärt die Asymmetrie zwischen den auf der Erde bleibenden und den reisenden Zwillings. \vdots

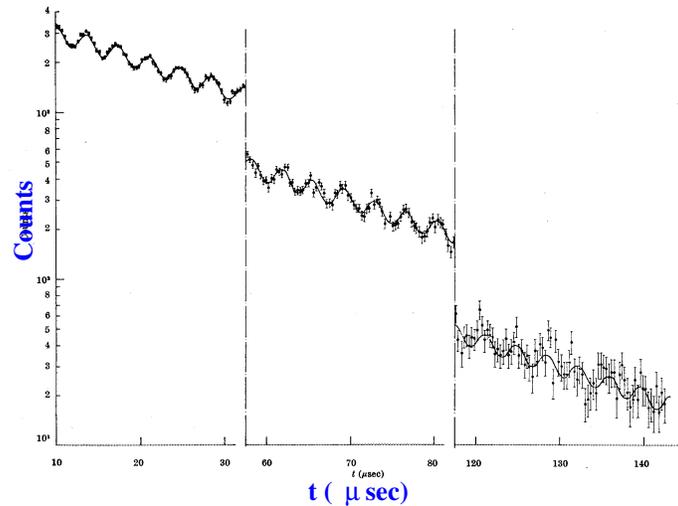
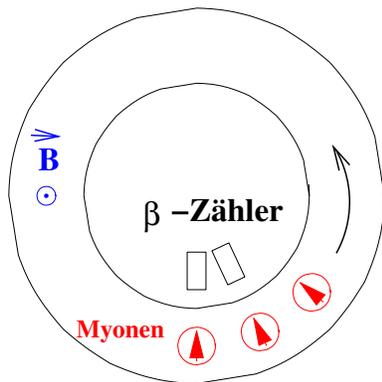


Abbildung 18.5: Der Myon-Speicherring (links). Zählrate der Elektronen bzw. Positronen (rechts)

kann die mittlere Lebensdauer der Myonen nach dem Zerfallsgesetz (18.18) bestimmt werden, aus der 'Modulation' der e -Potenz das gesuchte $g-2$ (siehe Abb. 18.5b). Dieses Problem wäre streng genommen auch nicht nach der speziellen Relativitätstheorie lösbar. Wir setzen in der LORENTZ-Transformation v gleich der Tangentialgeschwindigkeit der umlaufenden Myonen. Für $\gamma = 12.1$ ergibt sich theoretisch eine vom Laborsystem (der Erde) aus gemessene Lebensdauer von $t_0 = \gamma\tau_0 = 12.1 \times 2.2 \mu\text{s} = 26.72 \mu\text{s}$. Gemessen wurde ein Wert von $26.15 \mu\text{s}$. Eine kleine Diskrepanz aufgrund von Meßfehlern.

18.3.3 LORENTZ-Kontraktion

In S' ruht ein Stab der Länge ℓ'_0 , d.h. ein Beobachter in S' beschreibt die Endpunkte A und B des Stabes mit den Koordinaten:

$$x'_{1A} = 0 \quad \text{und} \quad x'_{1B} = \ell'_0.$$

Ein Beobachter \mathcal{B} in S mißt zur Zeit $t = 0$ für die beiden Endpunkte die Koordinaten

$$x_{1A} = \frac{x'_{1A}}{\gamma} = 0 \quad \text{und} \quad x_{1B} = \frac{\ell'_0}{\gamma}.$$

\mathcal{B} sagt, der Maßstab habe eine Länge $\ell_0 = \ell'_0/\gamma$, sei also aufgrund der Bewegung verkürzt (LORENTZ-Kontraktion)

$$\ell_0 = \frac{\ell'_0}{\gamma} = \ell'_0 \sqrt{1 - \beta^2} < \ell'_0. \quad (18.19)$$

Bei ausgedehnten Körpern muß man zusätzlich beachten, daß die von vom Beobachter weiter entfernten Punkten des Körpers ausgehenden Lichtstrahlen erst später eintreffen als die von näher gelegenen Teilen. Dadurch würde ein solcher Körper verzerrt bzw. verdreht erscheinen.

³siehe M. BORN *Die Relativitätstheorie Einsteins* (Heidelberger Taschenbuch).

18.3.4 Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Ein System S' bewege sich mit Geschwindigkeit $v < c$ relativ zu S . Ein Objekt O bewege sich mit Geschwindigkeit $u < c$ relativ zu S' . Dann ist die Summe $u+v$ und kann im Prinzip größer als c sein. Da aber auch O die Grenzggeschwindigkeit c nicht überschreiten kann, kann die obige Addition der Geschwindigkeiten nicht richtig sein. Tatsächlich liegt ein Trugschluß vor; dieser wird nur vermieden, wenn man bei jedem Wert der Geschwindigkeit die Zeit des betreffenden Systems benutzt.

Das System S' und das Objekt O , bewegen sich in x -Richtung:

- S' relativ zu S mit Geschwindigkeit v ;
- O in S' mit Geschwindigkeit u , also seine Raumkoordinate ist $x'_1 = u/c x'_0$;
- Sei w die Geschwindigkeit von O im System S (zur Vereinfachung benutzen wir zunächst Einheiten mit $c = 1$):

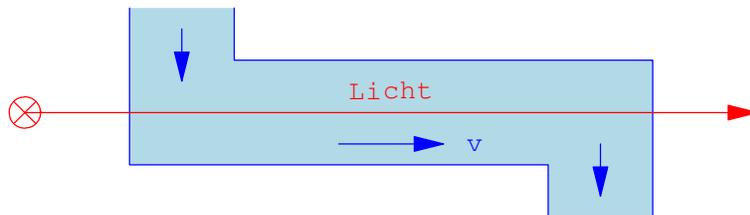
$$w = \frac{x_1}{x_0} = \frac{\gamma(x'_1 + vx'_0)}{\gamma(x'_0 + vx'_1)} = \frac{ux'_0 + vx'_0}{x'_0 + vux'_0} = \frac{u + v}{1 + uv}$$

Damit lautet das Additionstheorem für die (gleichgerichteten) Geschwindigkeiten:⁴

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} \tag{18.20}$$

Es gilt also nicht mehr das vektorielle Addieren von Geschwindigkeiten wie in der klassischen Mechanik. Auch folgt daraus, daß die resultierende Geschwindigkeit immer kleiner ist als c , wenn nur u und v kleiner als c sind. (Z.B.: $u = v = 0.9c \Rightarrow w = \frac{1.80}{1.81}c < c$.)

Eine experimentelle Überprüfung des obigen Additionstheorems ergibt sich aus dem **FIZEAUSCHEN MITFÜHRUNGSVERSUCH**:



Eine Flüssigkeit mit Brechungsindex n fließt mit Geschwindigkeit v . In der ruhenden Flüssigkeit ist die Lichtgeschwindigkeit $u = c/n$. Die Lichtgeschwindigkeit im Labor (bei fließendem Wasser) beträgt⁵:

$$w = \frac{v + \frac{1}{n}}{1 + v\frac{1}{n}} = \left(v + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{v}{n} + O(v^2)\right) = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + O(v/c)^2$$

in Übereinstimmung mit dem Experiment.

⁴ Aus Dimensionsüberlegungen kann man leicht Einheiten mit $c \neq 1$ wiedereinführen.

⁵die Rechnung wird zunächst in Einheiten mit $c = 1$ durchgeführt. Einheiten mit $c \neq 1$ werden in das Endergebnis wiedereingeführt.

18.4 Das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum

Das Ziel dieses Abschnittes wird es sein, einen Formalismus zu entwickeln, mit dessen Hilfe die Gesetze der Physik auf eine Weise geschrieben werden können, die ihre Invarianz gegen die Lorentz-Transformationen (LT) evident macht. Der erste Schritt führt dabei über die Einführung der *Viererschreibweise*.

Ko- und kovariante Tensoren

Seien ct , x , y und z Koordinaten im Minkowski-Raum. Man definiert ⁶

$$\begin{aligned} x_\mu &:= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r}), & \mu = 0, 1, 2, 3 \\ x^\mu &:= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (18.21)$$

als *kovariante* (x_μ) bzw. *kontravariante* (x^μ) Vierervektoren. Per Konvention steht ein griechischer Index für 0...3, ein lateinischer für 1...3. Die Einstein-Konvention, wie wir sie bisher verwendeten, wird nun eingeschränkt: summiert wird nur noch über gleichnamige Indizes, wenn sie auf verschiedenen Ebenen stehen, d.h.

$$x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = s^2, \quad x^i x_i = \sum_{i=1}^3 x^i x_i .$$

Die Beschaffenheit, d.h. die Geometrie eines Raumes ist durch seine Metrik und damit durch sein Linienelement eindeutig festgelegt. Es gilt

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (18.22)$$

Metrischer Tensor

Im euklidischen vierdimensionalen Raum lautet die Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

Im Minkowski-Raum hat man dagegen

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (18.23)$$

Mit dieser Metrik ist es möglich, Indizes zu heben bzw. zu senken und damit kontravariante in kovariante Vektoren zu verwandeln und umgekehrt. Es gilt

⁶WARNUNG: Die Vorzeichen in den (18.21) (und auch unten z.B. in (18.24),(18.30) und andere), sowie die Bezeichnung kontra- vs kovariant sind im Vergleich zur Standardkonvention und zu früheren Skripten vertauscht. Der Grund ist dass wir mit dem Rest der Vorlesung konsistent bleiben möchten und z.B. $x_3 = z$ und nicht $x_3 = -z$ haben wollen.

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{und} \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu ,$$

wobei $g^{\mu\nu}$ die zu $g_{\mu\nu}$ inverse Metrik darstellt. Es gilt $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ und

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda = \begin{cases} 0 & \mu \neq \lambda \\ 1 & \mu = \lambda \end{cases}$$

Transformationseigenschaften

Wie transformieren sich nun allgemeine Vektoren beim Übergang in ein anderes Koordinatensystem? Was macht überhaupt einen kontravarianten Vektor aus? Man betrachte beliebige ko- bzw. kontravarianten Vierervektoren

$$\begin{aligned} A_\mu &= (A_0, A_1, A_2, A_3) \\ A^\mu &= (A_0, -A_1, -A_2, -A_3) . \end{aligned} \quad (18.24)$$

Man kann auch kompakter schreiben

$$\begin{aligned} A_\mu &= (A_0, \mathbf{A}) \\ A^\mu &= (A_0, -\mathbf{A}) . \end{aligned} \quad (18.25)$$

Es sei ein Vektorfeld A_μ in den Koordinatensystem mit Koordinaten x_μ gegeben. Durch eine LT werde nun der Übergang zu neuen Koordinaten x'_μ vermittelt. **Die kontra- bzw. kovariante Eigenschaft eines Vektors ist nun durch sein Transformationsverhalten in das neue System festgelegt:**

$$\text{kovarianter Vektoren} \quad A'_\mu = \left(\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \right) A_\nu \quad (18.26)$$

transformieren wie die Koordinaten (diejenige „ohne Minus Zeichen“ in (18.21)): diese Form gilt offensichtlich wenn $A_\mu = x_\mu$.

$$\text{Kontravarianter Vektoren} \quad B'^\mu = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) B^\nu \quad (18.27)$$

transformieren wie „kontra“-Koordinaten (diejenige „mit Minus Zeichen“ in (18.21)).

Invarianz des Skalarproduktes

Eine zentrale Forderung dieses Formalismus soll die Invarianz des Skalarproduktes $B^\mu A_\mu$ gegen LT sein. Die Motivation für diese Forderung ist offensichtlich: Minkowski-Abstände sollen unabhängig vom Koordinatensystem sein. Das gibt also:

$$B'^\mu A'_\mu = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) B^\nu \left(\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda} \right) A_\lambda \stackrel{!}{=} \delta_\nu^\lambda B^\nu A_\lambda = B^\nu A_\nu$$

(die Stellung der Indizes am Kroneckersymbol wird später noch klar). Das führt zu

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda} = \delta_\nu^\lambda$$

was nach den Kettenregel gilt wenn

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\mu}} . \quad (18.28)$$

Das legt die Beziehung zwischen den obigen ko- und kontra-varianten Transformationen (18.26) und (18.27) fest.

Hinweis: Den Skalarprodukt kann man kompakt mit Hilfe des Formalismus (18.25) durchführen:

$$B_{\nu}A^{\nu} = (B_0, \mathbf{B}) \cdot (A_0, -\mathbf{A}) = B_0A_0 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (18.29)$$

Dieser Skalarprodukt ist **invariant unter Lorentz transformationen**

Transformation von Ableitungen

Den nächsten Schritt bildet die Untersuchung des Transformationsverhaltens von Ableitungen. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

wo wir (18.28) verwendet haben. Aus (18.27) kann man also folgende allgemeine Regel aufstellen:

Die Ableitungen nach kontra/ko-varianten Koordiaten transformieren sich wie ko/kontra-variante Vektoren.

Für die Formulierung von Ableitungen hat sich in der SRT eine abkürzende Schreibweise durchgesetzt:

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right), & \text{mit} & \quad -\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ \partial^{\mu} &\equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \nabla \right), & \text{mit} & \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) . \end{aligned} \quad (18.30)$$

Wellengleichung

Nun ist es möglich, die *Viererddivergenz* zu definieren:

$$\partial_{\mu}A^{\mu} = \frac{\partial A_0}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} . \quad (18.31)$$

Oder ähnlich wie in (18.29):

$$\partial_{\mu}A^{\mu} = (\partial_0, -\nabla) \cdot (A_0, -\mathbf{A}) = \partial_0A_0 + \nabla \cdot \mathbf{A} . \quad (18.32)$$

Durch zweimalige Anwendung dieses Operators bekommt man eine elegante Schreibweise für den d'Alembert-Operator:

$$\square := \partial_{\mu}\partial^{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 .$$

Damit ist die *Wellengleichung* Lorentz-invariant.

Raum- und zeitartige Abstände

Ereignisse $\mathbf{x}(t)$ werden durch Vektoren im Minkowski-Raum beschrieben. Zwei Ereignisse

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad y_\mu = (y_0, y_1, y_2, y_3)$$

nennt man raum- bzw./zeitartig wenn sie sich durch ein Signal nicht-/verbinden lassen, also

$$(x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu) = \begin{cases} < 0 : & \text{raumartig} \\ > 0 : & \text{zeitartig} \end{cases}$$

Zwei ‘gleichzeitige’ Ereignisse (im Laborsystem) mit $x_0 = y_0$ sind also raumartig. Wegen der Invarianz des Skalarproduktes ist die Raum- bzw. die Zeitartigkeit unabhängig vom Bezugssystem (nicht jedoch die ‘Gleichzeitigkeit’).

Die Vierergeschwindigkeit

Aufgrund der Zeitdilatation ist es nicht so einfach, einen Ausdruck für eine Geschwindigkeit hinzuschreiben - nach welcher Zeit soll die Bahnlinie abgeleitet werden? Von besonderer Bedeutung ist hier der **Begriff der Eigenzeit**. Sie bezeichnet die Zeit τ , die eine Uhr anzeigt, die mit dem bewegten Körper fest verbunden ist, d.h. mit ihm bewegt wird. Benennt man mit t die Zeit im Ruhesystem des Beobachters, dann gilt $d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2}$ (mit $\beta = v/c$), also

$$d\tau^2 = dt^2(1 - \beta^2) = \frac{1}{c^2} \left[(c dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \right] = \frac{ds^2}{c^2}, \quad (18.33)$$

und damit ist die Eigenzeit *invariant* unter LT, genau wie das Lorentz-invariante Linienelement ds . Man hat also eine Zeit, welche zur Definition eines Geschwindigkeitsbegriffes geeignet ist. Somit definiert man die *Vierergeschwindigkeit* u_μ als

$$\boxed{u_\mu := \frac{dx_\mu}{d\tau}}, \quad u_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(c, \mathbf{v}),$$

also

$$u_0 = \frac{d(ct)}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad u_1 = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = v_x \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{etc.} \quad (18.34)$$

Es ist dann

$$u_\mu u^\mu = \frac{1}{1 - \beta^2} \left[c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2 \right] = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = c^2. \quad (18.35)$$

Die Viererbeschleunigung

Analog zur Vierergeschwindigkeit definiert man die *Viererbeschleunigung*

$$\boxed{b_\mu := \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2}}.$$

Zwischen Vierergeschwindigkeit und -beschleunigung besteht ein besonderer Zusammenhang. Es ist nämlich nach (18.35)

$$0 = \frac{d}{d\tau} \underbrace{(u_\mu u^\mu)}_{=c^2} = \frac{du_\mu}{d\tau} u^\mu + u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = b_\mu u^\mu + u_\mu b^\mu = 2u_\mu b^\mu ,$$

also $b \perp u$ bezüglich der Minkowski-Metrik.

Aus (18.35) ist der Vektor der Vierergeschwindigkeit immer *zeitartig*. Hingegen ist im Ruhesystem des Teilchens ($\beta = 0$)

$$b_0 = \frac{du_0}{d\tau} = c \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{b}}{(1-\beta^2)^{3/2}} = 0 ,$$

also ist b_μ ein *raumartiger Vektor*.

18.5 Lorentz-Transformation im Viererraum: Rotation und Boosts

Im letzten Abschnitt wurde der Übergang zu den Koordinaten eines neuen Inertialsystems x'^μ vollzogen. Wie findet man aber die x'^μ , wenn man die Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme kennt? Die allgemeinste lineare Transformation in ein anderes Koordinatensystem wird durch

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$$

vermittelt. Äquivalent haben wir

$$x'_\mu = L_\mu^\nu x_\nu ,$$

wo

$$L_\mu^\nu = g_{\mu\alpha} g^{\nu\beta} L^\alpha_\beta \quad (18.36)$$

Wir suchen die Bedingungen, denen L^μ_ν genügt. Wegen der Invarianz des Minkowski-Abstandes unter LT ist

$$s^2 = s'^2 = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} L^\mu_\rho L^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma ,$$

also

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} L^\mu_\rho L^\nu_\sigma, \quad g_{\rho\sigma} = (L^T)_\rho^\mu g_{\mu\nu} L^\nu_\sigma . \quad (18.37)$$

Hier erkennt man deutlich die Ähnlichkeit zu orthogonalen Transformationen. Weiterhin gilt

$$\underbrace{\det g}_{=-1} = \underbrace{\det L^T}_{=\det L} \det g \det L \quad \Rightarrow \quad \det L = \pm 1 .$$

Man nennt Transformationen mit

$$\det L = \begin{cases} +1 & \text{eigentliche LT} \\ -1 & \text{uneigentliche LT} . \end{cases}$$

Wir untersuchen im folgenden zwei konkrete Beispiele für L^μ_ν .

Rotationen

Man setzt $L^0_0 = 1$, $L^0_i = L^i_0 = 0$:

$$L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Die Untermatrix R beschreibt dabei eine Rotation, also eine orthogonale Transformation im euklidischen 3d-Unterraum. Wie gewohnt redet man bei

$$\left\{ \begin{array}{l} \det L = \det R = 1 \\ \det L = -1 \end{array} \right\} \text{ von } \left\{ \begin{array}{l} \text{eigentlichen} \\ \text{uneigentlichen} \end{array} \right\} \text{ Rotationen.}$$

Boosts

Die durch L^ν_μ vermittelte Transformation soll in ein mit der Geschwindigkeit v z.B. in x -Richtung bewegtes Inertialsystem führen. Laut den Gleichungen der LT ist (für β in 1-Richtung)

$$x'_0 = \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_1 = \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad (18.38)$$

was zu

$$L^\nu_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18.39)$$

führt. Für *kontravariante* Ortsvektoren lautet das Transformationsgesetz

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu, \quad \text{mit} \quad L^\mu_\nu = g^{\mu\rho} L_\rho^\lambda g_{\lambda\nu},$$

was zu

$$L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (18.40)$$

führt. Drei Rotationen um und drei Boosts entlang der Raumachsen ergeben **sechs unabhängige Parameter für die eindeutige Bestimmung einer LT**. Man sieht das auch auf eine alternative Weise ein. Die 16 Transformationsgleichungen

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} L^\rho_\mu L^\sigma_\nu$$

sind nicht alle unabhängig. Wegen der Symmetrie von $g_{\mu\nu}$ hat man nur zehn unabhängige Gleichungen und damit sechs freie Parameter.

Gruppeneigenschaften

Einige weitere Eigenschaften der LT sind die folgenden:

1.) Die LT bilden eine Gruppe

Bei der Hintereinanderausführung zweier LT ergibt sich wieder eine LT. Diese Gruppe ist aber *nicht kommutativ*, da es sich ja um Matrix-Multiplikationen handelt. Die nächsten beiden Eigenschaften sind Folgen dieser Gruppen-Eigenschaft.

2.) Die Identität ist eine LT

Das ist klar, da sich ein Boost für $\beta = 0$ in die Identität verwandelt.

3.) Zu jeder LT existiert eine Inverse

Die Hintereinanderausführung einer LT und ihrer Inversen führt also zur Identität. Man kann die Inverse direkt angeben. Wie oben gezeigt, gilt

$$g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} L^\rho_\mu L^\sigma_\nu .$$

Damit ist

$$\delta^\lambda_\nu = g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \underbrace{g^{\lambda\mu} g_{\rho\sigma} L^\sigma_\mu L^\rho_\nu}_{=: L^\lambda_\rho} = L^\lambda_\rho L^\rho_\nu .$$

Die gesuchte (Inverse)^T von L^ρ_ν ist also L^λ_ρ

18.6 Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Gauß'sche cgs-System

Für die relativistische Formulierung ist es vorteilhaft, nicht das bisher benützte MKSA-System für die elektromagnetischen Einheiten zu benützen, sondern das Gauß'sche cgs-System. Dazu ersetzt man in den SI-Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\rightarrow \mathbf{B}/c & \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}/c & (18.41) \\ \rho &\rightarrow 4\pi\epsilon_0\rho & \mathbf{j} &\rightarrow 4\pi\epsilon_0\mathbf{j} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{\mu_0 c^2} \end{aligned}$$

Dann haben die Maxwell-Gleichungen im Gauß'schen cgs-System (im Vakuum) die Form:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} &= 0 . \end{aligned} \quad (18.42)$$

Die Lorentz-Kraft lautet im Gauß'schen cgs-System:

$$\mathbf{K} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (18.43)$$

Aus den Potentialen \mathbf{A} und ϕ gewinnt man die physikalischen Felder im cgs-System via

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad (18.44)$$

die Lorenz-Eichung hat die Form

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (18.45)$$

18.7 Ströme, Dichten, Potentiale

Der in den letzten Abschnitten entwickelte Formalismus stellt eine extrem leistungsfähige Methode zur Formulierung der Elektrodynamik dar. Im folgenden werden die Gleichungen der Elektrodynamik so geschrieben, dass sie unter LT forminvariant bleiben.

1.) Die Kontinuitätsgleichung

Die Viererdivergenz (18.31) legt einen Zusammenhang mit der Kontinuitätsgleichung nahe. Nehmen wir zunächst an, dass der Vierervektor

$$j_\mu := (c\rho, \mathbf{j})$$

lautet, so wird die Kontinuitätsgleichung einfach zu

$$\boxed{\partial^\mu j_\mu = 0}, \quad (18.46)$$

Da dies einen Skalar darstellt, ist die Gleichung Lorentz-invariant.⁷

Diese Eigenschaft ist von nun an für *jede* physikalische Gleichung zu fordern. Die Frage ist hier speziell, ob j_μ wirklich ein Vierervektor ist. Dazu muss sich seine nullte Komponente $c\rho$ als zeitartige Variable transformieren. Die im Volumenelement d^3x eingeschlossene Ladung ist ρd^3x . Das Minkowski-Volumenelement d^4x transformiert sich auf folgende Weise:

$$d^4x' = \underbrace{\left| \frac{\partial(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_0, x_1, x_2, x_3)} \right|}_{=|\det L|=1} d^4x = d^4x,$$

also ist d^4x eine Lorentz-Invariante. Andererseits ist wegen der Invarianz der elektrischen Ladung

$$\rho' d^3x' = \rho d^3x. \quad (18.47)$$

Damit ist gezeigt, dass ρ eine zeitartige Variable ist: Sie transformiert wie dx_0 .

⁷Man unterscheide zwischen Lorentz-Invarianz als *Forminvarianz* unter LT (das ist das eigentliche Ziel der Lorentz-invarianten, auch kovarianten genannt, Formulierung) und *Lorentz-Invariante oder Lorentz-Skalare* Größen, die ihren Wert unter LT beibehalten, so wie die linke Seite von (18.46). Hier ist das beides aufgrund der skalaren Eigenschaft von $\partial^\mu j_\mu$ der Fall.

- 2.) Das Viererpotential und die Lorenz-Eichung
Die Lorenz-Eichbedingung lautet

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0 .$$

Mit der Definition des **Viererpotentials**

$$A_\mu := (\phi, \mathbf{A}) \quad (18.48)$$

wird dies zu

$$\partial^\mu A_\mu = \partial_\mu A^\mu = 0 . \quad (18.49)$$

Auch das ist als Skalar wieder invariant unter LT. Das gilt offensichtlich nicht für die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

- 3.) Vektor- und Skalarpotential in Lorenz-Eichung

Die Feldgleichungen für die Potentiale ϕ und \mathbf{A} können nun kompakt hingeschrieben werden. Sie lauten zusammen einfach

$$\square A_\mu = \frac{4\pi}{c} j_\mu . \quad (18.50)$$

18.8 E und B Felder und die Maxwell-Gleichungen

Mit $\partial_\mu = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$ ergibt sich für die x-Komponenten der Felder

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = -(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) \\ B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) \end{aligned} \quad (18.51)$$

Gl. (18.51) legen die Einführung des antisymmetrischen *Feldstärkentensor* nahe:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (18.52)$$

Seine Komponenten erhält man durch Aufteilung in zeitlichen (0) und räumlichen ($i = 1, 2, 3$) Indizes:

$$\begin{aligned} F_{i,0} &= \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = E_i \\ F_{i,j} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk} (-\nabla \times \mathbf{A})_k = -\epsilon_{ijk} B_k . \end{aligned} \quad (18.53)$$

Dies, zusammen mit der Antisymmetriebedingung $F_{\mu,\nu} = -F_{\nu,\mu}$, bestimmt F vollständig. In Matrix Form haben wir also:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \quad (18.54)$$

Seine kontravariante Form erhält man durch

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} F_{\rho\lambda} g^{\lambda\nu} \quad (18.55)$$

Wir können also (18.53), sowie die Tatsache benutzen, dass jeder räumlicher Index ein minus Zeichen erhält. Das ergibt:

$$\begin{aligned} F^{i,0} &= -E_i \\ F^{i,j} &= -\epsilon_{ijk} B_k . \end{aligned} \quad (18.56)$$

In Matrix Form:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \quad (18.57)$$

Aus diesem gewinnt man den sogenannten *dualen* Feldstärketensor $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ über

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} . \quad (18.58)$$

Analog zum dreidimensionalen Fall ist hier der Ricci tensor $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ vollständig bestimmt durch die Definition

$$\epsilon_{0123} = 1 \quad \text{und} \quad \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \text{ ist total antisymmetrisch} \quad (18.59)$$

Man sieht, dass man von $F_{\mu\nu}$ direkt nach $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ gelangt, wenn man \mathbf{B} für \mathbf{E} und $-\mathbf{E}$ für \mathbf{B} einsetzt. Mit diesen Definitionen können die Maxwell-Gleichungen äußerst kompakt aufgeschrieben werden. Wir trennen in inhomogene und homogene Gleichungen.

1.) Die inhomogenen Gleichungen

Sie lauten unter Verwendung des Feldstärketensors einfach

$$\boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu} , \quad (18.60)$$

Beweis: Wir benutzen (18.53) und setzen $c = 1$: Wie oben wird die Gl. (18.60) in seinen räumlichen und seinen zeitlichen Komponenten unterteilt. Die ersteren liefern

$$4\pi j_i = \partial^0 F_{0i} + \partial^l F_{li} = \partial_t(-E_i) - \partial^l \epsilon_{lim} B_m = (\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E})_i , \quad (18.61)$$

also das Ampèrsche Gesetz Die zeitliche Komponente liefert

$$4\pi \rho = \partial^0 F_{00} + \partial^i F_{i0} = \nabla \cdot \mathbf{E} . \quad (18.62)$$

Gl. (18.60) ist konsistent mit der Definition (18.52), in der Tat:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu . \quad (18.63)$$

Der zweite Term verschwindet in der Lorenz-Eichung (18.49), während der erste Term gleich (18.50) ist. Das bestätigt Gl. (18.60).

Beide Seiten von (18.60) haben ein freies Index, also transformieren wie ein Vierervektor unter einer Lorentz-Transformation. Also gilt in jedem anderen Inertialsystem K' die Gleichung

$$\partial'^{\mu} F'_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j'_{\nu} .$$

Aus (18.60) sieht man also, dass die inhomogene Maxwell-Gleichungen *Lorentz-invariant* sind.

2.) Die homogenen Gleichungen

Sie haben die Form

$$\boxed{\partial^{\mu} \mathcal{F}_{\mu\nu} = 0} , \quad (18.64)$$

wobei $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ hier der duale Feldstärketensor ist. Wie sich zeigen lässt, kann man die homogenen Gleichungen auch mit Hilfe des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$ schreiben:

$$\partial_{\mu} F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} F_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda} F_{\mu\nu} = 0 . \quad (18.65)$$

Diese Gleichung heißt auch *Jacobi-Identität* (der Beweis erfolgt einfach durch das Einsetzen der Definition (18.52)).

Da die homogenen Maxwell Gleichungen äquivalent zu den (18.44) sind, dann sind die (18.65) automatisch aus der Definition (18.52) erfüllt.

Beispielsweise bekommt man dann für $\mu = 0$, $\nu = 1$ und $\lambda = 2$ die z -Komponente der Induktionsgleichung wieder:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_z - \frac{\partial}{\partial x} E_y + \frac{\partial}{\partial y} E_x = - \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} \right]_z = 0 .$$

Für $\mu = 1$, $\nu = 2$, und $\lambda = 3$ ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 .$$

18.9 Transformation der Felder

Wenn man schon die Elektrodynamik kovariant formuliert, dann stellt sich die Frage, wie sich elektrische und magnetische Felder bzw. der Feldstärketensor unter Lorentz-Transformationen verhalten. Die universelle Transformationsvorschrift für Tensoren zweiter Stufe lautet

$$F'_{\mu\nu} = L_{\mu}^{\lambda} L_{\nu}^{\rho} F_{\lambda\rho} .$$

Das gestrichene System bewege sich mit der Geschwindigkeit v entlang der x -Richtung. Die zwischen K und K' vermittelnde Transformation ist ein Boost der Form (18.39) und bewirkt, dass im gestrichenen System die Felder folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x \\ E'_y &= (E_y - \beta B_z) / \sqrt{1 - \beta^2}, & B'_y &= (B_y + \beta E_z) / \sqrt{1 - \beta^2} \\ E'_z &= (E_z + \beta B_y) / \sqrt{1 - \beta^2}, & B'_z &= (B_z - \beta E_y) / \sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned} . \quad (18.66)$$

Spätestens hier wird klar, dass elektrisches und magnetisches Feld untrennbar verknüpft sind. Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$, nicht die getrennten Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} , liefert die relativistisch konsequente Beschreibung des elektromagnetischen Feldes. Die korrekte Verallgemeinerung von (18.66) für allgemeine Geschwindigkeiten \mathbf{v} lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \gamma \mathbf{B} - \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - \frac{\gamma}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \\ \mathbf{E}' &= \gamma \mathbf{E} - \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + \frac{\gamma}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

mit

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Zu beachten ist, dass zu einer Transformation in ein neues Bezugssystem immer auch eine Transformation der Raumzeit-Koordinaten gehört, denn andere Koordinaten hat der dortige Beobachter ja nicht zur Verfügung. In K' müssen also die Felder als $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'(\mathbf{x}', t')$ und $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'(\mathbf{x}', t')$ ausgedrückt werden. In den Formeln (18.66) wird diese Tatsache noch nicht berücksichtigt. Die obigen Formeln machen deutlich, dass beispielsweise ein in einem bestimmten Inertialsystem rein magnetisches Feld nicht in allen anderen Inertialsystemen auch rein magnetisch zu sein braucht. Bei der Transformation treten plötzlich elektrische Feldkomponenten auf!

Kapitel 19

Relativistische Mechanik

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen sind invariant unter Galilei-Transformationen, nicht jedoch unter Lorentz-Transformationen. Das Relativitätsprinzip verlangt daher eine Modifikation der Newton'schen Gleichungen, und zwar derart, daß bei Geschwindigkeiten $v \ll c$ die Newton'schen Gleichungen gültig bleiben.

19.1 Impuls und Energie

Wir betrachten zunächst ein freies Teilchen. Seinen Newton'schen Impuls

$$\mathbf{p} = m_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (19.1)$$

erweitern wir zu einem Vierer-Impuls, dessen Komponenten durch

$$p_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{d\tau} = m_0 u_\mu = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} (c, \mathbf{v}) \equiv m (c, \mathbf{v}) \quad (19.2)$$

gegeben sind, wobei τ die Eigenzeit des Teilchens in seinem Ruhesystem ist und u_μ die Vierergeschwindigkeit. m_0 ist die Ruhemasse, und $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$ die relativistische Masse

Ruheenergie

Wir entwickeln

$$c p_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (19.3)$$

in Potenzen von β^2 . Im nicht-relativistischen Limes $\beta \rightarrow 0$ erkennen wir $m_0 v^2/2$ als die kinetische Energie und nennen daher $m_0 c^2$ die Ruheenergie und

$$\boxed{\mathcal{E} = c p_0 = m c^2} \quad (19.4)$$

als die relativistische Gesamtenergie.

Energie-Impuls Beziehung

Die Länge eines Vierer-Vektors ist eine Lorentz-Invariante:

$$\left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2, \quad \boxed{\mathcal{E}^2 = m_0^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}. \quad (19.5)$$

Bindungsenergien von Atomen und Kernen

Für das Deuteron entspricht die Massendifferenz

$$\Delta m = m_p + m_n - m_d \approx 3.5 \cdot 10^{-27} g \quad (19.6)$$

einer Energie

$$\epsilon_d = \Delta m c^2 \approx 2.2 MeV, \quad (19.7)$$

welche gerade die Bindungsenergie des Deuterons ist. In Atomen ist die Bindungsenergie um Größenordnungen geringer: aus

$$m_p + m_e - m_H \approx 2.4 \cdot 10^{-32} g \quad (19.8)$$

folgt für die Bindungsenergie

$$\epsilon_H \approx 13.5 eV. \quad (19.9)$$

Trägheitsgesetz

Das Newton'sche Trägheitsgesetz, wonach

$$\mathbf{p} = \text{const} \quad (19.10)$$

für ein freies Teilchen gilt, verallgemeinern wir auf

$$p_\mu = \text{const}; \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (19.11)$$

fordern also zugleich mit der Erhaltung der räumlichen Komponenten auch die Konstanz der 0. Komponente, der Energie.

19.2 Bewegungsgleichungen

In Verallgemeinerung der Newton'schen Kraft-Definition führen wir im Minkowski-Raum eine Vierer-Kraft ein durch ihre Komponenten:

$$\boxed{K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} = \gamma(v) \frac{dp_\mu}{dt} \equiv (K_0, \mathbf{K})} \quad (19.12)$$

Dabei ist $d\tau$ im *momentanen* Ruhssystem des Teilchens als *differenzielle* Eigenzeit erklärt. Die Raum-Komponenten von (19.12) ergeben die relativistische Verallgemeinerung der Newton'schen Bewegungsgleichungen:¹

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \tilde{\mathbf{K}}}, \quad (19.13)$$

wobei $\tilde{\mathbf{K}}$ z.B. für die Lorentz-Kraft (6.24) steht.

Mit (19.2) können wir auch die Raumkomponenten von (19.12) als

$$\gamma \frac{d}{dt} (m(v)\mathbf{v}) \equiv \gamma \frac{d}{dt} (m_0 \gamma(v)\mathbf{v}) = \mathbf{K} \quad (19.14)$$

schreiben, wobei m_0 die Ruhemasse und $m(v)$ die relativistische Masse darstellt. Da die Zeitkomponente p_0 die Energie ist, beschreibt seine *Zeitableitung* K_0/γ die *Leistung*.

Die Gleichung (19.14) zeigt, daß Teilchen der Ruhemasse $m_0 \neq 0$ die Geschwindigkeit $v = c$ nicht erreichen können, da wegen

$$m(v) \rightarrow \infty \quad (19.15)$$

für $v \rightarrow c$ dazu eine ∞ -große Energie nötig wäre.

19.3 Lorentz-Transformation der Kraft

Da K_μ die Komponenten eines Vierer-Vektors sind, gilt für die Transformation vom momentanen Ruhssystem Σ auf ein anderes Inertialsystem Σ' mit der speziellen Transformation (18.38):

$$K'_0 = \frac{K_0 - \beta K_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad K'_1 = \frac{K_1 - \beta K_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad K'_2 = K_2, \quad K'_3 = K_3. \quad (19.16)$$

Für die dreier-Komponente gilt demnach

$$\vec{K}'_{\perp} = \vec{K}_{\perp}; \quad \vec{K}'_{\parallel} = \gamma(v) (\vec{K}_{\parallel} - \beta K_0) \quad (19.17)$$

Lorentz-Kraft

Wir wollen nun prüfen, ob die für die Praxis äußerst wichtige Lorentz-Kraft der Forderung der Kovarianz genügt, ob also

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) = \tilde{\mathbf{K}} \quad (19.18)$$

¹Wir benutzen \mathbf{K} als die Raumkomponente der Viererkraft, und $\tilde{\mathbf{K}}$ die Newton'sche Kraft (19.13). Aus (19.12), $\mathbf{K} = \gamma \tilde{\mathbf{K}}$.

in jedem Inertialsystem als Bewegungsgleichung eines Teilchens mit Masse m_0 , Impuls $m_0(v)\mathbf{v}$ benutzt werden darf. Der nicht-relativistische Ausdruck für die Leistung ist mit (19.18)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \tilde{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{v} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} . \quad (19.19)$$

Wir zeigen jetzt, dass die Gleichungen (19.18), (19.19) in der kompakten Vierervektor-Form geschrieben werden können:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dp_\mu}{dt} = \frac{q}{c} F_\mu^\nu u_\nu \quad (19.20)$$

mit dem Feldstärketensor $F_\mu^\nu = g^{\nu\sigma} F_{\mu\sigma}$ (siehe (18.52)).

(19.20) ist offensichtlich Lorentz-invariant. Es zeigt also, dass die Lorentz-Kraft (19.18), sowie die entsprechende Energiebalance (19.19) Lorentz-invariant sind, obwohl es man aus ihrer Standardform nicht hätte vorhersagen können.

Beweis von (19.20): Mit Hilfe von (18.56) und $c = 1$ haben wir für $\mu = 0$ (zeitliche Komponente):

$$\gamma \frac{dp_0}{dt} = q F_0^i u_i = -q F_{0i} u_i = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \gamma . \quad (19.21)$$

also (19.19). Für $\mu = i$ (räumliche Komponente):

$$\begin{aligned} \gamma \frac{dp_i}{dt} &= q F_i^0 u_0 + q F_i^j u_j = q F_{i0} \gamma - q F_{ij} v_j \gamma \\ &= q \gamma (E_i + \epsilon_{ijk} B_k v_j) = q \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_i , \end{aligned} \quad (19.22)$$

also die Lorentz-Kraft (19.18).

Ergebnis

Wir haben die Grundbegriffe und Grundgleichungen der Newton'schen Mechanik für die relativistische Mechanik erweitert derart, daß

- 1.) die Newton'sche Mechanik im Grenzfall $v \ll c$ enthalten ist,
- 2.) die modifizierten Grundgleichungen kovariant bzgl. Lorentz-Transformationen sind.

Dabei blieb die Lorentz-Kraft (19.18) als Bindeglied zwischen Mechanik und Elektrodynamik erhalten. Sie findet ihre experimentelle Bestätigung z.B. im *Funktionieren* moderner Teilchenbeschleuniger. Der Zusammenhang zwischen relativistischer Mechanik und Elektrodynamik ergibt sich zwangsläufig im Rahmen von relativistischen **Eichfeldtheorien** mit **minimaler Kopplung**.

19.4 Übersicht Relativität

⋮

Lorentz Skalare, Vierervektoren, Vierertensoren

- Vierervektoren:

$$h_\mu = (h_0, \mathbf{h}) = (h_0, h_x, h_y, h_z) \text{ Kovariant}$$

$$h^\mu = (h_0, -\mathbf{h}) = (h_0, -h_x, -h_y, -h_z) \text{ Kontravariant}$$

$$\text{Ausnahme: Vierergradient: } \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\nabla \right) \quad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \nabla \right)$$

- Einstein-Konvention: Gleiche (griechische) Indizes werden von 0 bis 3 summiert, wenn sie auf „verschiedenen Ebenen“ stehen
Stehen zwei gleiche Indizes auf der gleichen Ebene, hat man ein Fehler gemacht.
Lateinische Indizes i, j, l, \dots beschreiben nur Raumkomponenten 1, 2, 3.

- Skalarprodukt (Einstein Konvention):

$$h_\mu p^\mu := \sum_{\mu=0}^3 h_\mu p^\mu = h_0 p_0 - \mathbf{h} \cdot \mathbf{p}$$

(Man kann auch so machen: $(h_0, \mathbf{h}) \cdot (p_0, -\mathbf{p})$)

Invariant unter Lorentz Transformationen!

- Vierertensoren:

$$F_{\mu\nu}, \quad F^{\mu\nu}, \quad F^\mu{}_\nu \dots$$

Kontraktion (Einstein Konvention):

$p_\mu = F_{\mu\nu} h^\nu$ ist ein Kovarianter Vierervektor (und transformiert als solches unter Lorentz Transformationen).

- Indizes „heben oder senken“ mit Hilfe des metrischen Tensors $g^{\mu\nu}$:

$$h^\mu = g^{\mu\nu} h_\nu$$

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

Im der speziellen Relativität (flachen Raum):

$$g^{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{für } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{für } \mu = \nu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (19.23)$$

Spezielle Vierer-vektoren und -Tensoren

- Zeit-Ort Vierervektor: $x_\mu = (ct, \mathbf{x})$

- Vierergeschwindigkeit: $u_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau} = \gamma (c, \mathbf{v})$. $(\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2})$
man hat: $u^\mu u_\mu = c^2$.
- Eigenzeit $d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{dt^2 - d\mathbf{x}^2/c^2}$.
- Viererdivergenz: $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\nabla \right)$

Elektrodynamik

- Viererstromdichte: $j_\mu = (c\rho, \mathbf{j})$
- Viererpotential: $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$
- Feldstärkentensor: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (19.24)$$

oder auch

$$F_{i,0} = E_i \quad F_{i,j} = -\epsilon_{ijk} B_k \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.$$

- Viererimpuls: $p_\mu = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}) = m_0 \gamma (c, \mathbf{v})$

Gleichungen in Lorentz-Invarianten Form:

- Kontinuitätsgleichung: $0 = \partial^\mu j_\mu = \partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{j}$
- Lorenz-Eichung: $0 = \partial^\mu A_\mu = \frac{1}{c} \partial\phi/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{A}$
- Wellengleichung: $\partial^\nu \partial_\nu A_\mu = \frac{4\pi}{c} j_\mu$
- Inhomogene Maxwellgleichungen: $\partial^\nu F_{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu$
- Homogene Maxwellgleichungen: $\partial^\mu F_{\nu\lambda} + \partial^\nu F_{\lambda\mu} + \partial^\lambda F_{\mu\nu} = 0$
oder: $\partial^\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho} = 0$

- Lorentz-Kraft: $\frac{\partial p_\mu}{\partial \tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu$.

Lorentztransformationen

Lorentztransformation von einem inertialen Bezugssystem Σ in einem anderen Σ' mit relativen Geschwindigkeit \mathbf{v} .

Wir führen ein: $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

- $p'_\mu = L_\mu{}^\nu p_\nu$
- Invarianz des Skalarproduktes fordert $g^{\rho\sigma} = g^{\mu\nu} L_\mu{}^\rho L_\nu{}^\sigma$
- Geschwindigkeit \mathbf{v} in x -Richtung: $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$

$$h'_0 = \gamma (h_0 - \beta h_1), \quad h'_1 = \gamma (h_1 - \beta h_0), \quad h'_2 = h_2, \quad h'_3 = h_3, \quad (19.25)$$

also

$$L_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \gamma & 0 & 0 \\ -\beta \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19.26)$$

- Die inverse Transformation (von $\Sigma' \rightarrow \Sigma$), erhält man wie oben (und unten) mit der Substitution $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ ($\boldsymbol{\beta} \rightarrow -\boldsymbol{\beta}$)

Transformation des \mathbf{E} und \mathbf{B} -Feldes.

- Transformation des Feldstärketensors

$$F'_{\mu\nu} = L_\mu{}^\lambda L_\nu{}^\rho F_{\lambda\rho}.$$

- Inertialsystem mit Geschwindigkeit v in x -Richtung:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma (E_y - \beta B_z), & B'_y &= \gamma (B_y + \beta E_z) \\ E'_z &= \gamma (E_z + \beta B_y), & B'_z &= \gamma (B_z - \beta E_y) \end{aligned} \quad (19.27)$$

- für allgemeine Geschwindigkeit \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \gamma \mathbf{B} - \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - \frac{\gamma}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \\ \mathbf{E}' &= \gamma \mathbf{E} - \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + \frac{\gamma}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Kapitel 20

Relativistische Elektrodynamik

20.1 Transformationseigenschaften, das elektrische Feld einer bewegten Ladung

Um das Verhalten der einzelnen Komponenten von F_{ik} bei Lorentztransformationen studieren zu können, betrachtet man das Transformationsverhalten des Feldstärke-Tensorfeldes:

$$F^{\mu\nu} \xrightarrow{L} F'^{\mu\nu} = L^\mu_\rho L^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}. \quad (20.1)$$

Spezialisiert man wieder auf eine Lorentztransformation für Geschwindigkeiten parallel zu einer Achse, so hat L^μ_ν die Matrixform (18.40) und die Auswertung erfolgt einfach durch Ausrechnen von

$$F' = LFL^T$$

als Matrixgleichung. Da das Ergebnis antisymmetrisch sein muß findet man rasch (für Relativbewegungen parallel zur x -Achse):

$$\begin{aligned} E'_1(\mathbf{r}') &= E_1(\mathbf{r}) & B'_1(\mathbf{r}') &= B_1(\mathbf{r}) \\ E'_2(\mathbf{r}') &= \gamma \left(E_2(\mathbf{r}) - \frac{v}{c} B_3(\mathbf{r}) \right) & B'_2(\mathbf{r}') &= \gamma \left(B_2(\mathbf{r}) + \frac{v}{c} E_3(\mathbf{r}) \right) \\ E'_3(\mathbf{r}') &= \gamma \left(E_3(\mathbf{r}) + \frac{v}{c} B_2(\mathbf{r}) \right) & B'_3(\mathbf{r}') &= \gamma \left(B_3(\mathbf{r}) - \frac{v}{c} E_2(\mathbf{r}) \right). \end{aligned}$$

Betrachten wir nun zur Illustration ein im Inertialsystem \mathbb{S} ruhendes geladenes Teilchen. Mißt der Beobachter in \mathbb{S} das elektromagnetische Feld des Teilchens, so findet er das übliche Coulombfeld

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E} = q \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

wenn wir annehmen, daß das Teilchen kein magnetisches Moment hat.

In einem relativ zu \mathbb{S} bewegten System \mathbb{S}' ergibt sich dann aber nicht nur ein elektrisches sondern auch ein magnetisches Feld. Die klassische Erklärung ist natürlich, daß ein bewegtes geladenes Teilchen immer einen Strom darstellt, welcher ein Magnetfeld generiert. Hier folgt diese Tatsache unmittelbar aus dem Transformationsverhalten (20.1). Es wird aber auch das elektrische Feld beeinflusst:

$$E'_1(\mathbf{r}') = E_1(\mathbf{r}) = q \frac{x}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Wir setzen nun $b^2 = y^2 + z^2 = y'^2 + z'^2$, wobei b den Abstand des Aufpunktes von der x -Achse angibt. Daraus folgt (wir setzen hier $c = 1$):

$$E'_1(\mathbf{r}') = q \frac{x}{r^3} = q \frac{\gamma(x' + \beta t')}{[\gamma^2(x' + \beta t')^2 + b^2]^{3/2}} \quad (20.2)$$

$$E'_2(\mathbf{r}') = \gamma E_2(\mathbf{r}) = q \frac{\gamma y'}{[\gamma^2(x' + \beta t')^2 + b^2]^{3/2}} \quad (20.3)$$

$$E'_3(\mathbf{r}') = \gamma E_3(\mathbf{r}) = q \frac{\gamma z'}{[\gamma^2(x' + \beta t')^2 + b^2]^{3/2}} \quad (20.4)$$

und wir sehen, daß in allen drei Beziehungen ein Faktor γ auftritt.

Wir untersuchen nun die momentane Feldlinienverteilung zum Zeitpunkt $t' = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'(\mathbf{r}') &= q \frac{\gamma \mathbf{r}'}{\gamma^3 [x'^2 + b^2/\gamma^2]^{3/2}} \\ &= q \frac{(1 - \beta^2) \mathbf{r}'}{[x'^2 + b^2/\gamma^2]^{3/2}} \\ &= q \frac{(1 - \beta^2) \mathbf{r}'}{[|\mathbf{r}'|^2 - \beta^2 b^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (20.5)$$

Die Feldlinien sind also wie bei der ruhenden Ladung gerade Linien in radialer (\mathbf{r}) Richtung. Wir berechnen nun den Betrag der elektrischen Feldstärke $|\mathbf{E}'|$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}'(\mathbf{r}')| &= q \frac{(1 - \beta^2) |\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}'|^3 [1 - \beta^2/|\mathbf{r}'|^2]^{3/2}} \\ &= q \frac{1 - \beta^2}{|\mathbf{r}'|^2 [1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta']^{3/2}} \end{aligned} \quad (20.6)$$

mit $\sin \vartheta' = b/|\mathbf{r}'|$. Wir sehen, daß dieser Betrag bei festgehaltenem \mathbf{r}' in der Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung der Ladung am größten, nämlich gleich

$$\sin \vartheta' = 1 \rightarrow |\mathbf{E}'| = q \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (20.7)$$

ist (also auch größer als im Fall einer ruhenden Ladung), und in Richtung der Fortbewegung des Teilchens am kleinsten ist (kleiner als für $\beta = 0$):

$$\sin \vartheta' = 0 \rightarrow |\mathbf{E}'| = q \frac{1 - \beta^2}{|\mathbf{r}'|^2}. \quad (20.8)$$

Das Coulombfeld ist also senkrecht zur Bewegungsrichtung dilatiert (verstärkt) und in Bewegungsrichtung kontrahiert (abgeschwächt).

Das Feldlinienbild (der Fluss der Feldlinien pro Flächeneinheit gibt wie üblich $|\mathbf{E}|$ an) kann man aus dem Felddbild der ruhenden Ladung dadurch finden, indem man dieses Bild

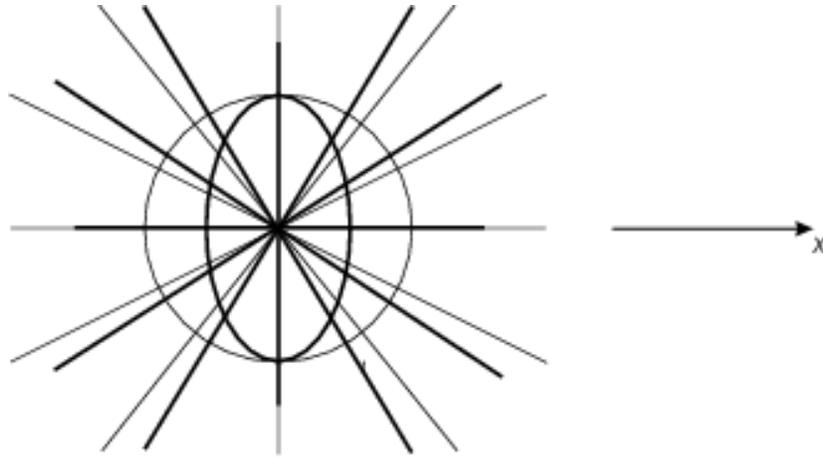


Abbildung 20.1: Feldlinienbild einer bewegten Ladung, die dünnen Linien entsprechen dabei dem Feldlinienbild der unbewegten Ladung.

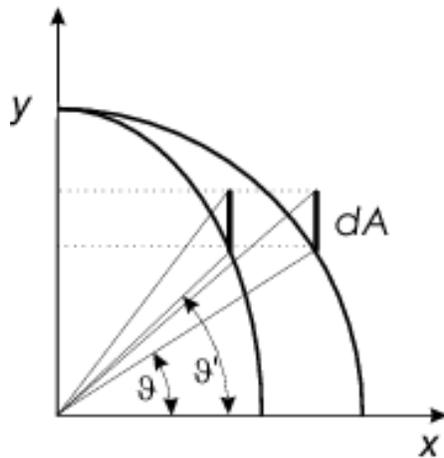


Abbildung 20.2: Zur Konstruktion des Feldlinienbildes einer bewegten Ladung.

in x -Richtung (der Bewegungsrichtung) um $\sqrt{1 - \beta^2}$ affin staucht. Dazu betrachten wir eine Kugel und das daraus durch Stauchung in x -Richtung um $\sqrt{1 - \beta^2}$ hervorgehende Ellipsoid. Eine Fläche dA senkrecht zur x -Achse erscheint vom Ursprung betrachtet unter dem Raumwinkel $d\Omega = dA \cos \vartheta / r^2$. Alle durch diesen Raumwinkel hindurchtretenden Feldlinien gehen bei der Stauchung in den Raumwinkel $d\Omega' = dA \cos \vartheta' / r'^2$ über, da dA ja unverändert bleibt. Es gilt somit:

$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{\cos \vartheta' r^2}{\cos \vartheta r'^2} = \frac{x' r^3}{r'^3 x} = \frac{1}{\gamma} \frac{r^3}{r'^3}.$$

Da die Zahl der Feldlinien, welche die Flächen $r^2 d\Omega$ und $r'^2 d\Omega'$ durchsetzen gleich ist,

ergibt sich:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}'| r'^2 d\Omega' &= |\mathbf{E}| r^2 d\Omega \\ &= q \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega = q d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}'| &= q \frac{1}{r'^2} \frac{d\Omega}{d\Omega'} = q \frac{1}{r'^2} \frac{\gamma r'^3}{r^3} \\ &= q \frac{|r'|}{r^3} \gamma = q \frac{|r'| \gamma}{[\gamma^2 (x' + \beta t')^2 + b^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Für $t' = 0$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}'| &= q \frac{|r'| \gamma}{[\gamma^2 x'^2 + b^2]^{3/2}} \\ &= q \frac{1 - \beta^2}{r'^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta')^{3/2}}, \end{aligned}$$

wie aus (20.6) zu erwarten war.

Bei Abbremsung eines rasch bewegten Teilchens (oder bei Beschleunigung eines ruhenden Teilchens) muß dann die gestauchte Form des Coulombfeldes in das Feldlinienbild der ruhenden Ladung (oder umgekehrt) übergehen. Dieser Prozess kann nur allmählich erfolgen, da sich die Information über die Bremsung des Teilchens mit Lichtgeschwindigkeit in seinem Feld ausbreitet. Es geht dabei eine Stoßwelle durch das Coulombfeld hindurch. Die elektrischen Feldlinien in der Stoßwelle stehen dabei annähernd senkrecht auf den Radiusvektor und die Stoßwelle breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit vom Teilchen weg aus. Falls also ein Teilchen aus relativistischen Geschwindigkeiten heraus abgebremst wird, entsteht das typische Vorwärtsmaximum der Bremsstrahlung.

20.2 Die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem homogenen elektrischen Feld

Ein Teilchen mit der Ladung e wird zum Zeitpunkt $t = 0$ in das Feld eingebracht und im Feld beschleunigt. Es gilt also die Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned} t = 0 : \quad \mathbf{E} &= (0, 0, E), \quad \mathbf{r} = (0, 0, z) = (0, 0, 0), \\ \mathbf{v} &= (0, 0, \dot{z}) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Für den Impuls des Teilchens gilt (vom Beobachter im Inertialsystem des homogenen elektrischen Feldes aus gesehen):

$$\mathbf{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \dot{\mathbf{r}}$$

oder

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{d}{dt} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = e\mathbf{E}.$$

Damit gilt folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \dot{z}}{\sqrt{1 - (\dot{z}/c)^2}} \right) = eE,$$

mit der Lösung

$$\frac{m_0 \dot{z}}{\sqrt{1 - (\dot{z}/c)^2}} = eEt + A.$$

Aufgrund der Anfangsbedingungen gilt noch $A = 0$. Wir rechnen weiter:

$$\begin{aligned} \frac{m_0^2 \dot{z}^2}{1 - (\dot{z}/c)^2} &= (eEt)^2 \\ \frac{m_0^2 (\dot{z}^2/c^2) c^2}{1 - \dot{z}^2/c^2} c^2 &= (eEct)^2 \\ \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} &= \left(\frac{eEct}{m_0 c^2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{eEct}{\mathcal{E}_0} \right)^2, \end{aligned}$$

mit $\mathcal{E}_0 = m_0 c^2$ der Ruhenergie. Also gilt

$$\beta^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\mathcal{E}_0}{eEct} \right)^2} \leq 1,$$

und man erkennt, daß das Teilchen erst für $t = \infty$ Lichtgeschwindigkeit ($\beta = 1$) erreichen kann.

Es folgt weiter:

$$\frac{dz}{dt} = \beta c = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{E}_0}{eEct} \right)^2}}$$

oder

$$dz = \frac{cdt}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{E}_0}{eEct} \right)^2}},$$

woraus die $z(t)$ Bahnkurve des Teilchens bestimmt werden kann. Wir substituieren:

$$\begin{aligned} \sinh u &= \frac{eEct}{\mathcal{E}_0} \\ \cosh u \, du &= \frac{eEcdt}{\mathcal{E}_0} \\ dz &= \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \frac{\cosh u \, du}{\cosh u / \sinh u} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} z &= B + \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \int du \sinh u \\ &= B + \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \sqrt{1 + \left(\frac{eEct}{\mathcal{E}_0}\right)^2}. \end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung $t = 0, z = 0$ folgt schließlich $B = -\mathcal{E}_0/eE$ und wir erhalten die Bahnkurve:

$$z = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{eEct}{\mathcal{E}_0}\right)^2} - 1 \right). \quad (20.9)$$

Wir untersuchen nun den Fall sehr großer Zeiten. In diesem Fall gilt:

$$z \approx ct - 1$$

und das Teilchen beschleunigt nicht mehr! Für den nicht relativistischen Grenzfall $\mathcal{E}_0 = m_0c^2 \gg eEct$ folgt hingegen

$$\begin{aligned} z &= \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{eEct}{\mathcal{E}_0}\right)^2 + \dots - 1 \right] \\ &= \frac{eE}{m_0} \frac{t^2}{2}, \end{aligned}$$

also die klassische Beschleunigung im elektrischen Feld. Aus (20.9) folgt noch

$$\left(\frac{eE}{\mathcal{E}_0}z + 1\right)^2 = 1 + \left(\frac{eEct}{\mathcal{E}_0}\right)^2.$$

Mit den Abkürzungen

$$\bar{z} = \frac{eE}{\mathcal{E}_0}z + 1, \quad c\bar{t} = c\frac{eEt}{\mathcal{E}_0}$$

finden wir die Bahnkurve

$$\bar{z}^2 - (c\bar{t})^2 = 1,$$

und damit ist die Bahnkurve eine **Hyperbel** mit dem Lichtkegel als Asymptote.

Teil VIII
Mathematik

⋮

Anhang A

Mathematik-Wiederholung

1

⋮

A.1 Wiederholung Vektoralgebra

Unter Benutzung von δ_{ij} (Kronecker-Delta) und ϵ_{ijk} (Ricci-Tensor) und der Einstein'schen Summenkonvention (**stets implizit!**) gilt:

A.1.1 Skalarprodukt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i \quad \left(\sum_i \dots \text{implizit!} \right) \quad (\text{A.1})$$

A.1.2 Vektorprodukt (alias Kreuzprodukt)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (\text{Äquivalent: } (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = A_i B_j \epsilon_{ijk}) \quad (\text{A.2})$$

wobei $\hat{\mathbf{e}}_k$ der Einheitsvektor in Richtung k ($k = 1, 2, 3$ oder x, y, z) in Kartesischen Koordinaten ist.

Eigenschaften

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad \iff \quad \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \quad (\text{A.3})$$

$$(\text{z.B. } \epsilon_{iik} = 0 \iff \mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0)$$

Die Vertauschungsrelation (A.3) und $\epsilon_{123} = 1$ definieren ϵ_{ijk} vollständig.

A.1.3 Spatprodukt

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad \iff \quad \epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} \quad (\text{A.4})$$

(zyklische Permutation, resultiert aus zwei Vertauschungen aus Gl. (A.3))

¹Herzlichen Dank an Herrn G. Huhs für das Tippen!

Eigenschaften

Wir brauchen nur noch

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \iff \epsilon_{mil} \epsilon_{jkl} = \delta_{mj} \delta_{ik} - \delta_{mk} \delta_{ij} . \quad (\text{A.5})$$

Hier wurde über den zweimal auftretenden Index l summiert (Einstein Konvention). Daraus kann man weitere wichtige Beziehungen herleiten.

A.2 Nabla-”Operator”

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass es sich um einen Differentialoperator handelt (Produktregel!, evtl. Kettenregel; es muss klar sein auf welche Terme er wirkt), kann man ihn als Vektor behandeln.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \equiv (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \dots = \hat{\mathbf{e}}_i \partial_i \dots = \partial_i \hat{\mathbf{e}}_i \dots \quad (\text{A.7})$$

(Vorsicht! ∇ braucht stets etwas, worauf er angewendet werden muss!)

Bemerkung:

Ortskoordinaten werden in der Regel mit \mathbf{x} oder \mathbf{r} bezeichnet, was auch (x, y, z) oder (x_1, x_2, x_3) entspricht.

A.2.1 Divergenz \longleftrightarrow „Skalarprodukt“

Divergenz eines Vektorfeldes \mathbf{v}

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \partial_i v_i \quad (\text{Summenkonvention!}) \quad (\text{A.8}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z \end{aligned}$$

A.2.2 Rotation \longleftrightarrow „Vektorprodukt“

Rotation eines Vektorfeldes \mathbf{v}

$$\nabla \times \mathbf{v} = \epsilon_{ijk} \partial_i v_j \hat{\mathbf{e}}_k \quad (\text{A.9})$$

A.2.3 Gradient \longleftrightarrow „Produkt mit einem Skalar“

Gradient eines Skalarfeldes ϕ

$$\nabla \cdot \phi = \hat{\mathbf{e}}_i \partial_i \phi \quad (\text{A.10})$$

A.3 „Nabla-Kalkül“

A.3.1 Beispiele

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = ?$$

2 Methoden:

1.

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_k &= \partial_i (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_j \epsilon_{ijk} \\ &\text{Vorsicht! Ordnung nicht ändern!} \\ &= \partial_i A_n B_m \underbrace{\epsilon_{nmj} \epsilon_{ijk}} \\ &\quad (\text{Anwendung von (A.5)}) = \epsilon_{nmj} \epsilon_{kij} \\ &\quad = \delta_{nk} \delta_{mi} - \delta_{ni} \delta_{mk} \\ &= \partial_m A_k B_m - \partial_n A_n B_k \\ &= A_k \partial_m B_m + B_m \partial_m A_k - B_k \partial_n A_n - A_n \partial_n B_k \\ &= [\mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}]_k \end{aligned}$$

Der erste und der letzte Vektor in Klammern sind daher identisch. Per Konvention wirkt ∇ auf alles was auf der rechten Seite des Operators steht (falls nicht anders spezifiziert - siehe unten)

2. Benutzung von

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \\ &\text{Ersetze } \mathbf{C} \rightarrow \nabla! \\ &\text{Aber aufpassen!} \\ &\nabla \text{ wirkt auf } \mathbf{A} \text{ und } \mathbf{B} \\ &\Rightarrow \text{Markierung worauf } \nabla \text{ wirkt (Produktregel)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla \times (\overset{\downarrow}{\mathbf{A}} \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{A} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{B}}) \\ &= \overset{\downarrow}{\mathbf{A}} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{A}}) + \mathbf{A} (\nabla \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{B}}) - \overset{\downarrow}{\mathbf{B}} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ &\quad \text{Benutzung der Konvention „} \nabla \text{ wirkt nach rechts“} \\ &= \underbrace{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}}_{\mathbf{v}} - \underbrace{\mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A})}_{\mathbf{u}} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\text{mit } v_i = B_j \partial_j A_i$$

$$u_i = B_i \partial_j A_j$$

A.3.2 Benutzung der Kettenregel

$f(|\mathbf{r}|)$ ist eine skalare Funktion des Betrags der Ortskoordinate (oft verwendet man die Notation r (ohne Boldface oder Pfeil) für $|\mathbf{r}|$).

$$\begin{aligned} \nabla f(|\mathbf{r}|) &= f'(|\mathbf{r}|) \nabla |\mathbf{r}| \quad (\text{Kettenregel}) \\ (\nabla |\mathbf{r}|)_i &= \partial_i \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \frac{r_i}{|\mathbf{r}|} = (\hat{\mathbf{e}}_r)_i \\ \nabla |\mathbf{r}| &= \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad \text{Oft verwendete Formel in der E.dynamik!} \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

also

$$\nabla f(|\mathbf{r}|) = f'(|\mathbf{r}|) \hat{\mathbf{e}}_r$$

A.3.3 Weitere wichtige Aspekte

1. Linearität

$$\begin{aligned} \text{z.B. } \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \\ \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

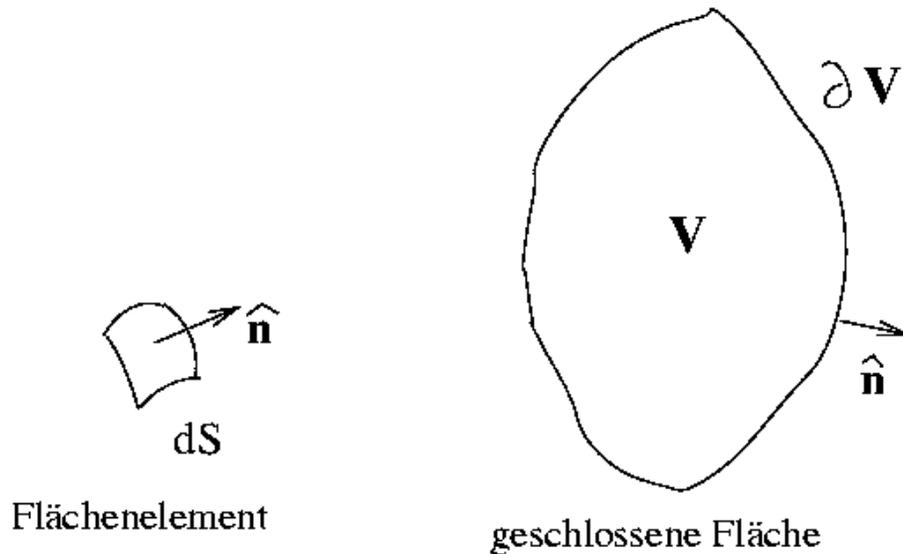
2. Auf konstante Felder wirkt ∇ nicht

$$\text{z.B. } \nabla \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \phi = \phi \underbrace{\nabla \cdot \hat{\mathbf{e}}_i}_{=0} + \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \nabla \phi = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \nabla \phi$$

Bei Einheitsvektoren ist zu beachten, dass die Kartesischen Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_i$, $\hat{\mathbf{e}}_x$, ... konstant sind, $\hat{\mathbf{e}}_r$ allerdings **nicht!**

A.4 Gauß'scher Satz

1. Flächenelement (orientiert) (siehe Fig.)



$$d\mathbf{S} = dS \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.12})$$

wobei $\hat{\mathbf{n}}$ der Vektor normal zur Oberfläche ist

2. Fluss Φ eines Vektorfeldes \mathbf{v} durch eine geschlossene Fläche ∂V , die ein Volumen V abgrenzt (siehe Fig.)

$$\Phi(\partial V) = \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.13})$$

3. ist gleich dem **Volumenintegral** der Divergenz von \mathbf{v} in V

$$\Phi(\partial V) = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, d^3r \quad (\text{A.14})$$

A.4.1 Interpretation

$\text{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} =$ Fluss (nach außen) des Vektorfeldes \mathbf{v} durch die Grenzfläche eines infinitesimalen Volumens pro Einheitsvolumen

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\delta\Phi(\partial\delta V)}{\delta V}$$

Bei $\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$ „entstehen“ zusätzliche Feldlinien: **Quelle**

A.4.2 Anwendung

- In der **Elektrostatik**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

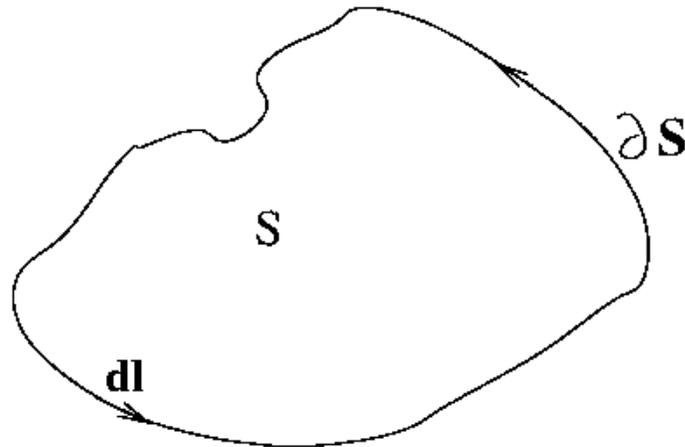
Ladungsdichte ist die Quelle des elektrischen Feldes

- **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}$$

Eine zeitliche Änderung der Ladung entsteht nur durch einen Strom(zu- oder ab-)fluss

A.5 Stokes'scher Satz



1. **Kurve** im dreidimensionalen Raum

$d\mathbf{l}$ = orientiertes Kurvenstück

2. **Zirkulation** Z = Linienintegral eines Vektorfeldes \mathbf{v} entlang einer geschlossenen Kurve ∂S , die eine Fläche S abgrenzt (S ist nicht eindeutig durch ∂S definiert!) (siehe Fig.).

Die Orientierung der Fläche kann nach der „Daumenregel“ ermittelt werden.

$$Z(\partial S) = \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{A.15})$$

3. = **Fluss der Rotation** von \mathbf{v} durch S

$$Z(\partial S) = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.16})$$

[Dass der Fluss unabhängig von S bei gleichem ∂S ist, folgt aus $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$]

A.5.1 Interpretation

$(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \text{rot } \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} =$ Zirkulation von \mathbf{v} um eine infinitesimale in Richtung $\hat{\mathbf{n}}$ orientierte Fläche pro Einheitsfläche

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\delta Z(\partial \delta S)}{\delta S}$$

A.5.2 Anwendung

In der **Elektrostatik**

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

A.6 Dirac'sche δ -Funktion

A.6.1 Definition

a)

$$\delta(x - x_0) = 0 \quad x \neq x_0 \quad (\text{A.17})$$

b)

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{wenn } x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

A.6.2 Ableitungen

1. Aus Variablentransformation

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{dg}{dx}(x_i) \right|} \delta(x - x_i) \quad (\text{A.19})$$

Wobei x_i einfache Nullstellen von $g(x)$ sind

2. Aus partieller Integration

$$\int_a^b f(x) \delta'(x - x_0) dx = - \int_a^b f'(x) \delta(x - x_0) dx \quad (\text{A.20})$$

A.6.3 Multidimensionale δ -Funktion

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (\text{A.21})$$

A.6.4 Fourier-Darstellung

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iq(x-x_0)} dq \quad (\text{A.22})$$

A.6.5 Wichtiges Ergebnis für die Elektrodynamik

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = 4\pi \delta(\mathbf{r}) \quad (\text{A.23})$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} &= \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{r}}_{=3} + \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \\ &= \frac{3}{|\mathbf{r}|^3} + \underbrace{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r}_{|\mathbf{r}|} \frac{-3}{|\mathbf{r}|^4} \\ &= 0 \quad \text{Gültig für } |\mathbf{r}| \neq 0 \end{aligned}$$

ABER:

$$\int_{\partial V} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \quad \text{wobei } V \text{ eine Kugel mit Radius } R \text{ ist}$$
$$\Rightarrow \int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} dV = 4\pi$$

woraus (insgesamt) (A.23) folgt

Anhang B

Einige details

B.1

B.1.1

Seien (x, y, z) die Koordinaten von P .
Ebenfalls geben Sie Koordinaten für die Position der beiden Ladungen q und q' an.
Bestimmen sie r und r' aus diesen Koordinaten und setzen Sie diese in (3.19) ein

B.1.2

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \nabla \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') 4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ &= \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0\end{aligned}$$

B.1.3

Das kann man so sehen: Wählt man speziell $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ so, dass $\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}_0 = 0$, so müssen gemäß (12.42) die 3 Vektoren \mathbf{k}_e , \mathbf{k}_r und \mathbf{k}_d senkrecht zu \mathbf{r}_0 sein, was nur möglich ist, wenn \mathbf{k}_e , \mathbf{k}_r und \mathbf{k}_d in einer Ebene liegen.

B.1.4

Man kann nicht $\nabla G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0$ wählen, da

$$\oint_F \nabla G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 = \int_V \nabla^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dV = -\frac{1}{\epsilon_0}$$

B.1.5

Auf beiden Seiten wird

$$\frac{2}{y_0} \int_0^{y_0} \sin(k_m y) dy$$

angewandt

Man benutzt dann die **Orthogonalitätseigenschaft der Sinusfunktionen**:

$$\frac{2}{y_0} \int_0^{y_0} \sin(k_m y) \sin(k_n y) dy = \delta_{nm}$$

B.1.6

Oder auch mit dem „Nabla-Kalkül“: $\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{E}^2 + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{E}^2$.

B.1.7

Betrachten wir ein „Photon“ der ein (kleines) Volumen $\Delta V = \Delta F \Delta l$ füllt, und mit Geschwindigkeit c senkrecht durch die Fläche ΔF fließt. Dazu braucht es die Zeit $\Delta t = \Delta l/c$. Die Gesamtenergie, die dieses Photon trägt ist daher $\Delta E = S \Delta F \Delta t$. Sein Impuls ist $\Delta P = \pi_F \Delta V = \pi_F \Delta F c \Delta t$. Daher ist die Dispersionsrelation

$$\frac{\Delta E}{\Delta P} = \frac{S}{c \pi_F} = c.$$

Das ist die Dispersionsrelation eines relativistischen Teilchens mit Geschwindigkeit c und Ruhemasse 0, siehe (19.5).

B.1.8

Das sieht man indem man die Fourier Transformation in den drei Komponenten nacheinander durchführt:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r}) &= g(r_1, r_2, r_3) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int \bar{g}(k_1, r_2, r_3) \exp(ik_1 r_1) dk_1 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2/2}} \int \int \bar{\bar{g}}(k_1, k_2, r_3) \exp(ik_2 r_2) dk_2 \exp(ik_1 r_1) dk_1 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \int \int \tilde{g}(k_1, k_2, k_3) \exp(ik_3 r_3) dk_3 \exp(ik_2 r_2) dk_2 \exp(ik_1 r_1) dk_1 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{g}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3 \mathbf{k} \end{aligned}$$

B.1.9

Analog zu (10.14) hat die drei dimensionale delta-distribution die Eigenschaften

$$\int f(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = f(\mathbf{r})$$

B.1.10

⋮

Wir suchen nach Lösungen der Wellengleichung in der Form

$$g(\mathbf{r}, t) = a(x)b(y)e^{i(kz-\omega t)}$$

mit (12.63)

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) g = 0$$

das gibt

$$a''(x)b(y)e^{i(kz-\omega t)} + a(x)b''(y)e^{i(kz-\omega t)} + \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)a(x)b(y)e^{i(kz-\omega t)} = 0$$

Wir teilen alles nach $a(x)b(y)e^{i(kz-\omega t)}$ und erhalten

$$\frac{a''(x)}{a(x)} + \frac{b''(y)}{b(y)} + \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0$$

Da der erste Term nur von x abhängig ist, der zweite nur von y , und der dritte konstant, müssen alle drei Konstanten sein.

Wir nennen die ersten beiden Konstanten $-k_x^2$ und $-k_y^2$. Wir haben also

$$\frac{a''(x)}{a(x)} = -k_x^2$$

Dessen allgemeine Lösung

$$a(x) = c_1 \cos k_x x + c_2 \sin k_x x$$

oder äquivalent

$$a(x) = d_1 e^{ik_x x} + d_2 e^{-ik_x x}$$

ist. Ähnlich gilt für $b(y)$.

Bemerkung:

man kann zeigen, dass k_x^2 (und k_y^2) positiv sein müssen. Wäre es nicht der Fall (z. B. $q_x^2 = -k_x^2 > 0$), wäre $a(x)$ eine Kombination von $e^{q_x x}$ und $e^{-q_x x}$, was nicht in zwei Stellen verschwinden kann, also die Randbedingungen nicht erfüllt.

B.1.11

⋮

- In der partiellen Integration verschwindet der Beitrag von den Rändern, da $\delta(t)$ an den Rändern verschwindet
- Vorsicht, die δ -Funktion ist gerade ($\delta(t-t') = \delta(t'-t)$), seine Ableitung ist ungerade $\delta'(t-t') = -\delta'(t'-t)$.
- Das Zeichen ' bedeutet Ableitung bezüglich sein Argument, oder auch $\delta'(t'-t) = \frac{\partial}{\partial t'} \delta(t'-t) = -\frac{\partial}{\partial t} \delta(t'-t)$.

- In (10.21) kann die partielle Integration nur dann durchgeführt werden, wenn die δ nach der zu integrierenden Variabel abgeleitet wird.
- Für den Gradienten der δ^3 haben wir:

$$\int f(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = - \int f(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' =$$

(partielle integration)

$$\int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \nabla f(\mathbf{r})$$

Teil IX
Mathematischer Anhang

Anhang C

Allgemeines

Hier werden weitere mathematische Details zur Verfügung gestellt. Zum Teil auch detailliertere Behandlungen der Themen des Teils VIII.

C.1 Der Satz von Gauß

Für den mathematisch Interessierten sei hier noch ein (ausführlicher) Beweis des Satzes von Gauß aufgeführt. Der Beweis geht im wesentlichen über eine Aufteilung des betrachteten Volumens in eine Summe von (infinitesimal) kleinen Volumina, für welche der Satz von Gauß dann schlussendlich bewiesen wird.

Der Satz von Gauß lautet: Es sei $\vec{E}(\vec{r})$ ein differenzierbares Vektorfeld und V ein Volumen mit geschlossener Oberfläche $S(V)$, dann gilt

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) d^3r = \oint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{f}. \quad (\text{C.1})$$

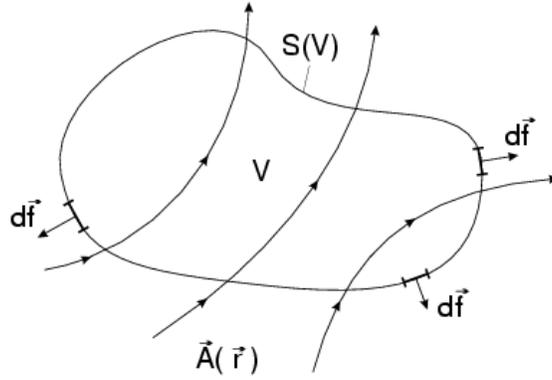
Zunächst wollen wir den Fluss durch eine Fläche S diskutieren. Gegeben sei ein Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = (A_1(\vec{r}), A_2(\vec{r}), A_3(\vec{r})) \quad (\text{C.2})$$

und ein Volumen V mit der geschlossenen Oberfläche $S(V)$. In der Elektrodynamik benötigt man häufig ein Maß dafür, wie stark $\vec{A}(\vec{r})$ die Oberfläche $S(V)$ von innen nach außen oder umgekehrt durchsetzt. Hierzu definieren wir den Fluss von $\vec{A}(\vec{r})$ durch die Fläche S

$$\Phi_S(\vec{A}) = \int_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}. \quad (\text{C.3})$$

An jeder Stelle der Fläche S ist das Skalarprodukt aus dem Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ und dem Flächenelement $d\vec{f}$ zu bilden, wobei letzteres die Richtung der nach außen gerichteten Normalen hat. Der Fluss ist eine skalare Größe.



Zu einer näherungsweise Berechnung zerlegen wir die Fläche S in viele kleine Flächenelemente $\Delta\vec{f}(\vec{r}_i)$, wobei das Argument \vec{r}_i angeben soll, an welcher Stelle auf S das Flächenelement zu finden ist. Es ist dann $\vec{A}(\vec{r}_i) \Delta\vec{f}(\vec{r}_i)$ der Fluss durch das Flächenelement $\Delta\vec{f}(\vec{r}_i)$. Sind die Flächenelemente hinreichend klein, so können wir das Feld \vec{A} auf $\Delta\vec{f}$ als homogen annehmen, also durch einen repräsentativen Wert $\vec{A}(\vec{r}_i)$ ersetzen. Einen Näherungsausdruck für den gesamten Fluss $\Phi_S(\vec{A})$ des Feldes A durch die Fläche S erhalten wir durch Addition der Teilflüsse durch die Flächen $\Delta\vec{f}(\vec{r}_i)$

$$\Phi_S \simeq \sum_i \vec{A}(\vec{r}_i) \Delta\vec{f}(\vec{r}_i) . \quad (\text{C.4})$$

Der Limes dieser Riemann-Summen heißt Flächenintegral

$$\Phi_S(\vec{A}) = \int_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{A}(\vec{r}_i) \Delta\vec{f}(\vec{r}_i) . \quad (\text{C.5})$$

Das Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche wird durch ein spezielles Integralzeichen symbolisiert

$$\Phi_{S(V)}(\vec{A}) = \oint_{S(V)} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{f} . \quad (\text{C.6})$$

Als einfachstes Beispiel betrachten wir den Fluss eines homogenen Feldes durch einen Quader der Länge a in x -Richtung, der Länge b in y -Richtung und der Länge c in z -Richtung. Es ist

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) , \quad (\text{C.7})$$

wobei A_x, A_y und A_z jeweils konstant sind. Damit folgt

$$\begin{aligned} \oint_{S(V)} \vec{A} d\vec{f} &= \oint_{S(V)} (A_x df_x + A_y df_y + A_z df_z) \\ &= A_x cb - A_x cb + A_y ca - A_y ca + A_z ab - A_z ab \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Der Fluss eines homogenen Feldes durch einen Quader ist also Null. Dies lässt sich bei homogenen Flächen verallgemeinern. Das, was in das Volumen V hineinfließt, fließt auch wieder heraus. Die Größe

$$D = \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} \vec{E} d\vec{f} \quad (\text{C.9})$$

nennt man die mittlere Quelldichte des Feldes \vec{E} in ΔV . Wir betrachten nun den Grenzübergang $\Delta V \rightarrow 0$ und können damit auch die Divergenz eines Feldes definieren,

$$\text{div } \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} \vec{E} d\vec{f}. \quad (\text{C.10})$$

Wir betrachten eine Folge von Volumina ΔV_n , die um den Punkt \vec{r}_0 zentriert sein mögen und sich für $n \rightarrow \infty$ auf diesem zusammenziehen. Der Einfachheit halber denken wir dabei an Quader mit den Kantenlängen Δx_n , Δy_n , Δz_n , die für $n \rightarrow \infty$ gegen Null streben. Es sei

$$\Delta \vec{f}_1 = \Delta y \Delta z \vec{e}_x = -\Delta \vec{f}_2, \quad (\text{C.11})$$

$$\Delta \vec{f}_3 = \Delta x \Delta z \vec{e}_y = -\Delta \vec{f}_4, \quad (\text{C.12})$$

$$\Delta \vec{f}_5 = \Delta x \Delta y \vec{e}_z = -\Delta \vec{f}_6. \quad (\text{C.13})$$

Für den Fluss von \vec{E} durch die Quaderflächen gilt

$$\begin{aligned} \oint_{S(\Delta V)} \vec{E} d\vec{f} &= \int \int dy dz \left[E_x \left(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x, y, z \right) - E \left(x_0 - \frac{1}{2} \Delta x, y, z \right) \right] \\ &+ \int \int dx dz \left[E_y \left(x, y_0 + \frac{1}{2} \Delta y, z \right) - E_y \left(x, y_0 - \frac{1}{2} \Delta y, z \right) \right] \\ &+ \int \int dx dy \left[E_z \left(x, y, z_0 + \frac{1}{2} \Delta z \right) - E_z \left(x, y, z_0 - \frac{1}{2} \Delta z \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Auf den Integranden wenden wir nun die Taylor-Entwicklung an. Es folgt

$$\begin{aligned} \oint_{S(\Delta V)} \vec{E} d\vec{f} &= \int \int dy dz \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} (x_0, y, z) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^3) \right] \\ &+ \int \int dx dz \left[\frac{\partial E_y}{\partial y} (x, y_0, z) \Delta y + \mathcal{O}(\Delta y^3) \right] \\ &+ \int \int dx dy \left[\frac{\partial E_z}{\partial z} (x, y, z_0) \Delta z + \mathcal{O}(\Delta z^3) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung und

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \quad (\text{C.16})$$

können wir schreiben

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta V} \int_{S(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} &= \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y_1, z_1) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(x_2, y_0, z_2) + \mathcal{O}(\Delta y^2) \\ &+ \frac{\partial E_z}{\partial z}(x_3, y_3, z_0) + \mathcal{O}(\Delta z^2) . \end{aligned}$$

Dabei gilt für die Punkte

$$\begin{aligned} x_2, x_3 &\in \left[x_0 - \frac{1}{2}\Delta x, x_0 + \frac{1}{2}\Delta x \right] , \\ y_1, y_3 &\in \left[y_0 - \frac{1}{2}\Delta y, y_0 + \frac{1}{2}\Delta y \right] , \\ z_1, z_2 &\in \left[z_0 - \frac{1}{2}\Delta z, z_0 + \frac{1}{2}\Delta z \right] . \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Beim Grenzübergang $\Delta V \rightarrow 0$ müssen diese Zwischenwerte gegen x_0, y_0 bzw. z_0 streben und die Korrekturterme verschwinden. Dies impliziert

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{S(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} &= \frac{\partial E_x}{\partial x}(\vec{r}_0) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(\vec{r}_0) + \frac{\partial E_z}{\partial z}(\vec{r}_0) \\ &= \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}_0) . \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Wir haben damit näherungsweise für endliches ΔV gefunden

$$\oint_{S(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \Delta V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) + \dots , \quad (\text{C.19})$$

wobei der mit \dots angegebene Rest beim Grenzübergang $\Delta V \rightarrow 0$ verschwindet. Wir legen nun an ein erstes Teilvolumen $\Delta V(\vec{r}_i)$ einen weiteren Quader, $\Delta V_{i+1}(\vec{r}_{i+1})$, der mit ΔV_i eine Seitenfläche gemeinsam haben möge

$$\oint_{S(\Delta V_i)} \vec{E} \cdot d\vec{f} + \oint_{S(\Delta V_{i+1})} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \Delta V_i \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}_i) + \Delta V_{i+1} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}_{i+1}) . \quad (\text{C.20})$$

Der Beitrag der gemeinsamen Seitenflächen zu den Flächenintegralen auf der linken Seite der Gleichung hebt sich wegen der entgegengesetzten Richtungen der entsprechenden Flächennormalen gerade heraus. Es bleibt das Oberflächenintegral über die Einhüllende des Gesamtvolumens.

Zusammengefasst folgt damit insgesamt

$$\oint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \sum_{i=1}^n \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}_i) \Delta V_i + \dots \quad (\text{C.21})$$

Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ haben wir es auf der rechten Seite mit einer Riemann-Summe zu tun, und es folgt der Satz von Gauß

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) d^3r = \oint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{f} . \quad (\text{C.22})$$

C.2 Die Dirac'sche δ -Funktion

Für den mathematisch Interessierten bringen wir hier eine Übersicht der Eigenschaften der Dirac'schen δ -Funktion. Der Begriff "Funktion" ist hier im streng mathematischen Sinn falsch gewählt, da es sich vielmehr um eine Distribution handelt. Die δ -Funktion ist durch eine Integrationseigenschaft definiert. Es ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \delta(x - a) dx = \begin{cases} f(a), & \text{falls } \alpha < a < \beta \\ 0 & \text{sonst } (a \neq \alpha, \beta) . \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

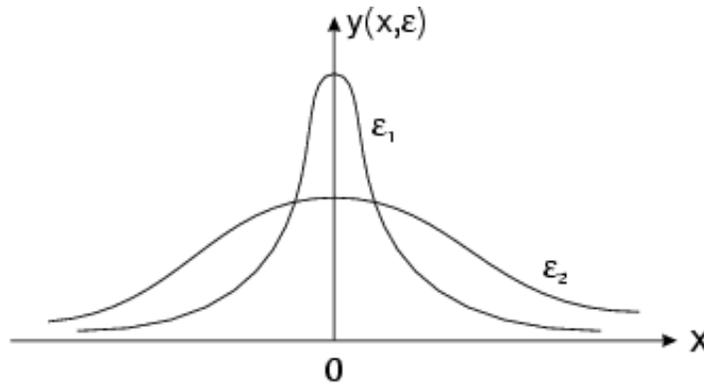
Mittels der δ -Funktion weisen wir der Funktion $f(x)$ einen speziellen Funktionswert $f(a)$ zu. Man spricht von einem Funktional. Speziell gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(x - a) dx = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha < a < \beta \\ 0 & \text{sonst } (a \neq \alpha, \beta) . \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

Wir wollen dies weiter mittels eines Grenzübergangs veranschaulichen. Wir gehen zunächst aus von der Folge von Glockenkurven

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \quad (\text{C.25})$$

mit $\varepsilon > 0$. Mit kleiner werdendem ε werden diese Glockenkurven immer schmaler und höher.



Verlauf der Funktion $y(x, \varepsilon)$ mit $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwindet die Funktion für $x \neq 0$, während sie für $x = 0$ divergiert.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, \varepsilon) = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ \infty & x = 0. \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

Als essentielle Eigenschaft resultiert, dass die unter den Kurven (C.25) liegenden Flächen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x, \varepsilon) dx = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{\varepsilon} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 \quad (\text{C.27})$$

stets eins sind, unabhängig von ε . Nun betrachten wir für stetige Funktionen $f(x)$ das Integral

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) y(x, \varepsilon) dx \quad (\text{C.28})$$

als Funktion des Parameters ε . Für den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ schreiben wir formal

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) y(x, \varepsilon) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx . \quad (\text{C.29})$$

Die auf diese Weise definierte Dirac'sche δ -Funktion ist keine Funktion im Sinne der gewöhnlichen Analysis. Die Bildung des Grenzwertes $\varepsilon \rightarrow 0$ ist mit der Integration über x nicht vertauschbar.

Zur Berechnung des Grenzwertes (C.29) machen wir im Integral (C.28) die Substitution

$$x = \varepsilon \xi \quad (\text{C.30})$$

und erhalten

$$F(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon \xi) g(\xi) d\xi \quad (\text{C.31})$$

mit

$$g(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\xi^2 + 1} \quad (\text{C.32})$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) d\xi = 1 . \quad (\text{C.33})$$

Bei gleichmäßiger Konvergenz des Integrals $F(\varepsilon)$ ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f die Funktion $F(\varepsilon)$ stetig, so dass in (C.31) der Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ unter dem Integral ausgeführt werden kann.

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0) g(\xi) d\xi = f(0) . \quad (\text{C.34})$$

Für die durch (C.29) definierte Funktion haben wir somit das Ergebnis

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)} . \quad (\text{C.35})$$

Für $f = 1$ ergibt sich insbesondere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 . \quad (\text{C.36})$$

Anhand dieser Beziehung erkennen wir auch, dass die δ -Funktion nicht dimensionslos ist. Vielmehr gilt

$$\dim \delta(x) = \dim \frac{1}{x} . \quad (\text{C.37})$$

Wegen des Grenzwertes $\varepsilon \rightarrow 0$ in (C.29) kann man das Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ auch durch eine Integration über ein kleines Intervall der Umgebung des Nullpunktes ($-a < x < +a$) ersetzen,

$$\int_{-a}^{+a} f(x) \delta(x) dx = f(0) . \quad (\text{C.38})$$

An Stelle der speziellen Glockenkurve (C.25) lassen sich für $y(x, \varepsilon)$ auch andere Funktionen wählen, die bei gleichem Vorgehen ebenfalls auf die δ -Funktion führen, z. B.

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-x^2/(2\varepsilon^2)} , \quad (\text{C.39})$$

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \left(\frac{\sin(x/\varepsilon)}{x/\varepsilon} \right)^2 , \quad (\text{C.40})$$

$$y(x, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } |x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{für } |x| > \frac{\varepsilon}{2} . \end{cases} \quad (\text{C.41})$$

Für all diese Funktionen gilt nämlich ebenfalls

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} g(\xi) \quad (\text{C.42})$$

mit

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) d\xi = 1 . \quad (\text{C.43})$$

Zur Anwendung der δ -Funktion sei das folgende physikalische Beispiel angeführt. Betrachtet man eine im Grenzfall punktförmige Ladung q , die sich an der Stelle $x = 0$

befinden soll, so lässt sich diese formal auch als kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(x)$ schreiben, wenn man

$$\rho(x) = q \delta(x) \quad (\text{C.44})$$

setzt. Für die Gesamtladung ergibt sich dann nämlich

$$\int \rho(x) dx = \int q \delta(x) dx = q . \quad (\text{C.45})$$

Führt man in den Glockenkurven (C.25) eine Translation $x \rightarrow x - x'$ aus, so liegt das Maximum an der Stelle $x = x'$. In diesem Fall ersetzen wir in der Definitionsgleichung (C.29) $\delta(x)$ durch $\delta(x - x')$ und erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x') dx = f(x') . \quad (\text{C.46})$$

Es wird der Wert der Funktion f an der Stelle x' herausprojiziert.

Die Beziehung (C.46) zeigt eine Analogie zwischen der Dirac'schen δ -Funktion für kontinuierliches x und dem Kronecker-Symbol $\delta_{xx'}$ für diskretes x . Denn aus

$$\delta_{xx'} = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x' \\ 1 & \text{für } x = x' \end{cases} \quad (\text{C.47})$$

folgt

$$\sum_x f_x \delta_{xx'} = f_{x'} . \quad (\text{C.48})$$

Die δ -Funktion kann als Erweiterung des Kronecker-Symbols für kontinuierliche x verstanden werden.

In mehreren Variablen x_1, x_2, \dots ist die δ -Funktion durch

$$\delta(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \dots) = \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \dots \quad (\text{C.49})$$

definiert. Sie hat die Eigenschaft

$$\int_G f(x_1, x_2, \dots) \delta(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \dots) dx_1 dx_2 \dots = f(x'_1, x'_2, \dots) . \quad (\text{C.50})$$

Die Integration ist hierbei über ein Gebiet G zu erstrecken, das den Punkt (x'_1, x'_2, \dots) enthält.

Wir wollen nun einige Eigenschaften der δ -Funktion behandeln. Ist $g(x)$ eine stetige Funktion mit nur einfachen Nullstellen x_n

$$g(x_n) = 0 , \quad (\text{C.51})$$

$$g'(x_n) \neq 0 , \quad (\text{C.52})$$

so gilt

$$\delta[g(x)] = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n) . \quad (\text{C.53})$$

Die Summe in (C.53) erstreckt sich über die Nullstellen x_n . Wegen der bereits diskutierten Eigenschaft der δ -Funktion

$$\int_{-a}^{+a} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (\text{C.54})$$

genügt es bei der Auswertung des Integrals

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta[g(x)] f(x) dx \quad (\text{C.55})$$

allein die Beiträge, die von den Umgebungen der einzelnen Nullstellen x_n herrühren, zu betrachten,

$$I = \sum_n \int_{x_n-a}^{x_n+a} \delta[g(x)] f(x) dx . \quad (\text{C.56})$$

Hierbei ist a kleiner als der Abstand zwischen zwei Nullstellen. Mit Hilfe von

$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} \quad (\text{C.57})$$

und daher

$$dx = \frac{dg}{g'(x)} \quad (\text{C.58})$$

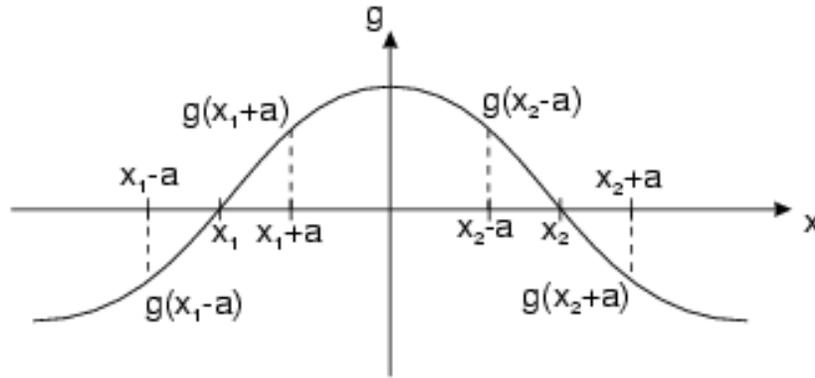
sowie der Umkehrfunktion $x = x(g)$ in den Umgebungen der Nullstellen lassen sich die einzelnen Beiträge als Integrale über g schreiben

$$I = \sum_n \int_{g(x_n-a)}^{g(x_n+a)} \delta(g) f[x(g)] \frac{dg}{g'[x(g)]} . \quad (\text{C.59})$$

Diese Integrale sind aber aufgrund der Definition der δ -Funktion gleich den Funktionswerten an den Stellen $g = 0$, so dass man mit $x(g = 0) = x_n$ erhält

$$I = \sum_n f(x_n) \frac{1}{|g'(x_n)|} . \quad (\text{C.60})$$

Das Betragszeichen bedarf einer besonderen Erläuterung. Wir betrachten die Funktion $g(x)$ mit ihren Nullstellen.



Es ist der Betrag von g' zu nehmen, weil bei negativer Neigung von g die Integration in der negativen g -Achse erfolgt [$g(x_2 - a) \rightarrow g(x_2 + a)$]. Den Ausdruck (C.60) können wir aber auch in der Form

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n) f(x) dx \quad (\text{C.61})$$

schreiben. Damit ist (C.53) bewiesen. Speziell folgt aus (C.53)

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|} \delta(x) . \quad (\text{C.62})$$

Setzt man insbesondere $\lambda = -1$, so ergibt sich, dass $\delta(x)$ eine gerade Funktion ist

$$\delta(-x) = \delta(x) . \quad (\text{C.63})$$

Um eine weitere wichtige Eigenschaft der δ -Funktion abzuleiten, ersetzen wir $f(x)$ durch das Produkt $g(x) f(x)$. Wir erhalten so

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) \delta(x) dx = g(0) f(0) = g(0) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx . \quad (\text{C.64})$$

Es gilt also

$$g(x) \delta(x) = g(0) \delta(x) . \quad (\text{C.65})$$

Wir können auch die Ableitung der δ -Funktion diskutieren. Zunächst bilden wir die Ableitung $\frac{d}{dx} y(x, \varepsilon)$ der Funktion $y(x, \varepsilon)$. Es folgt

$$y'(x, \varepsilon) = -\frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon x}{(\varepsilon^2 + x^2)^2} . \quad (\text{C.66})$$

Nun betrachten wir für differenzierbare Funktionen $f(x)$ die Integrale

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) y'(x, \varepsilon) dx . \quad (\text{C.67})$$

Den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ schreiben wir

$$I(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) y'(x, \varepsilon) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x) dx . \quad (\text{C.68})$$

$\delta'(x)$ nennen wir die Ableitung der Dirac'schen δ -Funktion. Den Grenzwert berechnen wir durch partielle Integration

$$I(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x) y(x, \varepsilon) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) y(x, \varepsilon) dx . \quad (\text{C.69})$$

Wenn $f(x) y(x, \varepsilon)$ im Unendlichen verschwindet, ist der erste Term Null. Für den zweiten Term erhalten wir $-f'(0)$, also die negative Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = 0$. Es gilt demnach

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x) dx = -f'(0) . \quad (\text{C.70})$$

Wenn wir noch eine Translation um eine Strecke x' vornehmen, folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x - x') dx = -f'(x') . \quad (\text{C.71})$$

C.3 Die Sprungfunktion

Wir betrachten nun die Integrale

$$Y(x, \varepsilon) = \int_{-\infty}^x y(x', \varepsilon) dx' . \quad (\text{C.72})$$

Mit den zuerst angegebenen Glockenkurven ergibt sich

$$Y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{x}{\varepsilon} + \frac{\pi}{2} \right) . \quad (\text{C.73})$$

Lassen wir den Parameter ε gegen Null gehen, so nähern sich diese Funktionen dem Einheitssprung

$$\Theta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y(x, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 . \end{cases} \quad (\text{C.74})$$

Diese Sprungfunktion können wir als Integral über die δ -Funktion bei variabler oberer Grenze schreiben

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x') dx' . \quad (\text{C.75})$$

Dies bedingt auch, dass die δ -Funktion die Ableitung der Sprungfunktion ist, d. h.

$$\delta(x) = \frac{d\Theta(x)}{dx} . \quad (\text{C.76})$$

C.4 Der Levi-Civita-Tensor

Den total antisymmetrischen Tensor dritter Stufe ϵ_{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3$) nennt man auch den Levi-Civita-Tensor. Er ist mittels

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i, j, k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{falls } i, j, k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (\text{C.77})$$

Also ist, z.B., $\epsilon_{123} = 1$, $\epsilon_{132} = -1$ und $\epsilon_{133} = 0$. Aus (C.77) folgt sofort

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k , \quad (\text{C.78})$$

Für beliebige Vektoren (auch Operatoren) $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. In (C.78) wurde die Einstein'sche Summenkonvention verwendet. Aus (C.77) folgt auch

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} . \quad (\text{C.79})$$

Mit Hilfe des total antisymmetrischen Tensors kann man allerlei Formeln aus der Vektoranalysis herleiten, z.B.

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} a_j b_l c_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_j b_l c_m , \quad (\text{C.80})$$

wobei wir $\epsilon_{ijk}\epsilon_{kij}$ (zyklische Vertauschung) verwendet haben. Also

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_j \mathbf{b} c_j - a_j b_j \mathbf{c} . \quad (\text{C.81})$$

Diese Formel gilt immer (solange man die Reihenfolge nicht vertauscht), auch z.B. für $\mathbf{a} = \nabla$, $\mathbf{b} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{c} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Falls \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} keine Operatoren sind, kann man in (C.81) die Reihenfolge vertauschen und man erhält $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$.

Der Levi-Civita-Tensor ist, genau wie die Determinanten $\det \underline{\underline{A}}$ einer 3×3 -Matrix $\underline{\underline{A}}$, total antisymmetrisch. Es gilt daher

$$\det \underline{\underline{A}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha 1} A_{\beta 2} A_{\gamma 3} . \quad (\text{C.82})$$

C.5 Transformationseigenschaften der Felder

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Eigenschaften der elektromagnetischen Felder und Quellen unter

- Drehungen
- Spiegelungen
- Zeitumkehr.

Als Anwendung für die abgeleiteten Gesetze wird dann der Hall-Effekt erhalten.

C.5.1 Drehungen

Die Drehung eines Vektors um eine bestimmte Achse soll die Eigenschaft besitzen, dass die Länge des Vektors unverändert bleibt. Allein aus dieser Forderung lässt sich die zentrale Bedingung dafür herleiten, dass die Matrix eine Drehmatrix ist. Sei $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein Vektor und $R_{\alpha\beta}$ eine Matrix. Für die Transformation

$$v'_\alpha = R_{\alpha\beta} v_\beta$$

soll dann also $|\vec{v}'| = |\vec{v}|$ gelten:

$$|\vec{v}'|^2 = v'_\alpha v'_\alpha = R_{\alpha\beta} v_\beta R_{\alpha\gamma} v_\gamma = (R^T)_{\beta\alpha} R_{\alpha\gamma} v_\beta v_\gamma \stackrel{!}{=} v_\alpha v_\alpha \Rightarrow (R^T)_{\beta\alpha} R_{\alpha\gamma} \stackrel{!}{=} \delta_{\beta\gamma} .$$

Also lautet die Bedingung an $\underline{\underline{R}}$ Orthogonalität:

$$\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^{-1} .$$

Mit dem Determinantensatz bekommt man

$$\det(\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}}) = \det \underline{\underline{R}}^T \det \underline{\underline{R}} = 1 \Rightarrow \det \underline{\underline{R}} = \pm 1 .$$

Für $\det \underline{\underline{R}} = 1$ nennt man die Drehung *eigentlich*, für $\det \underline{\underline{R}} = -1$ *uneigentlich*. Es handelt sich dann um eine mit einer Spiegelung verknüpfte Drehung.

Wie verhalten sich nun verschiedene Objekte unter Drehungen? Zunächst ist es offensichtlich, dass *Skalare* unter Drehungen *invariant* sind. Komplizierter wird es mit dem Kreuzprodukt. Sei $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$, also

$$A_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\beta C_\gamma .$$

Was passiert mit \vec{A} , wenn \vec{B} und \vec{C} einer Drehung unterworfen werden? Es gilt $\vec{A}' = \vec{B}' \times \vec{C}'$, also

$$A'_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (R_{\beta\delta} B_\delta) (R_{\gamma\eta} C_\eta) = \epsilon_{\chi\beta\gamma} (R_{\beta\delta} B_\delta) (R_{\gamma\eta} C_\eta) (R_{\chi\nu} R_{\alpha\nu}) .$$

Dabei wurde unter Verwendung der Orthogonalität von \underline{R} einfach eine Einheitsmatrix $R)_{\chi\nu} (R^T)_{\nu\alpha} = R_{\chi\nu} R_{\alpha\nu} = \delta_{\chi\alpha}$ hinten angehängt. Nun muss man die spezielle Darstellung der Determinante (C.82)

$$\det \underline{R} = \epsilon_{\chi\beta\gamma} R_{\chi 1} R_{\beta 2} R_{\gamma 3} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{\nu\delta\eta} \det \underline{R} = \epsilon_{\chi\beta\gamma} R_{\chi\nu} R_{\beta\delta} R_{\gamma\eta}$$

benutzen. Durch sie bekommt man dann

$$\begin{aligned} A'_\alpha &= (\epsilon_{\chi\beta\gamma} R_{\chi\nu} R_{\beta\delta} R_{\gamma\eta}) (R_{\alpha\nu} B_\delta C_\eta) = (\epsilon_{\nu\delta\eta} \det \underline{R}) (R_{\alpha\nu} B_\delta C_\eta) = \\ &= (\det \underline{R}) R_{\alpha\nu} (\epsilon_{\nu\delta\eta} B_\delta C_\eta) = \det \underline{R} R_{\alpha\nu} A_\nu . \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis besagt, dass sich Kreuzprodukte unter eigentlichen Drehungen ganz normal verhalten, unter uneigentlichen Drehungen aber die zugehörige Spiegelung einfach nicht 'mitmachen'. Solche Vektoren heißen *Pseudovektoren*. Durch die Determinante der Drehmatrix wird jede eventuell in der Drehung enthaltene Spiegelung wieder eliminiert: Pseudovektoren sind invariant unter Spiegelungen.

C.5.2 Räumliche Spiegelung

Hierzu ist das meiste bereits bei den Drehungen abgehandelt worden. Die einer reinen Spiegelung zugeordnete Transformationsmatrix hat nur Diagonalelemente; sie sind alle vom Betrag 1, wobei eine ungerade Anzahl (also eines oder alle drei) von ihnen negativ ist. Dann ist also $\det \underline{R} = -1$. Unter Spiegelungen wird der Unterschied zwischen Vektoren (auch *polare* Vektoren) und Pseudovektoren (auch *axial* Vektoren) deutlich:

a) *polare Vektoren* : $\vec{v} \longrightarrow \vec{v}' = -\vec{v}$

b) *axiale Vektoren* : $\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A}$

Auch bei Skalaren gibt es eine Unterscheidung in *Skalare* und *Pseudoskalare*, je nachdem, ob bei Spiegelungen das Vorzeichen bleibt oder sich ändert. Demnach ist $\vec{A}\vec{B}$ ein Skalar, falls \vec{A} und \vec{B} Vektoren sind. Hingegen ist $\vec{A}(\vec{B} \times \vec{C})$ ein Pseudoskalar: Er ändert unter räumlicher Spiegelung der drei Vektoren \vec{A} , \vec{B} und \vec{C} sein Vorzeichen.

C.5.3 Zeitumkehr

Zeitumkehr bedeutet die Inversion der Zeitachse: $t \longrightarrow t' = -t$. Es ist klar, dass sich dabei der Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ nicht ändert, wohl aber seine zeitliche Ableitung: $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{r} \rightarrow \vec{v}' = -\vec{v}$.

Wir untersuchen nun die Felder in den Maxwell-Gleichungen für Vakuum auf ihr Verhalten unter räumlicher Spiegelung und Zeitumkehr. Zunächst betrachten wir die Poisson-Gleichung

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 4\pi\rho .$$

Da ρ ein Skalar und $\vec{\nabla}$ ein polarer Vektor ist, muss \vec{E} ein polarer Vektor sein. Das Verhalten von \vec{E} unter Zeitumkehr ergibt sich aus der Newton'schen Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}$$

Offensichtlich ist \vec{r} invariant (gerade) unter Zeitumkehr, also auch \vec{E} .

Die Flussdichte \vec{B} ist ein *axialer* Vektor, wie sich aus dem Induxionsgesetz

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{\text{axial}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

ergibt. Dann ist auch $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ ist axial. Außerdem ist \vec{B} offenbar ungerade bezüglich Zeitumkehr, denn $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ ist gerade - die Zeitableitung muss durch ein weiteres Minuszeichen kompensiert werden.

In unserer Betrachtung fehlt noch der Vektor \vec{j} . Aus

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{\text{polar}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}}_{\text{polar}}$$

erhält man \vec{j} als polar und ungerade unter Zeitumkehr. Tabelle 4.1 enthält eine Zusammenfassung der Ergebnisse. Abgesehen von den vier hier betrachteten Größen lassen sich auch

Größe	Art	Zeitumkehr	Spiegelung
\vec{E}	Vektor	gerade	polar
\vec{B}	Pseudovektor	ungerade	axial
\vec{j}	Vektor	ungerade	polar
$\vec{\rho}$	Skalar	gerade	invariant

Tabelle 4.1: Das Verhalten der Felder und Quellen unter räumlicher Spiegelung und Zeitumkehr.

noch andere (z.B. der Spannungstensor) in dieses Schema einordnen, siehe dazu [9, Kap. 6 .11].

Anwendung

Als Anwendung für die gewonnenen Erkenntnisse betrachten wir den Hall-Effekt. Eine Probe sei einem magnetischen Feld \vec{B} senkrecht zu einem Stromfluss \vec{I} ausgesetzt (dieser Strom wird durch ein äußeres Feld hervorgerufen). Bekanntlich stellt sich dann entlang der Achse senkrecht zu \vec{I} und \vec{B} ein elektrisches Feld ein. Dieser Vorgang soll genauer untersucht werden. Was man kennt, ist das Ohm'sche Gesetz

$$\vec{j} = \underline{\underline{\sigma}} \vec{E} \Rightarrow j_i = \sigma_{ik} E_k \Rightarrow E_i = \rho_{ik} j_k .$$

Die letzte Gleichung enthält ρ_{ik} als tensoriellen spezifischen Widerstand. Dieser ist nun irgendeine Funktion des Magnetfeldes \mathbf{H} , und unter Berücksichtigung dieser Tatsache und der Eigenschaften der Felder und Quellen unter räumlicher Drehung soll ein verallgemeinertes Ohm'sches Gesetz hergeleitet werden, das kleine \vec{H} -Felder bis zur zweiten Ordnung berücksichtigt.

Die Transformationsformeln für die beteiligten Größen lauten

$$E'_i = R_{ip}E_p \quad j'_k = R_{kq}j_q \quad H'_l = R_{ls}H_s \det \underline{\underline{R}} .$$

Zunächst muss ρ_{ik} nach Potenzen von \vec{H} entwickelt werden. Für \vec{E} bedeutet das

$$E_i = \rho_{ik}^0 j_k + \rho_{ikl} j_k H_l + \rho_{iklm} j_k H_l H_m . \quad (\text{C.83})$$

Dreht man nun das Koordinatensystem mittels einer orthogonalen Transformationsmatrix, so darf sich die Struktur dieser Entwicklung nicht ändern, nur dass jetzt die transformierten Felder eingesetzt sind. Mit Umbenennung einiger Indizes (das passiert hier öfter) ergibt sich so

$$R_{\alpha p} E_p = \rho_{ik}^0 R_{kq} j_q + \rho_{\alpha ki} R_{kq} j_q \det \underline{\underline{R}} R_{ls} H_s + \rho_{\alpha klm} R_{kq} j_q R_{ls} H_s R_{mt} H_t .$$

Und dreht man jetzt mit der inversen Matrix wieder zurück, dann muss das alte \vec{E} -Feld herauskommen. Also ist

$$E_i = \rho_{\alpha k}^0 R_{\alpha i} R_{kq} j_q + \rho_{\alpha kl} R_{\alpha i} R_{kq} R_{ls} \det \underline{\underline{R}} j_q H_s + \rho_{\alpha klm} R_{\alpha i} R_{kq} R_{ls} R_{mt} j_q H_s H_t . \quad (\text{C.84})$$

Das muss mit (C.83) übereinstimmen. Der Koeffizientenvergleich bzgl. der Ordnungen in \vec{H} liefert dann die drei Beziehungen

$$\rho_{ik}^0 = \rho_{\alpha q}^0 R_{\alpha i} R_{qk} \quad (\text{C.85})$$

$$\rho_{ikl} = \det \underline{\underline{R}} \rho_{\alpha qs} R_{\alpha i} R_{qk} R_{sl} \quad (\text{C.86})$$

$$\rho_{iklm} = \rho_{\alpha qst} R_{\alpha i} R_{qk} R_{sl} R_{tm} . \quad (\text{C.87})$$

Man sucht jetzt Ausdrücke für ρ_{ik}^0 , ρ_{ikl} und ρ_{iklm} , drei von \vec{H} *unabhängige* Tensoren. Für ρ_{ik}^0 ist das einfach. Wir setzen an, dass das Medium in 0. Ordnung in \vec{H} *isotrop* ist. Demzufolge ist $\rho_{ik}^0 := \rho \delta_{ik}$. Eingesetzt in die rechte Seite von (C.85) gibt das eine wahre Aussage.

Für ρ_{ikl} macht man einen intelligenten Ansatz. Man probiert

$$\rho_{ikl} := -R_H \epsilon_{ikl} ,$$

wobei R_H eine Konstante ist (s.u.). Einsetzen in die rechte Seite von (C.86) liefert

$$-R_H \det \underline{\underline{R}} \underbrace{(\epsilon_{\alpha qs} R_{\alpha i} R_{qk} R_{sl})}_{=\det \underline{\underline{R}} \epsilon_{ikl}} = -R_H \epsilon_{ikl} ,$$

da $(\det \underline{\underline{R}})^2 = 1$. Das haut also auch hin. Bei ρ_{iklm} bieten sich zwei Ansätze an:

- $\rho_{iklm} := \beta_1 \delta_{ik} \delta_{lm}$. Einsetzen in die rechte Seite von (C.87) gibt

$$\beta_1 \delta_{\alpha q} \delta_{st} R_{\alpha i} R_{qk} R_{sl} R_{tm} = \beta_1 \delta_{ik} \delta_{lm} ,$$

also korrekt.

• $\rho_{iklm} := \beta_2 \delta_{il} \delta_{km}$. Die Rechnung geht analog zum ersten Ansatz und führt wieder zu einer korrekten Aussage.

Da beide Ansätze zu richtigen Ergebnissen führen, müssen sie auch beide in die Lösung aufgenommen werden.

Die Entwicklung (C.84) lautet dann mit den eben abgeleiteten Ersetzungen

$$E_i = \rho \delta_{ik} j_k - R_H \epsilon_{ikl} j_k H_l + \beta_1 \delta_{ik} \delta_{lm} j_k H_l H_m + \beta_2 \delta_{ik} \delta_{km} j_k H_l H_m ,$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\vec{E} = p \vec{j} + R_H \vec{H} \times \vec{j} + \beta_1 \vec{j} \vec{H}^2 + \beta_2 (\vec{j} \vec{H}) \vec{H} . \quad (\text{C.88})$$

Ist kein Magnetfeld vorhanden, so überlebt nur der erste Ausdruck auf der rechten Seite und das Medium ist isotrop, wie gefordert. Mit dem Anlegen eines \vec{H} -Feldes erscheinen die höheren Ordnungen der Entwicklung und *das Material wird isotrop!*

C.6 Magnetische Monopole

Die Nichtexistenz von Quellen für die magnetische Flussdichte ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) ist lediglich ein durch nichts widerlegtes Postulat. In der Tat gibt es bisher noch keine experimentellen Hinweise auf magnetische “Monopole“, also Objekte, die Quellen für \vec{B} darstellen; jedoch lassen sich die *möglichen Eigenschaften* dieser Gebilde recht genau vorhersagen. Außerdem bringt ihre Postulierung eine hohe Symmetrie in die Maxwell-Gleichungen. In diesem Abschnitt soll die Frage der magnetischen Monopole jedoch nur kurz angerissen werden.

Die mit magnetischen (“*m*“) Ladungs- und Stromdichten erweiterten Feldgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi \rho_e & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 4\pi \rho_m & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_e . \end{aligned} \quad (\text{C.89})$$

Aus diesen folgt noch eine eigene “magnetische“ Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_m + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m = 0$$

Welche Auswirkungen hat die Hinzufügung magnetischer Quellen? Man betrachte dazu die folgende Feldtransformation:

$$\vec{E} = \vec{E}' \cos \xi + \vec{H}' \sin \xi \quad \vec{H} = -\vec{E}' \sin \xi + \vec{H}' \cos \xi \quad (\text{C.90})$$

$$\vec{D} = \vec{D}' \cos \xi + \vec{B}' \sin \xi \quad \vec{B} = -\vec{D}' \sin \xi + \vec{B}' \cos \xi . \quad (\text{C.91})$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass diese Transformation die Ausdrücke für Poynting-Vektor, Energiedichte und Maxwell-Spannungstensor in die gleichen Ausdrücke für die gestrichenen Felder überführt. Anders gesagt, die drei erwähnten Größen sind invariant gegenüber der Transformation (C.90). Beispiel Poynting-Vektor:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{c}{4\pi} \left((\vec{E}' \cos \xi + \vec{H}' \sin \xi) \times (-\vec{E}' \sin \xi + \vec{H}' \cos \xi) \right) = \\ &= \frac{c}{4\pi} \left(\vec{E}' \times \vec{H}' \cos^2 \xi - \vec{H}' \times \vec{E}' \sin^2 \xi \right) = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}' \times \vec{H}') = \vec{S}' . \end{aligned}$$

Analog gilt $w = w'$ und $T_{ik} = T'_{ik}$. Konsequenterweise transformiert man nun auch die Quellen unter Anwendung von

$$\rho_e = \rho'_e \cos\xi + \rho'_m \sin\xi \quad \vec{j}_e = \vec{j}'_e \cos\xi + \vec{j}'_m \sin\xi \quad (\text{C.92})$$

$$\rho_m = -\rho'_e \sin\xi + \rho'_m \cos\xi \quad \vec{j}_m = \vec{j}'_e \sin\xi + \vec{j}'_m \cos\xi . \quad (\text{C.93})$$

Aus den beiden Gleichungen für die Ladungsdichten lässt sich ρ'_e als Funktion von ρ_e und ρ_m ausdrücken:

$$\rho'_e = \rho_e \cos\xi - \rho_m \sin\xi .$$

Und aus den Transformationsformeln für die Felder gewinnt man

$$\vec{D}' = \vec{D} \cos\xi - \vec{B} \sin\xi .$$

Also wird

$$\vec{\nabla} \vec{D}' = \vec{\nabla} \vec{D} \cos\xi - \vec{\nabla} \vec{B} \sin\xi = 4\pi(\rho_e \cos\xi - \rho_m \sin\xi) = 4\pi\rho'_e .$$

Tatsächlich sind die Maxwell-Gleichungen *invariant* gegenüber der Transformation (C.90-4.58). Der Parameter ξ ist dabei völlig beliebig! Das bedeutet aber, dass er so bestimmt werden kann, dass die magnetische Ladung ρ_m verschwindet - vorausgesetzt, *für alle Teilchen ist das Verhältnis ρ'_m/ρ'_e gleich*. Man sieht das ein, indem man in der obigen Transformationsformel für ρ_m die linke Seite, also ρ_m , gleich 0 setzt. Dann ergibt sich zwanglos

$$\frac{\rho'_m}{\rho'_e} = \tan\xi .$$

In diesem Fall wird dann auch $\vec{j}'_m = 0$. Experimentelle Hinweise auf das Vorhandensein magnetischer Ladung in normaler Materie (Nukleonen) gibt es (innerhalb gewisser Fehlergrenzen) nicht. Das würde also heißen, dass für diese Teilchen das obige Verhältnis konstant ist. Bei anderen, kurzlebigen oder instabilen Teilchen kann man da nicht so sicher sein.

Zum Schluss soll noch die Frage erörtert werden, wie es mit dem Verhalten der magnetischen Quellen unter Spiegelung und Zeitumkehr steht. Da \vec{B} axial und ungerade unter Zeitumkehr ist, muss ρ_m ein *Pseudoskalar* sein, der ebenfalls unter Zeitumkehr ungerade ist. Der Vektor \vec{j}_m muss axial und unter Zeitumkehr gerade sein. Für weitere Informationen zum Thema "magnetische Monopole" ist [A. Sommerfeld, *Elektrodynamik* Kap. 6.12ff] empfehlenswert, ausserdem die dort zitierten Veröffentlichungen.

Anhang D

Kugelkoordinaten

D.1 Der Laplace-Operator

D.1.1 Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ist der Ortsvektor \mathbf{r} durch

$$\mathbf{r} = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)$$

gegeben. Der **Laplace Operator** Δ ist

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} . \quad (\text{D.1})$$

Für den **Gradienten** in Kugelkoordinaten muss man erst ein lokales orthogonormiertes Dreibein \hat{e}_r , \hat{e}_φ und \hat{e}_ϑ definieren:

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta) \\ \hat{e}_\varphi &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \\ \hat{e}_\vartheta &= (\cos \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \cos \vartheta, -\sin \vartheta) . \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Dann ist

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{e}_\vartheta \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} . \quad (\text{D.3})$$

Für das totale Differential $d\mathbf{r}$ des Ortsvektors gilt analog:

$$d\mathbf{r} = \hat{e}_r dr + \hat{e}_\varphi r d\varphi + \hat{e}_\vartheta r \sin \vartheta d\vartheta . \quad (\text{D.4})$$

D.1.2 Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Wir wollen nun die Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta \phi = 0 \quad (\text{D.5})$$

untersuchen. Wir verwenden hierbei Kugelkoordinaten, deren Anwendung in der Elektrostatik oftmals von Vorteil ist. In Kugelkoordinaten lautet der Laplace-Operator

$$\Delta\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 . \quad (\text{D.6})$$

Wir werden uns zunächst beschränken auf Felder mit axialer Symmetrie, d.h. ϕ ist unabhängig vom Winkel φ . Es verbleibt

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} \right) = 0 . \quad (\text{D.7})$$

Für die Lösung machen wir einen Separationsansatz

$$\phi(r, \vartheta) = R(r)P(\vartheta) . \quad (\text{D.8})$$

Einsetzen in (D.7) führt auf

$$P \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial P}{\partial\vartheta} \right) = 0 . \quad (\text{D.9})$$

Wir dividieren durch RP , es resultiert

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{P \sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) = 0 . \quad (\text{D.10})$$

Der zweite Term ist vollkommen unabhängig von r , also muß es auch der erste sein. Beide Terme sind konstant. Es ist damit

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = k \quad (\text{D.11})$$

und

$$\frac{1}{P \sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) = -k . \quad (\text{D.12})$$

Wir untersuchen zunächst die Radialgleichung

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - kR = 0 . \quad (\text{D.13})$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung hat die Form

$$R = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}} . \quad (\text{D.14})$$

Wir setzen diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein

$$\begin{aligned} & An(n-1)r^n + 2Anr^n - kAr^n \\ & + B(-n-1)(-n-2)r^{-n-1} + 2B(-n-1)r^{-n-1} - kB r^{-n-1} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Aus der zweiten Zeile setzen wir

$$(n+1)(n+2) - 2(n+1) = n^2 + 3n + 2 - 2n - 2 = n^2 + n = n(n+1) . \quad (\text{D.16})$$

Damit wird die Gleichung (D.15) befriedigt durch

$$n(n+1) = k . \quad (\text{D.17})$$

Wir untersuchen jetzt den winkelabhängigen Teil der Laplace-Gleichung

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dP}{d\vartheta} \right) + n(n+1) \sin \vartheta P = 0 . \quad (\text{D.18})$$

Wir setzen jetzt

$$x = \cos \vartheta . \quad (\text{D.19})$$

Dies ergibt

$$\frac{df}{d\vartheta} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \frac{df}{dx} = -(1-x^2)^{1/2} \frac{df}{dx} . \quad (\text{D.20})$$

Wir erhalten damit

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + n(n+1)P = 0 . \quad (\text{D.21})$$

Dies ist gerade wieder die Legendre-Differentialgleichung mit den Legendre-Polynomen als Lösung

$$P = P_n(\cos \vartheta) . \quad (\text{D.22})$$

Als allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten unter der Annahme axialer Symmetrie haben wir damit

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \vartheta) . \quad (\text{D.23})$$

D.2 Legendre-Polynome

Als ein weiteres wichtiges Beispiel eines vollständigen Funktionensystems, das insbesondere in der Elektrostatik von großer Bedeutung ist, wollen wir die Kugelfunktionen einführen. Zunächst gehen wir aus von der Funktion

$$\psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} , \quad (\text{D.24})$$

die auch in der Form

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \alpha + r'^2}} \quad (\text{D.25})$$

dargestellt werden kann. α ist der Zwischenwinkel von \vec{r} und \vec{r}' . Die Wurzel soll nun in eine Potenzreihe nach dem Verhältnis der Abstände r und r' entwickelt werden. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} r_{<} &= \max(r, r') \\ r_{>} &= \min(r, r') . \end{aligned}$$

Damit ist immer ($r \neq r'$)

$$\frac{r_{<}}{r_{>}} < 1, \quad (\text{D.26})$$

und wir erhalten die folgende Entwicklung

$$\frac{1}{r_{>}\sqrt{1 - 2\frac{r_{<}}{r_{>}}\cos\alpha + \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2}} = \frac{1}{r_{>}} \left[1 - \cos\alpha \frac{r_{<}}{r_{>}} + \frac{1}{2} (3\cos^2\alpha - 1) \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2 + \dots \right]. \quad (\text{D.27})$$

Die hier auftretenden Koeffizienten sind die Legendre-Polynome $P_l(\cos\alpha)$. Die Entwicklung können wir dann schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{>}\sqrt{1 - 2\frac{r_{<}}{r_{>}}\cos\alpha + \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2}} &= \frac{1}{r_{>}} \left[P_0 + P_1(\cos\alpha) \frac{r_{<}}{r_{>}} + P_2(\cos\alpha) \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + P_3(\cos\alpha) \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^3 + \dots \right] \\ &= \boxed{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos\alpha) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}. \quad (\text{D.28}) \end{aligned}$$

Wir setzen

$$x = \cos\alpha \quad (\text{D.29})$$

mit $x \in [-1, 1]$.

Die ersten Legendre-Polynome haben die folgende Gestalt

$$P_0(x) = 1, \quad (\text{D.30})$$

$$P_1(x) = x, \quad (\text{D.31})$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (\text{D.32})$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x). \quad (\text{D.33})$$

Wir erkennen schon hier, daß die Legendre-Polynome zu geradem Index gerade Funktionen sind, die zu ungeradem Index sind ungerade Funktionen. Die Legendre-Polynome können mittels der folgenden Relation berechnet werden

$$\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l}. \quad (\text{D.34})$$

Dies ist für die ersten der oben angegebenen Legendre-Polynome leicht zu verifizieren. (D.34) nennt man auch Rodrigues-Formel. Wir hatten gefunden, daß gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_{<}}{r_{>}} \cos \alpha + \left(\frac{r_{<}}{r_{>}}\right)^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^l} P_l(\cos \alpha) \quad (\text{D.35})$$

Mit $x = \cos \alpha$ und

$$t = \frac{r_{<}}{r_{>}} \quad (\text{D.36})$$

schreiben wir dies auch als

$$g(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (\text{D.37})$$

mit $|t| < 1$. $g(t, x)$ wird als generierende Funktion bezeichnet. Damit folgt

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = \frac{x - t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} . \quad (\text{D.38})$$

Dies ergibt nach Multiplikation mit $(1 - 2xt + t^2)$

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} + (t - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = 0 . \quad (\text{D.39})$$

Wir führen jetzt einen Koeffizientenvergleich in Potenzen von t durch und schreiben

$$\sum_{m=0}^{\infty} m P_m(x) t^{m-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nx P_n(x) t^n + \sum_{s=0}^{\infty} s P_s(x) t^{s+1} + \sum_{s=0}^{\infty} P_s(x) t^{s+1} - \sum_{n=0}^{\infty} x P_n(x) t^n = 0 . \quad (\text{D.40})$$

Zum Koeffizientenvergleich setzen wir

$$m = n + 1 \quad (\text{D.41})$$

und

$$s = n - 1 . \quad (\text{D.42})$$

Dies führt auf

$$(2n + 1)xP_n(x) = (n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) \quad (\text{D.43})$$

mit $n = 1, 2, \dots$. Wir lösen dies auf nach $P_{n+1}(x)$ und bekommen

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) - \frac{[xP_n(x) - P_{n-1}(x)]}{n + 1} . \quad (\text{D.44})$$

Dies ist eine numerisch stabile Rekursionsformel, um aus der Kenntnis von $P_0 = 1$ und $P_1 = x$ alle beliebigen $P_n(x)$ zu ermitteln. Als nächsten Schritt wollen wir die Differentialgleichung ableiten, deren Lösung die Legendre-Polynome sind. Wir differenzieren die generierende Funktion in bezug auf x

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = \frac{t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n \quad (\text{D.45})$$

oder

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n - t \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = 0 . \quad (\text{D.46})$$

Wieder führen wir einen Koeffizientenvergleich durch und erhalten zunächst

$$\sum_{m=0}^{\infty} P'_m(x) t^m - 2x \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{n+1} + \sum_{s=0}^{\infty} P'_s(x) t^{s+2} = 0 . \quad (\text{D.47})$$

Mit $m = n + 1$ und $s = n - 1$ haben wir

$$\boxed{P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) = 2x P'_n(x) + P_n(x)} . \quad (\text{D.48})$$

Eine weitere Relation können wir ableiten, wenn wir die Rekursionsbeziehung differenzieren, d.h.

$$\frac{d}{dx} \{(2n + 1)x P_n(x)\} = (n + 1) P'_{n+1}(x) + n P'_{n-1}(x) . \quad (\text{D.49})$$

Es folgt

$$2(2n + 1)P_n(x) + 2(2n + 1)x P'_n(x) = 2(n + 1) P'_{n+1}(x) + 2n P'_{n-1}(x) . \quad (\text{D.50})$$

Zu dieser Gleichung addieren wir das $(2n + 1)$ -fache von (D.48)

$$\begin{aligned} 2(2n + 1)P_n(x) + 2(2n + 1)x P'_n(x) + (2n + 1)P'_{n+1} + (2n + 1)P'_{n-1}(x) &= \\ 2(n + 1)P'_{n+1}(x) + 2n P'_{n-1}(x) + 2x(2n + 1)P'_n(x) + (2n + 1)P_n(x) . & \end{aligned} \quad (\text{D.51})$$

Dies ergibt

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n + 1)P_n(x) . \quad (\text{D.52})$$

Wir addieren (D.52) und (D.48) und bekommen

$$2P'_{n+1}(x) = 2xP'_n(x) + 2(n + 1)P_n(x) \quad (\text{D.53})$$

und somit

$$P'_{n+1}(x) = (n + 1)P_n(x) + x P'_n(x) . \quad (\text{D.54})$$

Subtraktion von (D.52) von (D.48) ergibt

$$2P'_{n-1}(x) = 2x P'_n(x) + P_n(x) - (2n + 1)P_n(x), \quad (\text{D.55})$$

also

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x). \quad (\text{D.56})$$

Wir behaupten ferner, daß gilt

$$(1 - x^2) P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x). \quad (\text{D.57})$$

Es folgt

$$\begin{aligned} nP_{n-1}(x) &= (1 - x^2) P'_n(x) + nxP_n(x) \\ &= (2n + 1)xP_n(x) - (n + 1)P_{n+1}(x), \end{aligned} \quad (\text{D.58})$$

wobei wir im letzten Schritt die Rekursionsformel der Legendre-Polynome ausgenutzt haben. Dies führt sofort auf

$$(1 - x^2) P'_n(x) = (n + 1)xP_n(x) - (n + 1)P_{n+1}(x). \quad (\text{D.59})$$

Wir müssen aber noch (D.57) beweisen. Wir gehen hierzu von (D.54) aus und ersetzen n durch $n - 1$. Es folgt

$$P'_n(x) = nP_{n-1}(x) + xP'_{n-1}(x). \quad (\text{D.60})$$

Aus (D.56) resultiert

$$xP'_n(x) = nP_n(x) + P'_{n-1}(x). \quad (\text{D.61})$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit x und subtrahieren das Ergebnis von (D.60). Wir haben dann das Ergebnis

$$(1 - x^2) P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x). \quad (\text{D.62})$$

Wir differenzieren jetzt diesen Ausdruck. Es resultiert

$$-2xP'_n(x) + (1 - x^2) P''_n(x) = nP'_{n-1}(x) - nP_n(x) - nxP'_n(x). \quad (\text{D.63})$$

Es folgt weiter nach (D.56)

$$(1 - x^2) P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n^2P_n(x) - nxP'_n(x) + nP_n(x) + nxP'_n(x) = 0 \quad (\text{D.64})$$

und somit

$$(1 - x^2) P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n + 1)P_n(x) = 0. \quad (\text{D.65})$$

Dies ist die Legendre-Differentialgleichung. Es ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wir wollen nun die Orthogonalitätsrelationen der Legendre-Polynome ableiten. Dazu schreiben wir die Legendre-Differentialgleichung um in

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2) P'_n(x)] + n(n + 1)P_n(x) = 0. \quad (\text{D.66})$$

Wir multiplizieren diese Gleichung von links mit $P_m(x)$ und subtrahieren davon den gleichen Ausdruck, wobei die Indices m und n ausgetauscht wurden. Wir integrieren von -1 bis $+1$. Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \left\{ P_m(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2) P'_n(x)] - P_n(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2) P'_m(x)] \right\} dx \\ &= [m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx . \end{aligned} \quad (\text{D.67})$$

Wir integrieren partiell, der ausintegrierte Anteil verschwindet aufgrund des Faktors $(1-x^2)$. Es verbleibt

$$[m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = 0 . \quad (\text{D.68})$$

Für $m \neq n$ folgt daher

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = 0} \quad (\text{D.69})$$

oder mit $x = \cos \Theta$

$$\int_0^\pi P_n(\cos \Theta) P_m(\cos \Theta) \sin \Theta d\Theta = 0 . \quad (\text{D.70})$$

Wir müssen jetzt noch den Spezialfall $n = m$ studieren. Dabei gehen wir aus von der generierenden Funktion

$$(1 - 2tx + t^2)^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \right]^2 . \quad (\text{D.71})$$

Wir integrieren über x im Intervall $[-1, +1]$. Es folgt

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx . \quad (\text{D.72})$$

Wir substituieren

$$y = 1 - 2tx + t^2 . \quad (\text{D.73})$$

Damit erhalten wir

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{t - 2tx + t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) . \quad (\text{D.74})$$

Wir entwickeln diesen Ausdruck in eine Potenzreihe

$$\frac{1}{t} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} . \quad (\text{D.75})$$

Der Vergleich mit (D.72) zeigt

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} . \quad (\text{D.76})$$

Damit ist die Orthogonalitätsrelation abgeleitet.

Wir stellen nun eine Funktion in einer Reihenentwicklung in Legendre-Polynomen dar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) . \quad (\text{D.77})$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten a_n multiplizieren wir mit $P_m(x)$ und integrieren. Es ergibt sich

$$\frac{2}{2m+1} a_m = \int_{-1}^{+1} f(x) P_m(x) dx . \quad (\text{D.78})$$

Damit haben wir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left(\int_{-1}^{+1} f(t) P_n(t) dt \right) P_n(x) . \quad (\text{D.79})$$

Dies ist die Legendre-Reihe.

D.3 Kugelfunktionen

Wir gehen wieder aus von der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\Delta V(r, \vartheta, \varphi) = 0 . \quad (\text{D.80})$$

Wieder machen wir einen Separationsansatz

$$V(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi) . \quad (\text{D.81})$$

Nach Abseparation des Radialanteils bekommen wir

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{\Theta(\vartheta)}{\sin^2 \vartheta} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + n(n+1) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi) = 0 . \quad (\text{D.82})$$

Die Separationskonstante für den Radialanteil haben wir wieder $n(n+1)$ genannt.

Von der Bedingung der axialen Symmetrie machen wir jetzt nicht mehr Gebrauch. Wir dividieren (D.82) durch $\Phi(\varphi)\Theta(\vartheta)$. Es folgt

$$\frac{1}{\sin \vartheta \Theta(\vartheta)} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{\Phi(\varphi) \sin^2 \vartheta} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + n(n+1) = 0 . \quad (\text{D.83})$$

Multiplikation mit $\sin^2 \vartheta$ führt schließlich auf

$$\frac{\sin \vartheta}{\Theta(\vartheta)} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + n(n+1) \sin^2 \vartheta + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = 0 . \quad (\text{D.84})$$

Offensichtlich separiert auch diese Differentialgleichung in einen φ -abhängigen und in einen ϑ -abhängigen Anteil. Die Separationskonstante nennen wir $-m^2$. Es folgt

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 \quad (\text{D.85})$$

oder

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0 . \quad (\text{D.86})$$

Der φ -abhängige Teil der Laplace-Gleichung lässt sich leicht lösen durch

$$\Phi = e^{im\varphi} = \cos m\varphi + i \sin m\varphi . \quad (\text{D.87})$$

Die Orthogonalitätsrelation lautet damit

$$\int_0^{2\pi} e^{-im_1\varphi} e^{+im_2\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{m_1 m_2} . \quad (\text{D.88})$$

Die normierte Lösungsfunktion können wir also angeben als

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} . \quad (\text{D.89})$$

Damit Φ eine eindeutige Funktion vom Azimuthwinkel φ ist, muss m ganzzahlig sein, d. h.

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{D.90})$$

Eindeutigkeit bedeutet

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) . \quad (\text{D.91})$$

Damit ist die Lösungsfunktion bezüglich φ vollständig bestimmt. Wir wollen jetzt die verbleibende Differentialgleichung bezüglich der Variablen ϑ untersuchen. Es gilt

$$\boxed{\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] \Theta = 0} \quad (\text{D.92})$$

Wieder setzen wir

$$x = \cos \vartheta . \quad (\text{D.93})$$

Damit transformiert sich die Gleichung (D.92) in

$$(1 - x^2)\Theta'' - 2x\Theta' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0 \quad (\text{D.94})$$

oder

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0} . \quad (\text{D.95})$$

Wir setzen jetzt

$$\Theta = (1-x^2)^{m/2} v_m(x) \quad (\text{D.96})$$

und setzen dies in (D.94) ein. Es resultiert

$$\begin{aligned} & (1-x^2) \frac{d}{dx} \left[\frac{m}{2} (1-x^2)^{m/2-1} (-2x) v_m(x) + (1-x^2)^{m/2} v_m'(x) \right] \\ & - 2x \left[\frac{m}{2} (1-x^2)^{m/2-1} (-2x) v_m(x) - (1-x^2)^{m/2} v_m'(x) \right] \\ & + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] (1-x^2)^{m/2} v_m(x) = 0 . \end{aligned} \quad (\text{D.97})$$

Weiter ausgewertet ergibt dies

$$\begin{aligned} & (1-x^2) \left[\frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} - 1 \right) (1-x^2)^{m/2-2} (-2x)^2 v_m(x) - m(1-x^2)^{m/2-1} v_m(x) \right. \\ & \left. - m(1-x^2)^{m/2-1} x v_m'(x) + \frac{m}{2} (1-x^2)^{m/2-1} (-2x) v_m'(x) + (1-x^2)^{m/2} v_m''(x) \right] \\ & - 2x \left[\frac{m}{2} (1-x^2)^{m/2-1} (-2x) v_m(x) + (1-x^2)^{m/2} v_m'(x) \right] \\ & + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] (1-x^2)^{m/2} v_m(x) = 0 . \end{aligned} \quad (\text{D.98})$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $(1-x^2)^{-m/2}$, es folgt

$$\begin{aligned} & (1-x^2) v_m'' + \frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} - 1 \right) (1-x^2)^{-1} (-2x)^2 v_m(x) - m v_m(x) - mx v_m'(x) - mx v_m'(x) \\ & + (2x)^2 \frac{m}{2} (1-x^2)^{-1} v_m(x) - 2x v_m'(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] v_m(x) = 0 . \end{aligned} \quad (\text{D.99})$$

Dies ergibt weiter zusammengefasst

$$\begin{aligned} & (1-x^2) v_m'' - 2(m+1)x v_m' + n(n+1) v_m - m v_m \\ & + \frac{1}{1-x^2} \left[4x^2 \frac{m^2}{4} + 4x^2 \left(-\frac{m}{2} \right) + 4x^2 \frac{m}{2} - m^2 \right] v_m = 0 . \end{aligned} \quad (\text{D.100})$$

Damit haben wir schließlich für v_m als Differentialgleichung

$$(1 - x^2)v_m'' - 2(m + 1)xv_m' + [n(n + 1) - m(m + 1)]v_m = 0 . \quad (\text{D.101})$$

Wir differenzieren diese Differentialgleichung nochmals. Es folgt

$$(1 - x^2)(v_m')'' - 2(m + 2)x(v_m')' + [n(n + 1) - (m + 1)(m + 2)]v_m' = 0 . \quad (\text{D.102})$$

Vergleichen wir dies mit der Differentialgleichung (D.101) so erkennen wir die Lösung

$$v_m' = v_{m+1} \quad (\text{D.103})$$

oder rekursiv weiter

$$v_m(x) = \frac{d^m v_0(x)}{dx^m} . \quad (\text{D.104})$$

Dabei ist $v_0(x)$ die Lösung von

$$(1 - x^2)v_0'' - 2xv_0' + n(n + 1)v_0 = 0 . \quad (\text{D.105})$$

Dies ist aber gerade die Differentialgleichung für die gewöhnlichen Legendre-Polynome $P_n(x)$. Zusammengefasst erhalten wir damit

$$\Theta(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) . \quad (\text{D.106})$$

In der Physik ist es üblich, in die Definition der erweiterten Legendre-Polynome noch einen Phasenfaktor $(-1)^m$ aufzunehmen, d.h.

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) . \quad (\text{D.107})$$

Die Lösung der Differentialgleichung (D.92) sind die assoziierten Legendre-Polynome

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (\text{D.108})$$

mit $x = \cos \vartheta$ und den Legendre-Polynomen $P_l(x)$. Der Faktor $(-1)^m$ ist Konvention. Für $m = 0$ gilt offensichtlich

$$P_l^{m=0}(x) = P_l(x) . \quad (\text{D.109})$$

Mit dieser Beziehung ergibt sich für die Rodrigues-Formel für die assoziierten Legendre-Polynome

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l . \quad (\text{D.110})$$

Die Orthogonalitätsrelation der assoziierten Legendre-Polynome lautet

$$\boxed{\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll}} \quad (\text{D.111})$$

Wir wollen nun die Orthogonalitätsrelation (D.111) beweisen. Hierbei gehen wir von der Rodrigues-Formel aus, und wir nehmen an, dass beide assoziierten Legendre-Polynome den gleichen m -Wert aufweisen. Wir finden

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx = \frac{(-1)^m}{2^{p+q} p! q!} \int_{-1}^1 X^m \left(\frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} X^q dx \quad (\text{D.112})$$

mit $X = x^2 - 1$. Für $p \neq q$ nehmen wir an $p < q$. Wir wenden jetzt die partielle Integration an. Der ausintegrierte Anteil verschwindet jeweils aufgrund des Faktors X . Wir integrieren $(q+m)$ -mal und bekommen

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx = \frac{(-1)^m (-1)^{q+m}}{2^{p+q} p! q!} \int_{-1}^1 \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} \left(X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) X^q dx \quad (\text{D.113})$$

Im Integranden auf der rechten Seite verwenden wir die Leibnitz-Formel bezüglich der n -ten Ableitung eines Produktes

$$\frac{d^n}{dx^n} [A(x) B(x)] = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} A(x) \frac{d^s}{dx^s} B(x) \quad (\text{D.114})$$

mit dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{(n-s)! s!} \quad (\text{D.115})$$

Damit bekommen wir

$$X^q \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} \left(X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) = X^q \sum_{i=0}^{q+m} \frac{(q+m)!}{i! (q+m-i)!} \frac{d^{q+m-i}}{dx^{q+m-i}} X^m \frac{d^{p+m+i}}{dx^{p+m+i}} X^p \quad (\text{D.116})$$

Der Ausdruck X^m enthält keine Potenz von x größer als x^{2m} . Daher muss

$$q+m-i \leq 2m \quad (\text{D.117})$$

gelten, oder die Ableitung verschwindet. Ähnlich folgt

$$p+m+i \leq 2p \quad (\text{D.118})$$

Dies bedingt

$$i \geq q-m \quad (\text{D.119})$$

und

$$i \leq p - m . \quad (\text{D.120})$$

Wir hatten angenommen $p < q$, damit haben diese Ungleichungen keine Lösung, und das Integral verschwindet. Als verbleibenden Fall untersuchen wir nun den Fall $p = q$. Dann können wir noch den Spezialfall $i = q - m$ vorliegen haben. Damit folgt

$$I = \int_{-1}^1 [P_q^m(x)]^2 dx = \frac{(-1)^{q+2m}(q+m)!}{2^{2q}q!(2m)!(q-m)!} \int_{-1}^1 X^q \left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m \right) \left(\frac{d^{2q}}{dx^{2q}} X^q \right) dx . \quad (\text{D.121})$$

Es ist

$$X^m = (x^2 - 1)^m = x^{2m} - m x^{2m-2} + \dots \quad (\text{D.122})$$

und daher

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m = (2m)! . \quad (\text{D.123})$$

Es verbleibt

$$I = \frac{(-1)^{q+2m}(2q)!(q+m)!}{2^{2q}q!(q-m)!} \int_{-1}^1 X^q dx . \quad (\text{D.124})$$

Das Integral auf der rechten Seite lässt sich durch partielle Integration geschlossen auswerten:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx (x^2 - 1)^q &= (-1)^q \int_{-1}^1 dx (1-x)^q (1+x)^q \\ &= \frac{(-1)^q q}{q+1} \int_{-1}^1 dx (1-x)^{q-1} (1+x)^{q+1} \quad (1. \text{ partielle Integration}) \\ &= \frac{(-1)^q q(q-1)}{(q+1)(q+2)} \int_{-1}^1 dx (1-x)^{q-2} (1+x)^{q+2} \quad (2. \text{ partielle Integration}) \\ &= \frac{(-1)^q q! q!}{(2q)!} \int_{-1}^1 dx (1+x)^{2q} \quad (q\text{-te partielle Integration}) \\ &= \frac{(-1)^q q! q!}{(2q)!} \frac{2^{2q+1}}{2q+1} = \frac{(-1)^q 2^{2q+1} q! q!}{(2q+1)!} . \end{aligned} \quad (\text{D.125})$$

Zusammengefasst erhalten wir als Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{p,q} . \quad (\text{D.126})$$

Wir fügen jetzt die Teillösungen für die Winkelvariablen zusammen und definieren die Kugelfunktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ durch

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} . \quad (\text{D.127})$$

Die Orthonormalitätsrelation der Kugelfunktionen lautet damit

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta Y_{l'm'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm} . \quad (\text{D.128})$$

Wir schreiben die ersten Kugelfunktionen explizit aus

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} , \quad (\text{D.129})$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi} , \quad (\text{D.130})$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta , \quad (\text{D.131})$$

$$Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi} , \quad (\text{D.132})$$

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} , \quad (\text{D.133})$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) . \quad (\text{D.134})$$

Für $m = 0$ folgt

$$Y_{l0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \vartheta) . \quad (\text{D.135})$$

Wir wollen eine Funktion auf der Einheitskugel in Kugelfunktionen entwickeln

$$f(\vec{r}, r = 1) = f(r = 1, \vartheta, \varphi) = g(\vartheta, \varphi) . \quad (\text{D.136})$$

Wir bekommen

$$g(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) . \quad (\text{D.137})$$

Aufgrund der Orthogonalitätsrelation folgt für die Entwicklungskoeffizienten a_{lm}

$$a_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) g(\vartheta, \varphi) . \quad (\text{D.138})$$

Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta \Phi(r, \vartheta, \varphi) = 0 \quad (\text{D.139})$$

können wir daher in sphärischen Koordinaten durch eine Reihenentwicklung in Kugelfunktionen darstellen als

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm} r^l + b_{ml} r^{-l-1}] Y_{lm}(\vartheta, \varphi) . \quad (\text{D.140})$$

Als Spezialfall betrachten wir nun noch $g(\vartheta, \varphi)$ für $\vartheta = 0$. Alle Y_{lm} verschwinden für diesen Spezialfall außer für $m = 0$. Damit finden wir

$$[g(\vartheta, \varphi)]_{\vartheta=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} a_{l0} \quad (\text{D.141})$$

mit

$$a_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega P_l(\cos \vartheta) g(\vartheta, \varphi) . \quad (\text{D.142})$$

D.4 Das Additionstheorem der Kugelfunktionen

Wir hatten für die Ortsabhängigkeit der Coulomb-Wechselwirkung die Darstellung gefunden

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \alpha) , \quad (\text{D.143})$$

wobei α der von den Vektoren \vec{r} und \vec{r}' eingeschlossene Winkel ist mit

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos \alpha . \quad (\text{D.144})$$

In diesem Kapitel werden wir mit

$$\vec{r} = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta) , \quad (\text{D.145})$$

$$\vec{r}' = (r' \sin \vartheta' \cos \varphi', r' \sin \vartheta' \sin \varphi', r' \cos \vartheta') \quad (\text{D.146})$$

eine Entwicklung ausgedrückt durch die Winkel ϑ, φ und ϑ', φ' ableiten. Es gilt

$$\boxed{\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) .} \quad (\text{D.147})$$

Für $|\mathbf{r}| > |\mathbf{r}'|$ ist $r_{<}^l/r_{>}^{l+1} = (r')^l/r^{l+1}$, siehe (D.2). Mit

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{r}' &= rr' \sin \vartheta \sin \vartheta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi') + rr' \cos \vartheta \cos \vartheta' \\ &= rr' [\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')] . \end{aligned} \quad (\text{D.148})$$

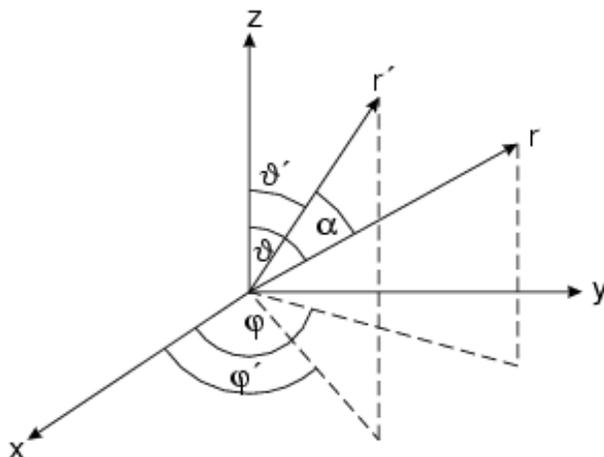
Damit folgt der Zusammenhang für die verschiedenen Winkel

$$\cos \alpha = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') . \quad (\text{D.149})$$

Vergleichen wir die beiden Entwicklungen bezüglich der Coulomb-Wechselwirkung, so muss offensichtlich gelten

$$\boxed{P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) .} \quad (\text{D.150})$$

Dies ist das Additionstheorem für Kugelfunktionen.



Wir wollen nun das Additionstheorem der Kugelfunktionen beweisen. Dazu setzen wir

$$g(\vartheta, \varphi) = Y_{l0}(\vartheta, \varphi) \quad \text{relativ zu } \vec{r} \quad (\text{D.151})$$

$$= \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\alpha, \beta) \quad \text{relativ zu } \vec{r}' . \quad (\text{D.152})$$

Die besondere Wahl des Azimuth-Winkels β ist hierbei irrelevant. Für $\alpha = 0$ haben wir

$$g(\vartheta, \varphi)|_{\alpha=0} = a_{l0} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} . \quad (\text{D.153})$$

Wir multiplizieren (D.152) mit $Y_{l0}^*(\alpha, \beta)$ und integrieren über den Raumwinkel

$$\int g(\vartheta, \varphi) Y_{l0}^*(\alpha, \beta) d\Omega_{(\alpha, \beta)} = a_{l0} . \quad (\text{D.154})$$

Nach (D.151) ist dies gleichzeitig

$$\int Y_{l0}(\vartheta, \varphi) Y_{l0}^*(\alpha, \beta) d\Omega = a_{l0} . \quad (\text{D.155})$$

Für das Legendre-Polynom $P_l(\cos \alpha)$ führen wir jetzt eine Entwicklung durch der Form

$$P_l(\cos \alpha) = \sum_{m=-l}^l b_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) . \quad (\text{D.156})$$

Wir multiplizieren dies mit $Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi)$ und integrieren in bezug auf ϑ und φ . Es resultiert

$$\int P_l(\cos \alpha) Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) d\Omega_{(\vartheta, \varphi)} = b_{lm} . \quad (\text{D.157})$$

Ausgedrückt durch Kugelfunktionen lautet diese Gleichung

$$\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \int Y_{l0}(\alpha, \beta) Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) d\Omega_{(\vartheta, \varphi)} = b_{lm} . \quad (\text{D.158})$$

Da wir über den gesamten Raum integrieren, ist die Polarachse irrelevant. Vergleichen wir (D.158) mit (D.155), so erhalten wir

$$b_{lm}^* = a_{l0} \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} . \quad (\text{D.159})$$

Mit (D.153) bekommen wir

$$b_{lm}^* = \frac{4\pi}{2l+1} g(\vartheta, \varphi)|_{\alpha=0} . \quad (\text{D.160})$$

Für $\alpha \rightarrow 0$ folgt $\vartheta \rightarrow \vartheta'$ und $\varphi \rightarrow \varphi'$. Mit (D.151) können wir (D.160) schreiben als

$$b_{lm}^* = \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\vartheta', \varphi') . \quad (\text{D.161})$$

Dies setzen wir ein in (D.156) und bekommen so

$$P_l(\cos \alpha) = \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) . \quad (\text{D.162})$$