

Elektrodynamik

E. Schachinger und W. Koller

27. Februar 2003

Diese Lernunterlage zur gleichnamigen Vorlesung wurde weitestgehend nach dem Lehrbuch von Rainer J. JELITTO, *Theoretische Physik 3: Elektrodynamik*, Aula Verlag, Wiesbaden (1987) gestaltet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Grundsätzliches	1
1.2	Historisches	2
1.3	Das Wesen der Elektrodynamik	3
2	Die MAXWELLSchen Gleichungen	4
2.1	Die elektrische Ladung	4
2.2	Der elektrische Strom	6
2.3	Die MAXWELLSchen Gleichungen, die Lorentzkraft	12
2.3.1	Die MAXWELLSchen Gleichungen	12
2.3.2	Die Lorentzkraft	14
2.4	Das Superpositionsgesetz	14
2.5	Das inverse Problem	16
2.6	Feldlinien	18
2.7	Die Integralform der MAXWELLSchen Gleichungen	19
2.8	Die Ladungserhaltung	21
3	Die Elektrostatik	22
3.1	Die Grundgleichungen der Elektrostatik	22
3.2	Punktladungen im Vakuum	22
3.3	Das freie Feld beliebiger Ladungsverteilungen	28
3.3.1	Die Poissonsche Differentialgleichung	28
3.3.2	Die freie Greensche Funktion, das POISSONSche Integral	29
3.3.3	Die elektrische Feldenergie	31
3.4	GAUSSSches Gesetz, FARADAYSches Gesetz	35
3.5	Der Plattenkondensator	38
3.6	Das Randwertproblem der Elektrostatik	39
3.6.1	Grundsätzliches	39
3.6.2	Physikalische Realisierung von Randbedingungen	40
3.6.3	Scheinbare Ladungsverteilungen, Spiegel- und Influenz- ladungen	42

3.6.4	Der Eindeutigkeitssatz und die Greensche Funktion des Randwertproblem	48
3.7	Der elektrische Dipol	51
3.8	Räumliche Verteilungen von elektrischen Punktdipolen	56
3.9	Die Multipolentwicklung	57
3.10	Materie im elektrostatischen Feld	60
3.10.1	Der ideale Leiter	60
3.10.2	Das ideale Dielektrikum	62
3.10.3	Elektrostatik im idealen Dielektrikum	62
3.10.4	Stetigkeitsbedingungen	64
4	Magnetostatik	66
4.1	Die Grundgleichungen im Vakuum	66
4.2	Formale Integration der magnetostatischen Gleichungen	67
4.3	Die magnetische Multipolentwicklung, das magnetische Fernfeld	71
4.4	Der Stromfaden	74
4.5	Der lineare Leiter	75
4.6	Die Stromschleife, der magnetische Dipol	77
4.7	Kräfte im magnetischen Feld	80
4.8	Räumliche Verteilungen von magnetischen Dipolen	84
4.9	Materie im \mathbf{B} -Feld	88
4.10	Stetigkeitsbedingungen	90
5	Integrationstheorie der MAXWELLSchen Gleichungen	92
5.1	Die Grundgleichungen	92
5.2	Elektrodynamische Potentiale	92
5.3	Eichungen	94
5.3.1	Die Coulomb-Eichung	94
5.3.2	Die Idee der Eichung	97
5.3.3	Die Lorentz-Eichung	97
5.4	Der Energiesatz der Elektrodynamik	98
5.5	Die Wellengleichung	100
5.5.1	Die eindimensionale Wellengleichung	101
5.5.2	Der mehrdimensionale Fall	105
5.5.3	Vektorwellen	109
5.6	Freie elektromagnetische Wellen	112
5.7	Die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung	116
5.7.1	Grundsätzliches	116
5.7.2	Bemerkungen zur FOURIERSchen Integraltransformation	117
5.7.3	Erweiterung auf Funktionen mehrerer Variabler	123
5.7.4	Die Wellengleichung und die Fouriertransformation	123
5.7.5	Lösung der elektromagnetischen Wellengleichung	126

5.8	Die inhomogene Wellengleichung	129
5.8.1	Die Greensche Funktion der Wellengleichung	129
5.8.2	Bewegte Ladungen	134
5.8.3	Der Hertzsche Dipol	137
5.9	Zeitlich rein periodische elektromagnetische Felder	144
5.9.1	Grundlegendes	144
5.9.2	Der HERTZsche und der FITZGERALDSche Vektor	145
5.9.3	Das oszillierende elektrische Stromelement	149
5.9.4	Der oszillierende elektrische Kreisstrom	150
5.10	Elektromagnetische Felder in Materie	153
5.10.1	Grundsätzliches	153
5.10.2	Die MAXWELLSchen Gleichungen	154
5.10.3	Stetigkeitsbedingungen	154
6	Energiedichte und -fluß in der Elektrodynamik	159
6.1	Der Poyntingsche Satz	159
6.2	Energiedichte einer ebenen elektromagnetischen Welle im Vakuum	161
6.3	Die Energieabstrahlung des Hertzschen Dipols	164
6.4	Die Energieabstrahlung des magnetischen Dipols	167
7	Spezielle Relativitätstheorie	169
7.1	Postulate	169
7.2	Der Minkovski–Raum	169
7.2.1	Elemente der affinen Geometrie	169
7.2.2	Der Minkovski Vierervektor	171
7.2.3	Die inhomogene Wellengleichung	172
7.3	Kovariante Formulierung der Elektrodynamik	177
7.3.1	Der Feldstärketensor	177
7.3.2	Die MAXWELLSchen Gleichungen in kovarianter Schreibweise	179
7.3.3	Die Lorentzkraft	181
7.3.4	Der Energie–Impulstensor	182
7.4	Relativistische Elektrodynamik	183
7.4.1	Transformationseigenschaften, das elektrische Feld einer bewegten Ladung	183
7.4.2	Die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem homogenen elektrischen Feld	187
7.4.3	Die Elektrodynamik materieller Körper	190
7.4.4	Lösung der inhomogenen Wellengleichung unter Verwendung Greenscher Funktionen	193

7.4.5	Das Feld einer geradlinig und gleichförmig bewegten Punktladung	198
7.4.6	Die Theorie der Cerenkov-Strahlung	201

Literatur		207
------------------	--	------------

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Grundsätzliches

Wir wollen mit einem kurzen Blick auf die Newtonsche Mechanik beginnen. In ihr wird der Begriff des **Inertialsystemes** und als Ursache von Beschleunigungen relativ zum Inertialsystem der Begriff der **Kraft** eingeführt. Eine solche Kraft erfährt ein Massenpunkt, und diese Kraft wird sehr häufig von der Lage des Massenpunktes im Raum abhängen. Dies führt zur Einführung des **Kraftfeldes** $\mathbf{K}(\mathbf{r})$, und ein Massenpunkt, welcher sich im Raumpunkt \mathbf{r}_0 befindet, erfährt dann die Kraft $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(\mathbf{r}_0)$. In der Mechanik wird aber nie die *Ursache* einer solchen Kraft diskutiert (da sie für die Mechanik selbst irrelevant ist).

Eine weitere Frage wurde im Zusammenhang mit Kraftfeldern in der Mechanik nicht untersucht: sind solche Kraftfelder ausschließlich ein nützliches mathematisches Konzept, oder kommt ihnen physikalische Bedeutung zu? Was geschieht, wenn wir nach \mathbf{r}_0 keinen Massenpunkt bringen? Ist die Eigenschaft auf einen Körper am Ort \mathbf{r}_0 eine Kraft \mathbf{K}_0 auszuüben bereits im Raumpunkt \mathbf{r}_0 ‘verborgen’, oder ist es erst dann sinnvoll von diesem Feld zu sprechen, wenn der Körper vorhanden ist? Also: gibt es einen “Zustand des Raumes” an sich? Ein typisches Beispiel, welches diese Frage unmittelbar mit “ja” beantworten läßt, ist ein Schallfeld, welches im Raum existieren kann, unabhängig davon, ob irgendwo ein Ohr ist, das anhört. Aber ganz so einfach ist es doch nicht! Es ist zunächst zu untersuchen, ob es überhaupt physikalische Methoden (Mittel) gibt, welche es uns erlauben, eine solche Frage zu beantworten.

Wir können zunächst aber etwas unmittelbar feststellen: es kann nicht das Kraftfeld selbst sein, welchem die vermutete absolute Bedeutung zukommt, denn wäre es so, so müßte $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ von den Eigenschaften des Probekörpers gänzlich unabhängig sein. Es gibt aber ‘Sorten’ von Kräften, welche gerade mit solchen Eigenschaften zusammenhängen, wie etwa die Gravitationskraft.

Zurück zur Frage der Entscheidbarkeit mit physikalischen Mitteln: wir nehmen zwei Massenpunkte, und \mathbf{K}_{12} ist die von ihrem Abstand abhängige Kraft, die Massenpunkt 1 auf Massenpunkt 2 ausübt. Nehmen wir nun an, der Raum habe mit der Kraft nichts zu tun: beide Massen wirken dann **unmittelbar** aufeinander (*Fernwirkung*). Dann muß sich jede Änderung am Massenpunkt 1 (etwa die Änderung des Abstandes) **instantan** (unverzögert) dem Massenpunkt 2 mitteilen: *die Wirkung breitet sich mit unendlicher Geschwindigkeit aus.*

Nehmen wir jetzt an, daß der Massenpunkt 2 als ‘Sonde’ auf einen Zustand des Raumes im Orte \mathbf{r}_2 reagiert, welcher durch die Existenz des Massenpunktes 1 im Orte \mathbf{r}_1 bedingt ist, so **kann** es sein, daß diese Sonde erst nach endlicher, vom Abstand $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ abhängiger Zeit von der ‘Änderung’ and der ‘Quelle’ (Massenpunkt 1) erfährt. Eine solche beeinflusst zunächst den Zustand des Raumes in ihrer unmittelbaren Umgebung, und diese Zustandsänderung wirkt dann auf die weitere Nachbarschaft und breitet sich auf diese Weise aus (*Nahwirkung*): *die Wirkung pflanzt sich mit endlicher Geschwindigkeit fort.* (Wie etwa beim Schall, welcher sich mit endlicher Geschwindigkeit, der Schallgeschwindigkeit, ausbreitet.)

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung kann somit als Kriterium herangezogen werden um zwischen den beiden Hypothesen zu entscheiden. Es ist bereits bekannt, daß die **Lichtgeschwindigkeit** die absolute Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Wirkung ist, womit auch die obige Fragestellung beantwortet werden konnte. All diesen Überlegungen folgend ist die Newtonsche Mechanik eine reine Fernwirkungstheorie, da ja schon allein der Satz von *actio = reactio* instantane Wirkungsübertragung fordert!

Es bedarf also nicht-mechanischer Theorien, um Kräfte, die in der Mechanik auftreten, zu **erklären** und zweitens kann es sein, daß solche Theorien Nahwirkungstheorien sind, also von **Zuständen des Raumes** handeln. Die Elektrodynamik, welche die Beschreibung elektromagnetischer Phänomene zum Ziel hat und ihre Gesetzmäßigkeiten untersucht, ist eine solche Nahwirkungstheorie.

1.2 Historisches

Ein axiomatisches Konzept der Elektrodynamik wurde von SOMMERFELD (1868 - 1951) in seinem Sammelband über Kursvorlesungen aus theoretischer Physik vorgestellt. In seiner Zeit hat nämlich ein gewaltiger Umschwung in den Anschauungen elektrodynamischer Phänomene stattgefunden. Er schrieb:

“Es fiel mir wie Schuppen von den Augen, als ich die große Abhandlung von Heinrich HERTZ (1857-1894) ‘Über die Grundlagen der Elektrodynamik für ruhende Körper’ las.”

In diesem Buch werden erstmals die von HEAVISIDE und HERTZ bereinigten MAXWELL (1831 - 1879) Gleichungen **axiomatisch** an die Spitze der Elektrodynamik gestellt. Hier ist zunächst wesentlich, daß postuliert wird, daß alle Wirkungen vom elektromagnetischen Feld übertragen werden. An die Stelle des Prinzips der Fernwirkung tritt also die schon von GAUSS postulierte **Nah- oder Feldwirkung**.

Nach dem alten Konzept war es ja so, daß neben dem COULOMB-Gesetz, das BIOT-SAVARTSche Gesetz und das AMPÈRESche Gesetz die Wirkung zweier Stromelemente aufeinander beschrieben haben und ihre Konkurrenten, die Gesetze von GRASSMANN, GAUSS, RIEMANN, CLAUDIUS und als Krönung derselben das Gesetz von WEBER eingeführt wurden. Diese sind alle nach dem Vorbild der Newtonschen Fernwirkung konzipiert. Dies ist umständlich, inkohärent und führt zu keiner geschlossenen theoretischen Beschreibung.

1.3 Das Wesen der Elektrodynamik

Der Gegenstand der Elektrodynamik ist die Beschreibung der elektromagnetischen Phänomene und ihrer Gesetzmäßigkeiten. Ihr Gültigkeitsbereich ist größer als der der klassischen Mechanik: sie genügt den Anforderungen der Relativitätstheorie in sich. Wir werden daher auch die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie aus der Elektrodynamik entwickeln.

Wir werden die Elektrodynamik durch die Angabe einiger weniger Grundeigenschaften und -gesetzmäßigkeiten beschreiben. Letztere sind dann die **Postulate** bzw. **Prinzipien der Theorie**. Die Basis werden die **MAXWELLSchen Gleichungen** bilden, welche der differentielle Ausdruck einiger integral unmittelbar anschaulicher Grundaussagen sind. Man könnte aber noch wesentlich tiefer gehen, indem man von einem Hamiltonschen Prinzip ausgeht, aus welchem dann die MAXWELLSchen Gleichungen als Euler-Lagrange Gleichungen (Feldgleichungen) folgen. Dies geschieht in völliger Analogie zur Hamilton-Lagrange Formulierung der klassischen Mechanik.

Die verschiedenen Grundgrößen der Elektrodynamik **definieren** zu jeder Zeit einen **Zustand des Raumes**, der durch ihren Wert an jedem seiner Punkte bestimmt ist.

*Der Raum, der den Zustand trägt ist ein **Kontinuum** und deswegen ist die Elektrodynamik eine **Kontinuums- oder Feldtheorie**.*

Zustandsänderungen in einem Punkt teilen sich zunächst der unmittelbaren Umgebung dieses Punktes mit. Das mathematische "Werkzeug" zur Beschreibung eines solchen Sachverhaltes sind partielle Differentialgleichungen.